高职高专精品教材

高职应用数学

主　审　王廷臣
主　编　胡秀平　魏俊领　齐晓东

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

前　言

近几年，随着高校招生制度改革的不断深入，高职高专院校招生形式日趋多样化，而自主招生、注册招生、订单招生等招生方式所录取的学生比例越来越大，他们大都来源于中专、中职、技校或社会青年，基本上没有接受过完整的高中教育，数学基础知识欠缺，而之前的《高等数学》教材针对的是统招生，着重考虑的是高中与大学知识体系的衔接，所以使得大部分学生无法正常地进入课程的学习，本教材弥补了这一缺口。本教材以高职高专的人才培养目标和课程目标为依据，围绕学生的个体能力和知识水平进行设计。

本教材有如下特色：

1．注重数学思维方法的培养

编写教材时，每一个重要的定义都设置有引例，然后进入概念、性质、举例、练习、应用等环节，使学生在学习知识的同时，一边接受数学思维方式的熏陶，一边提高运用数学解决实际问题的能力，从而提高学生的综合素质。

2．注重数学文化的积淀

本教材融知识性、思想性、趣味性和通俗性为一体，每章以趣味阅读引入，以拓展阅读结束，图文并茂，使内容更加形象，学生更容易理解，这样不仅丰富了数学内容，而且可以让学生从人文素养等不同的角度来学习数学，增加了数学的趣味性，力求降低数学的枯燥感。

3．充分考虑学生的能力层次

教材编写时，增加了初等数学知识，加强了初等数学与高等数学的衔接；落实“够用为度”教学原则，对定理及理论性过强的内容作了适当的淡化处理，不刻意追求过程的严密性；增加了接近学生专业的案例分析。章节内容层次递进，由浅入深，例题由易到难，紧扣内容，为层次教学做好准备。

4．体现数学的工具性

教材引入数学实验，注重数学工具的使用，介绍了数学软件 MATLAB 的简单使用，使学生了解先进数学工具的使用方法，培养学生应用计算机和数学软件求解数学问题的能力。

5．二维码扫一扫，重点知识随时看

本教材中对于非常重要的知识点配有了二维码视频文件，读者可以随时扫描二维码观看相关知识的视频文件。

本教材由胡秀平、魏俊领和齐晓东任主编，王廷臣为主审，参与编写的人员还有曹国振、崔湛林、槐文谦、李凤梅、马巧英和甄晨光。所有编者均为高职院校具有丰富教学经验的一线教师。

本教材在组织编写和统稿过程中，参考了大量高等数学相关的资料和教材，在此向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们虽然尽力想把工作做好，但由于水平有限，书中存在的不足之处敬请广大专家和各位读者批评指正。

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登陆北京金企鹅文化发展中心的网站（www.bjjqe.com）下载。

编　者

2018 年 2 月

目　录

第1章

基础知识

【名人名言】

数学是打开科学大门的钥匙.

——培　根

趣味阅读——数e的由来

e和π一样，都是数学中重要的常数. 早在17世纪初，就有人提到这个数，它与计算利息有关. 过去，有个商人向财主借钱，财主的条件是每借1元，一年后连本带利还2元，年利率100%，财主挺高兴. 财主想，半年的利率为50%，半年结算一次，利滚利一年后要还$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$元. 财主又想，如果一年结算3次，4次，…，$n$次，他以为结算次数越多，利息也就增长的越快，岂不发财了？结果令财主大失所望. 本利和为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的值虽然随$n$的增大而增大，但增加得极其缓慢，会逐渐稳定地趋于一个常数. 1727年，欧拉最先用e作为该常数的符号使用.

人们在研究一些实际问题，如物体的冷却、细胞的繁殖、放射性元素的衰变等变化规律时，发现它们都与常数e有关，e在工程技术上使用得非常广泛. 一般以e为底数的对数，能使许多式子得到简化，用它是最“自然”的，所以叫“自然对数”. e是一个无理数，在本书的第2章我们会学到极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的极限e，从而e定义成一个极限值.

【导　学】

文艺复兴末期的16世纪，西方社会处于大变革时期，自然科学领域中的力学、天文学等为适应生产实践的需要，开始把运动作为研究的主要对象，对各种变化过程和过程中量与量之间的依赖关系进行研究，这就产生了函数的概念. 函数是刻画运动变化过程中变量相依关系的抽象数学模型.

1.1 代数基础知识

1.1.1 指数及其运算

1. 整数指数幂

在初中，我们学习过整数指数幂的意义及运算法则，即

（1）**正整数指数幂**：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}$ （n 为正整数).

（2）**零指数幂**：$a^0=1$ （$a\neq 0$).

