

高职高专精品教材

高职应用数学

主 审 王廷臣

主 编 胡秀平 魏俊领 齐晓东



上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

前 言

近几年,随着高校招生制度改革不断深入,高职高专院校招生形式日趋多样化,而自主招生、注册招生、订单招生等招生方式所录取的学生比例越来越大,他们大都来源于中专、中职、技校或社会青年,基本上没有接受过完整的高中教育,数学基础知识欠缺,而之前的《高等数学》教材针对的是统招生,着重考虑的是高中与大学知识体系的衔接,所以使得大部分学生无法正常地进入课程的学习,本教材弥补了这一缺口。本教材以高职高专的人才培养目标和课程目标为依据,围绕学生的个体能力和知识水平进行设计。

本教材有如下特色:

1. 注重数学思维方法的培养

编写教材时,每一个重要的定义都设置有引例,然后进入概念、性质、举例、练习、应用等环节,使在学习知识的同时,一边接受数学思维方式的熏陶,一边提高运用数学解决实际问题的能力,从而提高学生的综合素质。

2. 注重数学文化的积淀

本教材融知识性、思想性、趣味性和通俗性为一体,每章以趣味阅读引入,以拓展阅读结束,图文并茂,使内容更加形象,学生更容易理解,这样不仅丰富了数学内容,而且可以让学生从人文素养等不同的角度来学习数学,增加了数学的趣味性,力求降低数学的枯燥感。

3. 充分考虑学生的能力层次

教材编写时,增加了初等数学知识,加强了初等数学与高等数学的衔接;落实“够用为度”教学原则,对定理及理论性过强的内容作了适当的淡化处理,不刻意追求过程的严密性;增加了接近学生专业的案例分析。章节内容层次递进,由浅入深,例题由易到难,紧扣内容,为层次教学做好准备。

4. 体现数学的工具性

教材引入数学实验,注重数学工具的使用,介绍了数学软件 MATLAB 的简单使用,使学生了解先进数学工具的使用方法,培养学生应用计算机和数学软件求解数学问题的能力。

5. 二维码扫一扫,重点知识随时看

本教材中对于非常重要的知识点配有了二维码视频文件,读者可以随时扫描二维码观看相关知识的视频文件。

本教材由胡秀平、魏俊领和齐晓东任主编，王廷臣为主审，参与编写的人员还有曹国振、崔湛林、槐文谦、李凤梅、马巧英和甄晨光。所有编者均为高职院校具有丰富教学经验的一线教师。

本教材在组织编写和统稿过程中，参考了大量高等数学相关的资料和教材，在此向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们虽然尽力想把工作做好，但由于水平有限，书中存在的不足之处敬请广大专家和各位读者批评指正。

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登陆北京金企鹅文化发展中心的网站（www.bjjqe.com）下载。

编者

2018年2月

目 录

第 1 章 基础知识	1
趣味阅读——数 e 的由来	1
1.1 代数基础知识	2
1.1.1 指数及其运算	2
1.1.2 对数及其运算	3
1.1.3 方程	5
1.1.4 不等式	8
习题 1-1	13
1.2 函数	14
1.2.1 函数的概念与性质	14
1.2.2 基本初等函数	17
1.2.3 复合函数	20
1.2.4 初等函数和分段函数	21
习题 1-2	22
1.3 建立函数关系	23
1.3.1 建立函数关系式	23
1.3.2 工程技术中函数的建立	24
1.3.3 经济函数的建立	25
习题 1-3	28
本章小结	29
复习题一	30
数学实验一 初识数学软件 MATLAB 及绘图	31
拓展阅读——斐波那契数列	34
第 2 章 极限与连续	36
趣味阅读——阿基里斯追龟（芝诺悖论）	36
2.1 极限的概念	37
2.1.1 数列的极限	37

2.1.2 函数的极限	38
2.1.3 无穷小量与无穷大量	42
习题 2-1	44
2.2 极限的性质和运算法则	45
2.2.1 极限的性质	45
2.2.2 极限的运算法则	45
2.2.3 极限的求法	46
习题 2-2	49
2.3 两个重要极限及无穷小的比较	50
2.3.1 两个重要极限	50
2.3.2 无穷小的比较	52
习题 2-3	54
2.4 函数的连续性	55
2.4.1 连续函数的概念	55
2.4.2 函数的间断点	56
2.4.3 初等函数的连续性	57
2.4.4 闭区间上连续函数的性质	58
习题 2-4	59
本章小结	60
复习题二	61
数学实验二 利用 MATLAB 软件求极限	63
拓展阅读——刘徽及割圆术	64
第 3 章 一元函数微分学	66
趣味阅读——微积分产生的历史背景	66
3.1 导数的概念	67
3.1.1 案例分析	67
3.1.2 导数的概念	68
3.1.3 求导数举例	69
3.1.4 用导数表示实际量——变化率模型	70
3.1.5 函数的可导性与连续性的关系	72
习题 3-1	73
3.2 导数的运算	74
3.2.1 导数的基本公式	74
3.2.2 导数的四则运算法则	74

3.2.3 复合函数的求导法则	75
习题 3-2	76
3.3 高阶导数	77
3.3.1 高阶导数的定义	77
3.3.2 高阶导数的计算	78
习题 3-3	79
*3.4 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数	79
3.4.1 隐函数的导数	79
3.4.2 由参数方程确定的函数的导数	82
3.4.3 对数求导法	82
习题 3-4	83
3.5 函数的微分及其应用	84
3.5.1 微分的概念	84
3.5.2 微分的几何意义	85
3.5.3 微分的运算	86
3.5.4 微分在近似计算中的应用	87
习题 3-5	90
本章小结	91
复习题三	91
数学实验三 用 MATLAB 求函数导数	93
拓展阅读——微积分的奠基者：牛顿和莱布尼茨	93
第 4 章 导数的应用	95
趣味阅读——蜂巢中的数学	95
4.1 利用导数求极限（洛必达法则）	96
习题 4-1	98
4.2 函数的单调性与极值	99
4.2.1 函数的单调性	99
4.2.2 函数的极值	101
习题 4-2	103
4.3 曲线的凹凸性与拐点	103
习题 4-3	105
4.4 利用导数求最值	105
习题 4-4	108
4.5 曲率	109

4.5.1 曲率及其计算公式	109
4.5.2 曲率圆与曲率半径	111
习题 4-5	112
4.6 导数在经济分析中的应用	112
4.6.1 边际分析	112
4.6.2 弹性分析	114
习题 4-6	115
本章小结	115
复习题四	116
数学实验四 用 MATLAB 求函数的极值	117
拓展阅读——人民的数学家华罗庚	119
第 5 章 一元函数的积分学及其应用	121
资料阅读——积分学的发展过程	121
5.1 定积分的概念	122
5.1.1 两个引例	122
5.1.2 定积分的概念	124
5.1.3 定积分的几何意义	126
习题 5-1	129
5.2 不定积分的概念与性质	130
5.2.1 原函数和不定积分的概念	130
5.2.2 不定积分的几何意义	131
5.2.3 基本积分公式	132
习题 5-2	134
5.3 微积分基本公式	136
5.3.1 引例	136
5.3.2 微积分基本公式	137
5.3.3 定积分的性质	137
习题 5-3	140
5.4 不定积分的积分方法	141
5.4.1 不定积分的换元积分法	141
5.4.2 不定积分的分部积分法	146
习题 5-4	149
5.5 定积分的积分方法	150
5.5.1 定积分的换元积分法	150

5.5.2 定积分的分部积分法	152
习题 5-5	154
5.6 广义积分	154
5.6.1 无限区间的广义积分	155
5.6.2 无界函数的广义积分(瑕积分)	156
习题 5-6	158
5.7 定积分的应用	158
5.7.1 定积分的微元法	158
5.7.2 定积分在几何上的应用	159
5.7.3 定积分在物理上的应用	165
5.7.4 定积分在经济上的应用	166
习题 5-7	168
本章小结	169
复习题五	170
数学实验五 用 MATLAB 求定积分	173
拓展阅读——数学家阿基米德	174
第 6 章 多元函数的微积分初步	176
趣味阅读——阿基米德轶事	176
6.1 空间解析几何简介	177
6.1.1 空间直角坐标系	177
6.1.2 曲面及其方程	179
6.1.3 空间曲线	182
习题 6-1	183
6.2 多元函数的概念、极限与连续性	184
6.2.1 多元函数的概念	184
6.2.2 二元函数的极限	186
6.2.3 二元函数的连续性	187
习题 6-2	187
6.3 偏导数	188
6.3.1 偏导数的概念及求法	188
6.3.2 高阶偏导数	189
习题 6-3	190
6.4 全微分	191
6.4.1 全微分的概念	191