（3）**负整数指数幂**：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ （$a\neq 0$，n 为正整数).

（4）**整数指数幂的运算法则**：（$a\neq 0$，$b\neq 0$，m，n 为整数）

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\text{；}\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n}\text{；}$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\text{；}\qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

2. 分数指数幂

1）n 次根式

我们知道，如果 $x^2=a\,(a\geqslant 0)$，则称 $x=\pm\sqrt{a}$ 为 a 的平方根（二次方根）；如果 $x^3=a$，则称 $x=\sqrt[3]{a}$ 为 a 的立方根（三次方根).

一般地，如果 $x^n=a\,(a\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$，则称 x 为 a 的 **n 次方根**.

（1）当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，这时 a 的 n 次方根可以记作 $\sqrt[n]{a}$.

（2）当 n 为偶数时，正数 a 的 n 次方根有两个，它们互为相反数，分别用 $-\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{a}$ 表示，其中 $\sqrt[n]{a}$ 称为 a 的 **n 次算术根**. 负数没有偶次方根.

（3）0 的 n 次方根是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

我们把形如 $\sqrt[n]{a}\,(a\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$的式子称为 **n 次根式**，其中，n 称为**根指数**，a 称为**被开方数**.

例如，$\sqrt[5]{32}=2$；$\sqrt[3]{-27}=-3$；$-\sqrt[4]{16}=-2$，$\sqrt[4]{16}=2$.

2）分数指数幂

为了实际需要，特规定：

（1）$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，（2）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，（3）$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

定义了分数指数幂以后，就把整数指数幂推广到了有理数指数幂.

可以证明，整数指数幂的运算法则对于有理数指数幂也同样适用. 前提是必须使运算法则中出现的每一个有理数指数幂都有意义.

即当$a,b>0$，p,q为有理数时，有

$$a^p\cdot a^q=a^{p+q}.$$

$$(a^p)^q=a^{p\cdot q}.$$

$$(a\cdot b)^p=a^p\cdot b^p.$$

事实上，还可以将有理数指数幂推广到实数指数幂. 当p,q为实数时，上述运算法则也成立.

例 1 计算下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{(-5)^3}$；（2）$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$；

（3）$(-125)^{\frac{1}{3}}$；（4）$\dfrac{3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt[4]{8}\times\sqrt[8]{64}}$.

解 （1）$\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$.

（2）$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$.

（3）$(-125)^{\frac{1}{3}}=[(-5)^3]^{\frac{1}{3}}=(-5)^{3\times\frac{1}{3}}=-5$.

（4）$\dfrac{3\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}\times\sqrt[4]{8}\times\sqrt[8]{64}}=\dfrac{3\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{4}}\times(2^6)^{\frac{1}{8}}}=\dfrac{3\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{4}}\times2^{\frac{6}{8}}}=\dfrac{3^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})}}{2^{(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8})}}=\dfrac{3^2}{2^2}=\dfrac{9}{4}$.

1.1.2 对数及其运算

1. 对数的概念

如果$a^b=N\ (a>0且a\neq1)$，那么b称为**以a为底N的对数**，记作

$$b=\log_a N,$$

其中，a称为**对数的底数**（简称**底**），N称为**真数**.

例如，$2^5=32$可以写作$\log_2 32=5$；$2^{-3}=0.125$可以写作$\log_2 0.125=-3$；$4^{0.5}=2$可以写作$\log_4 2=0.5$.

通常，我们称形如$a^b=N$的等式为**指数式**，称形如$\log_a N=b$的等式为**对数式**. 由对

数的定义可知，当$a>0$且$a\neq1$时，

$$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b.$$

对数具有如下基本性质：

（1）零和负数没有对数，即$N>0$；

（2）$\log_a 1=0$，即1的对数为0;

（3）$\log_a a=1$，即底的对数为1.

通常将以10为底的对数称为**常用对数**，$\log_{10}N$简记为$\lg N$．例如$\log_{10}3$简记为$\lg 3$．

在工程计算和科学研究中，经常使用以无理数$\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$为底的对数．将以无理数e为底的对数称为**自然对数**，$\log_{\mathrm{e}}N$简记为$\ln N$．例如$\log_{\mathrm{e}}2$简记为$\ln 2$．

2. 积、商、幂的对数

设$a^p=M$，$a^q=N$，则

$$p=\log_a M,\quad q=\log_a N.$$

因为

$$M\cdot N=a^p\cdot a^q=a^{p+q},$$

所以

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a(a^{p+q})=p+q=\log_a M+\log_a N.$$

这就得到了积的对数公式．类似地，我们还可以得到商和幂的对数公式．

当$a>0$且$a\neq1$时，我们可以得到对数的如下运算法则：

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N;$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$$

$$\log_a M^n=n\log_a M.$$

例2　计算下列各式的值：

（1）$\log_2 8$；　　（2）$\lg 0.001$；

（3）$\lg\sqrt[3]{100}$；　　（4）$\log_3\dfrac{27^4}{9^3}$．

解　（1）$\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$．

（2）$\lg 0.001=\lg 10^{-3}=-3\lg 10=-3$．

（3）$\lg\sqrt[3]{100}=\lg 100^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\lg 100=\dfrac{1}{3}\lg 10^2=\dfrac{1}{3}\times 2\lg 10=\dfrac{2}{3}$．

（4）
$$\log_3\frac{27^4}{9^3}=\log_3 27^4-\log_3 9^3=4\log_3 27-3\log_3 9$$
$$=4\log_3 3^3-3\log_3 3^2=4\times3-3\times2=6.$$

1.1.3 方程

1. 直线方程

我们知道，一次函数 $y=x+2$ 的图像是一条直线 l，其解析式 $y=x+2$ 可以看作一个关于 x,y 的二元一次方程，直线 l 上的任意一点 (x,y) 都满足方程 $y=x+2$．此时，我们把方程 $y=x+2$ 称为**直线 l 的方程**.

1）直线的点斜式方程

如图 1-1 所示，已知直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k. 设点 $P(x,y)$ 为直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，由斜率公式可得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

整理得

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

显然，点 $P_0(x_0,y_0)$ 也满足上述方程. 由于上述方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的，所以称为**直线的点斜式方程**.

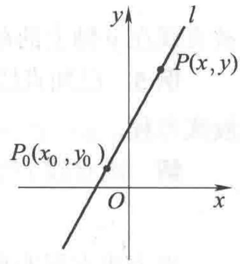

图 1-1

2）直线的斜截式方程

如图 1-2 所示，设直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，则 a 称为直线 l 在 x 轴上的**截距**（或**横截距**）；b 称为直线 l 在 y 轴上的**截距**（或**纵截距**）.

设直线 l 与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，且直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

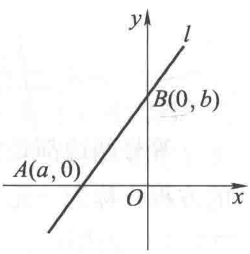

图 1-2

上述方程是由直线的斜率和在 y 轴上的截距确定的，所以称为**直线的斜截式方程**.

例 3 某直线过点 $A(-3,0)$，且在 y 轴上的截距为 -2．试写出该直线的方程.

解 因为直线在 y 轴上的截距为 -2，即过点 $(0,-2)$，又因直线过点 $A(-3,0)$，所以直线的斜率为

$$k=\frac{-2-0}{0+3}=-\frac{2}{3}.$$

故直线的方程为

$$y=-\frac{2}{3}x-2.$$

3）直线的一般式方程

我们把形如 $Ax+By+C=0$（A,B 不全为零）的二元一次方程称为**直线的一般式方程**.

例 4 将方程 $y-1=2(x-3)$ 化为直线的一般式方程，并分别求出该直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

解 由 $y-1=2(x-3)$ 可得直线的一般式方程为

$$2x-y-5=0.$$

在一般式方程中，令 $y=0$，则 $x=\dfrac{5}{2}$，故直线在 x 轴上的截距为 $\dfrac{5}{2}$；令 $x=0$，则 $y=-5$，故直线在 y 轴上的截距为 -5.

例 5 已知直线 l 经过点 $A(4,2)$，斜率为 -3，求直线 l 点斜式方程、斜截式方程和一般式方程.

解 因直线 l 经过点 $A(4,2)$，斜率为 -3，则其点斜式方程为

$$y-2=-3(x-4).$$

将上述方程变形后可得直线的斜截式方程

$$y=-3x+14.$$

将斜截式方程移项后可得直线的一般式方程

$$3x+y-14=0.$$

2. 一元二次方程

等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，称为一元二次方程．一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$.

1）公式法

一般地，式子 b^2-4ac 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式，通常用希腊字母“Δ”表示，即 $\Delta=b^2-4ac$.

当 $\Delta\geqslant 0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的实数根可写为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**求根公式**．求根公式表达了用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的结果．解一个具体的一元二次方程时，把各系数直接代入求根公式，这种解一元二次方程的方法称为**公式法**.

例 6 用公式法解下列方程：

（1）$x^2-4x-7=0$；　　　　（2）$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

解 （1）$a=1$，$b=-4$，$c=-7$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-7)=44>0.$$

方程有两个不等的实数根：