6.4.2 全微分在近似计算中的应用	192
习题 6-4	193
6.5 多元复合函数与隐函数微分法	193
6.5.1 多元复合函数微分法	193
6.5.2 隐函数的微分法	195
习题 6-5	196
6.6 二元函数的极值和最值	197
6.6.1 二元函数的极值	197
6.6.2 二元函数的最大值与最小值	198
6.6.3 条件极值	199
习题 6-6	201
6.7 二重积分的概念与性质	201
6.7.1 两个实例	201
6.7.2 二重积分的定义	203
6.7.3 二重积分的性质	203
习题 6-7	204
6.8 二重积分的计算	205
6.8.1 直角坐标系下二重积分的计算方法	205
6.8.2 极坐标下二重积分的计算方法	208
习题 6-8	209
6.9 二重积分在几何上的应用	210
6.9.1 体积和平面图形的面积	210
6.9.2 曲面的面积	211
习题 6-9	212
本章小结	213
复习题六	214
数学实验六 用 MATLAB 求多元函数的偏导数	215
拓展阅读——数学家高斯	217
第 7 章 微分方程	219
资料阅读——微分方程发展简史	219
7.1 微分方程的基本概念	220
7.1.1 引例	220
7.1.2 微分方程的概念	221
习题 7-1	222

7.2 一阶微分方程	223
7.2.1 可分离变量的微分方程	223
7.2.2 齐次型微分方程	224
7.2.3 一阶线性微分方程	225
习题 7-2	227
7.3 二阶常系数线性微分方程	228
7.3.1 二阶常系数齐次线性微分方程	228
7.3.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	231
习题 7-3	233
7.4 微分方程的应用	234
习题 7-4	237
本章小结	237
复习题七	239
数学实验七 用 MATLAB 求解微分方程	240
拓展阅读——数学家陈省身	241
第 8 章 无穷级数	243
趣味阅读——冯·诺依曼与蜜蜂问题	243
8.1 常数项级数的概念和性质	244
8.1.1 常数项级数的概念	244
8.1.2 常数项级数的基本性质	247
习题 8-1	248
8.2 常数项级数的敛散性	248
8.2.1 正项级数及其审敛法	248
8.2.2 交错级数及其审敛法	250
8.2.3 绝对收敛与条件收敛	251
习题 8-2	252
8.3 幂级数	253
8.3.1 函数项级数的概念	253
8.3.2 幂级数及其收敛性	254
8.3.3 幂级数的运算	257
习题 8-3	259
8.4 函数展开成幂级数	259
8.4.1 泰勒级数	259
8.4.2 将函数展开成幂级数	260

习题 8-4	262
本章小结	263
复习题八	264
数学建模简介	265
拓展阅读——冯·诺依曼	268
附录 初等数学常用公式	271
参考文献	273

第1章

基础知识

【名人名言】

数学是打开科学大门的钥匙。

——培根

趣味阅读——数e的由来

e和 π 一样，都是数学中重要的常数。早在17世纪初，就有人提到这个数，它与计算利息有关。过去，有个商人向财主借钱，财主的条件是每借1元，一年后连本带利还2元，年利率100%，财主挺高兴。财主想，半年的利率为50%，半年结算一次，利滚利一年后要还 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$ 元。财主又想，如果一年结算3次，4次， $\dots$ ， n 次，他以为结算次数越多，利息也就增长的越快，岂不发财了？结果令财主大失所望。本利和为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值虽然随 n 的增大而增大，但增加得极其缓慢，会逐渐稳定地趋于一个常数。1727年，欧拉最先用e作为该常数的符号使用。

人们在研究一些实际问题，如物体的冷却、细胞的繁殖、放射性元素的衰变等变化规律时，发现它们都与常数e有关，e在工程技术上使用得非常广泛。一般以e为底数的对数，能使许多式子得到简化，用它是最“自然”的，所以叫“自然对数”。e是一个无理数，在本书的第2章我们会学到极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限e，从而e定义成一个极限值。

【导学】

文艺复兴末期的16世纪，西方社会处于大变革时期，自然科学领域中的力学、天文学等为适应生产实践的需要，开始把运动作为研究的主要对象，对各种变化过程和过程中量与量之间的依赖关系进行研究，这就产生了函数的概念。函数是刻画运动变化过程中变量相依关系的抽象数学模型。

1.1 代数基础知识

1.1.1 指数及其运算

1. 整数指数幂

在初中,我们学习过整数指数幂的意义及运算法则,即

(1) 正整数指数幂: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{个}} \quad (n \text{ 为正整数}).$

(2) 零指数幂: $a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$

(3) 负整数指数幂: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \text{ 为正整数}).$

(4) 整数指数幂的运算法则: $(a \neq 0, b \neq 0, m, n \text{ 为整数})$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

2. 分数指数幂

1) n 次根式

我们知道,如果 $x^2 = a \quad (a \geq 0)$, 则称 $x = \pm\sqrt{a}$ 为 a 的平方根(二次方根);如果 $x^3 = a$, 则称 $x = \sqrt[3]{a}$ 为 a 的立方根(三次方根).

一般地,如果 $x^n = a \quad (a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n > 1)$, 则称 x 为 a 的 n 次方根.

(1) 当 n 为奇数时,正数的 n 次方根是一个正数,负数的 n 次方根是一个负数,这时 a 的 n 次方根可以记作 $\sqrt[n]{a}$.

(2) 当 n 为偶数时,正数 a 的 n 次方根有两个,它们互为相反数,分别用 $-\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{a}$ 表示,其中 $\sqrt[n]{a}$ 称为 a 的 n 次算术根. 负数没有偶次方根.

(3) 0 的 n 次方根是 0, 记作 $\sqrt[n]{0} = 0$.

我们把形如 $\sqrt[n]{a} \quad (a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n > 1)$ 的式子称为 n 次根式,其中, n 称为根指数, a 称为被开方数.

例如, $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $-\sqrt[4]{16} = -2$, $\sqrt[4]{16} = 2$.

2) 分数指数幂

为了实际需要,特规定:

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, (2) a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (3) a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

定义了分数指数幂以后,就把整数指数幂推广到了有理数指数幂.

可以证明,整数指数幂的运算法则对于有理数指数幂也同样适用.前提是必须使运算法则中出现的每一个有理数指数幂都有意义.

即当 $a, b > 0$, p, q 为有理数时,有

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}.$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}.$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p.$$

事实上,还可以将有理数指数幂推广到实数指数幂.当 p, q 为实数时,上述运算法则也成立.

例1 计算下列各式的值:

$$(1) \sqrt[3]{(-5)^3};$$

$$(2) \sqrt[4]{(3-\pi)^4};$$

$$(3) (-125)^{\frac{1}{3}};$$

$$(4) \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{8} \times \sqrt[8]{64}}.$$

解 (1) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5.$

$$(2) \sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3.$$

$$(3) (-125)^{\frac{1}{3}} = [(-5)^3]^{\frac{1}{3}} = (-5)^{3 \times \frac{1}{3}} = -5.$$

$$(4) \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{8} \times \sqrt[8]{64}} = \frac{3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{4}} \times (2^6)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{6}{8}}} = \frac{3^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})}}{2^{(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8})}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

1.1.2 对数及其运算

1. 对数的概念

如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 那么 b 称为以 a 为底 N 的对数, 记作

$$b = \log_a N,$$

其中, a 称为对数的底数 (简称底), N 称为真数.

例如, $2^5 = 32$ 可以写作 $\log_2 32 = 5$; $2^{-3} = 0.125$ 可以写作 $\log_2 0.125 = -3$; $4^{0.5} = 2$ 可以写作 $\log_4 2 = 0.5$.

通常, 我们称形如 $a^b = N$ 的等式为指数式, 称形如 $\log_a N = b$ 的等式为对数式. 由对

数的定义可知, 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时,

$$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b.$$

对数具有如下基本性质:

(1) 零和负数没有对数, 即 $N > 0$;

(2) $\log_a 1 = 0$, 即 1 的对数为 0;

(3) $\log_a a = 1$, 即底的对数为 1.

通常将以 10 为底的对数称为常用对数, $\log_{10} N$ 简记为 $\lg N$. 例如 $\log_{10} 3$ 简记为 $\lg 3$.

在工程计算和科学研究中, 经常使用以无理数 $e = 2.718\ 28\cdots$ 为底的对数. 将以无理数 e 为底的对数称为自然对数, $\log_e N$ 简记为 $\ln N$. 例如 $\log_e 2$ 简记为 $\ln 2$.

2. 积、商、幂的对数

设 $a^p = M$, $a^q = N$, 则

$$p = \log_a M, \quad q = \log_a N.$$

因为

$$M \cdot N = a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$

所以

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a (a^{p+q}) = p + q = \log_a M + \log_a N.$$

这就得到了积的对数公式. 类似地, 我们还可以得到商和幂的对数公式.

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 我们可以得到对数的如下运算法则:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M.$$

例 2 计算下列各式的值:

(1) $\log_2 8$;

(2) $\lg 0.001$;

(3) $\lg \sqrt[3]{100}$;

(4) $\log_3 \frac{27^4}{9^3}$.

解 (1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$.

(2) $\lg 0.001 = \lg 10^{-3} = -3 \lg 10 = -3$.

(3) $\lg \sqrt[3]{100} = \lg 100^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \lg 100 = \frac{1}{3} \lg 10^2 = \frac{1}{3} \times 2 \lg 10 = \frac{2}{3}$.

(4) $\log_3 \frac{27^4}{9^3} = \log_3 27^4 - \log_3 9^3 = 4 \log_3 27 - 3 \log_3 9$
 $= 4 \log_3 3^3 - 3 \log_3 3^2 = 4 \times 3 - 3 \times 2 = 6$.

1.1.3 方程

1. 直线方程

我们知道, 一次函数 $y = x + 2$ 的图像是一条直线 l , 其解析式 $y = x + 2$ 可以看作一个关于 x, y 的二元一次方程, 直线 l 上的任意一点 (x, y) 都满足方程 $y = x + 2$. 此时, 我们把方程 $y = x + 2$ 称为直线 l 的方程.

1) 直线的点斜式方程

如图 1-1 所示, 已知直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且斜率为 k . 设点 $P(x, y)$ 为直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点, 由斜率公式可得

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

整理得

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

显然, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 也满足上述方程. 由于上述方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的, 所以称为直线的点斜式方程.

图 1-1

2) 直线的斜截式方程

如图 1-2 所示, 设直线 l 与 x 轴交于点 $A(a, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, b)$, 则 a 称为直线 l 在 x 轴上的截距 (或横截距); b 称为直线 l 在 y 轴上的截距 (或纵截距).

设直线 l 与 y 轴的交点为 $B(0, b)$, 且直线 l 的斜率为 k , 则直线 l 的方程为

$$y - b = k(x - 0),$$

即

$$y = kx + b.$$

上述方程是由直线的斜率和在 y 轴上的截距确定的, 所以称为直线的斜截式方程.

例 3 某直线过点 $A(-3, 0)$, 且在 y 轴上的截距为 -2 . 试写出该直线的方程.

解 因为直线在 y 轴上的截距为 -2 , 即过点 $(0, -2)$, 又因直线过点 $A(-3, 0)$, 所以直线的斜率为

$$k = \frac{-2 - 0}{0 + 3} = -\frac{2}{3}.$$

故直线的方程为

$$y = -\frac{2}{3}x - 2.$$

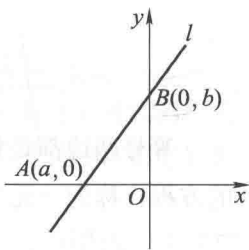
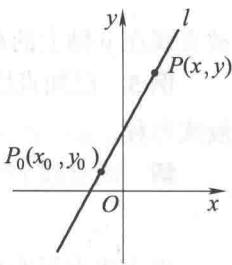


图 1-2

3) 直线的一般式方程

我们把形如 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不全为零) 的二元一次方程称为直线的一般式方程.

例 4 将方程 $y - 1 = 2(x - 3)$ 化为直线的一般式方程, 并分别求出该直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

解 由 $y - 1 = 2(x - 3)$ 可得直线的一般式方程为

$$2x - y - 5 = 0.$$

在一般式方程中, 令 $y = 0$, 则 $x = \frac{5}{2}$, 故直线在 x 轴上的截距为 $\frac{5}{2}$; 令 $x = 0$, 则 $y = -5$, 故直线在 y 轴上的截距为 -5 .

例 5 已知直线 l 经过点 $A(4, 2)$, 斜率为 -3 , 求直线 l 点斜式方程、斜截式方程和一般式方程.

解 因直线 l 经过点 $A(4, 2)$, 斜率为 -3 , 则其点斜式方程为

$$y - 2 = -3(x - 4).$$

将上述方程变形后可得直线的斜截式方程

$$y = -3x + 14.$$

将斜截式方程移项后可得直线的一般式方程

$$3x + y - 14 = 0.$$

2. 一元二次方程

等号两边都是整式, 只含有一个未知数 (一元), 并且未知数的最高次数是 2 (二次) 的方程, 称为一元二次方程. 一元二次方程的一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

1) 公式法

一般地, 式子 $b^2 - 4ac$ 称为一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的判别式, 通常用希腊字母 “ Δ ” 表示, 即 $\Delta = b^2 - 4ac$.

当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的实数根可写为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

的形式, 这个式子称为一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式. 求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的结果. 解一个具体的一元二次方程时, 把各系数直接代入求根公式, 这种解一元二次方程的方法称为公式法.

例 6 用公式法解下列方程:

$$(1) x^2 - 4x - 7 = 0;$$

$$(2) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$$

解 (1) $a = 1$, $b = -4$, $c = -7$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44 > 0.$$

方程有两个不等的实数根: