复变函数与积分变换

Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan

车军领 主编

山东大学出版社

复变函数与积分变换

车军领　主编

山东大学出版社

内容简介

本教材是根据国家教育委员会高等教育司1997〔146〕号文件《关于加强普通高等教育教材编写与选用管理的若干的意见》中关于教材编写的精神“编写教材，对学生负责，对社会负责；提倡精益求精，反对粗制滥造；倡导改革精神，树立精品意识”，结合复变函数与积分变换教学的基本要求编写的。本教材汲取了同类教材的优点，并注重知识的系统性和实用性，以适应不同专业和不同层次读者的要求。

本教材内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数表示法、留数及其应用、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换共八章。对于书中加 * 号的内容，读者可以根据不同的专业和要求选学。

本书可供高等院校非数学专业的理工类专业本科生选作教材，也可供广大工程技术人员作为参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/车军领主编. —济南：山东大学出版社，2017.4
ISBN 978-7-5607-5754-4

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①车…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材　Ⅳ.①O174.5　②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 085995 号

责任策划：唐　棣
责任编辑：宋亚卿
封面设计：张　荔

出版发行：山东大学出版社
社　址　山东省济南市山大南路 20 号
邮　编　250100
电　话　市场部(0531)88364466
经　销：山东省新华书店
印　刷：山东和平商务有限公司
规　格：787 毫米×1092 毫米　1/16
15 印张　347 千字
版　次：2017 年 4 月第 1 版
印　次：2017 年 4 月第 1 次印刷
定　价：32.00 元

前　言

本书是根据国家教育委员会高等教育司关于普通高等教育教材编写的意见和精神，依据高等学校工科数学教材编写的基本要求，结合作者多年的教学实践经验编写的。可供信息与计算科学、物理、光信息、热能、电气等各类理工科专业使用，也可供其他专业选用。

“复变函数与积分变换”不仅是理工科院校某些专业的一门重要的专业基础课，同时还是高等数学的后继课程。通过对本课程的学习，学生不仅能够学到复变函数与积分变换中的基本理论与工程技术中常用的数学方法，同时还可以巩固高等数学的基础知识，为后续学习专业课和进一步扩大知识面奠定基础。

本书的编写，注意了下列几点：

1. 与高等数学中平行的概念，如极限、连续、微分等，既指出其相似之处，更强调其不同之处，以免初学者疏忽。

2. 对一些基本定理和重要定理，从叙述、证明到推广，均注意了科学性和严密性；同时对有些理论的推导深入浅出，循序渐进，适合工科专业的特点。这既可以锻炼读者的思考能力和逻辑推理能力，同时还可以使读者举一反三、融会贯通，从而达到培养读者实际应用和创新能力的目的。

3. 本书不仅对解析函数在电学、流体力学等方面的应用作了简要介绍，也对积分变换在解微分方程、积分方程中的应用作了简明介绍，以使读者了解复变函数与积分变换在解决实际问题上的重要性。

4. 为了使知识体系完整与系统，也为了能给读者拓展新知识提供有力的工具，本书在编写当中适当增加了一些超出大纲的内容。本书每章均配有大量的例题和习题，有利于读者掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力。书的最后还配有习题参考答案，以方便读者自学。

5. 限于篇幅和工具知识，有些定理本书没有给出证明，对这部分内容，有兴趣进行更深层探讨的读者可以参考相关的资料。

使用本书作教材，大约需要 48 学时，大体可按 6、6、6、8、6、4、6、6 的顺序分配学时。根据专业的特点，教师可斟酌节选或删去一些次要及较深部分的内容，如辐角原理及应用、第 6 章等。

特别感谢山东大学出版社的大力支持，使得本书能尽快与读者见面。

限于编者水平，谬误之处仍然难免，敬请专家、同行以及广大读者批评指正。

编　者

2017 年 3 月于山东建筑大学

目　录

第1章 复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数.我们研究的主要对象是在某种意义下可导的复变函数,通常称为解析函数.为了建立这种解析函数的理论基础,在这一章中,我们首先介绍复数域与复平面的概念,然后再引入复平面上的区域以及复变函数的极限与连续等概念.为方便进一步研究解析函数的理论,在本章的最后我们还引入了复球面与无穷远点的概念.

1.1 复 数

1.1.1 复数

形如

$$z=x+\mathrm{i}y \text{ 或 } z=x+y\mathrm{i}$$

的数,称为**复数**,其中 x 和 y 是任意实数,i 满足关系式 $\mathrm{i}^2=-1$,称为**虚数单位**.电工学中习惯用 j 表示虚数单位,而不是用 i.

实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**,记为

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z$$

虚部为零的复数,就可以看作是实数,即 $x+\mathrm{i}\cdot 0=x$.因此,全体实数是全体复数的一部分.特别地,$0+\mathrm{i}\cdot 0=0$.

实部不为零的复数称为**虚数**.实部为零,但虚部不为零的复数称为**纯虚数**.因此,全体虚数也是全体复数的一部分.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等,是指它们的实部与实部相等,虚部与虚部相等,即

$$x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2$$

当且仅当

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2$$

因此,一个复数 $z=0$,当且仅当其实部和虚部都为 0.

复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为**互为共轭复数**,即 $x+\mathrm{i}y$ 是 $x-\mathrm{i}y$ 的共轭复数,同时 $x-\mathrm{i}y$ 也是 $x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数.若复数 $z=x+\mathrm{i}y$,则称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数,记作 $\bar{z}$,即

$$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}$$

1.1.2 复数的代数运算

对于这样定义的复数,我们必须规定其运算方法.由于实数是复数的特例,规定复数

运算的一个基本要求就是：复数运算法则用于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加(减)法和乘法定义如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.1}$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1.2}$$

并分别称以上两式的右端为复数 z_1 和 z_2 的**和**(**差**)与**积**.

容易验证，复数的加法满足**交换律**和**结合律**，复数的乘法运算遵守交换律和结合律，同时遵守乘法对于加法的**分配律**.

我们又称满足等式

$$z_2z=z_1 \quad (z_1\neq 0)$$

的复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 z_1 除以 z_2 的**商**，记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. 可以推得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.3}$$

全体复数并引进上述运算后就称为**复数域**，常用 **C** 表示. 实数域和复数域都是代数学中所研究的“域”的实例，即它们都对四则运算封闭. 与实数域不同的是，在复数域中不能规定复数像实数那样的大小关系. 事实上，若有像实数那样的大小关系，由于非零实数的平方和大于零，而 $\mathrm{i}\neq 0$ 时，则应该有 $\mathrm{i}^2>0$，即 $-1>0$，这显然不可能.

1.2 复数的几何表示

1.2.1 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 在本质上是由一对有序的实数 (x,y) 唯一确定的，(x,y) 称为复数 z 的**实数对形式**. 这样，就能建立起平面上的所有点和全体复数之间的一一对应关系. 换句话说，我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的平面上的点 (x,y) 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（见图 1.1).

由于 x 轴上的所有点的纵坐标 y 均为 0，即 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为**实轴**；而 y 轴上的非原点的点对应着纯虚数，故 y 轴称为**虚轴**. 表示全体复数 z 的平面就称为**复平面**或 **z 平面**. 复平面也常用 **C** 表示.

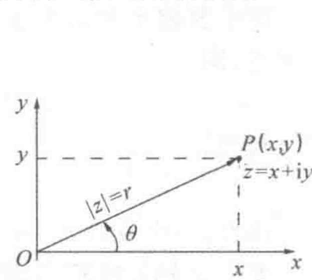

图 1.1

引进了复平面的概念后，我们就在“点”和“数”之间建立了联系. 为了借助于几何的语言研究复变函数的问题，以后我们不再区分“数”和“点”、“数集”和“点集”，即点“z”就是数“z”. 例如，我们说“点 $3+2\mathrm{i}$”，“顶点为 z_1,z_2,z_3 的三角形”，等等.

1.2.2　复数的模与辐角

在复平面上，复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应（复数 0 对应着零向量），因此复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（见图 1.1）. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**或**绝对值**，记为 $|z|$ 或 r. 因而有

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\ (\geqslant 0) \tag{1.4}$$

显然，$|z|=0$ 的充分必要条件是 $z=0$.

这里引进的复数的模的概念与实数的绝对值的概念是一致的. 由于复数的模是非负实数，所以能够比较大小. 同样，复数的实部、虚部也可以比较大小.

根据图 1.1，可以得到下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|$$

$$-|z|\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant|z|,\quad -|z|\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant|z| \tag{1.5}$$

$$z\bar{z}=|z|^2,\quad |z|=|\bar{z}| \tag{1.6}$$

根据复数的运算法则可知，复数的加、减法运算和相应向量的加、减法运算保持一致.

例如，设 $z=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$

由图 1.2 可以看出，z_1+z_2 所对应的向量就是 z_1 所对应的向量和 z_2 所对应的向量的和向量.

又如，将 z_1-z_2 表示成 $z_1+(-z_2)$，可以看出，z_1-z_2 所对应的向量就是 z_1 所对应的向量和 $(-z_2)$ 所对应的向量的和向量（见图 1.3）.

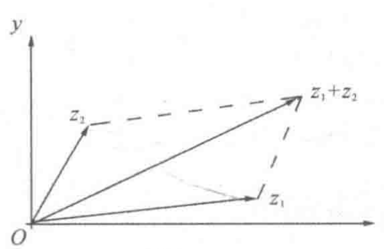

图 1.2

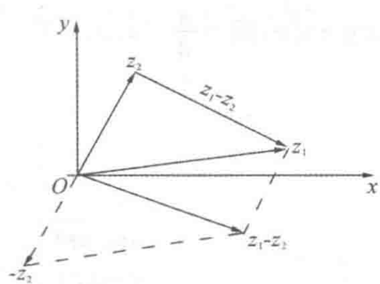

图 1.3

由图 1.3 可以看出，z_1-z_2 所对应的向量的长度，即复数 z_1-z_2 的模 $|z_1-z_2|$，它表示点 z_1 和 z_2 之间的距离，记为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2| \tag{1.7}$$

两个复数的差的几何意义非常重要，它可与解析几何中两点间的距离公式统一起来，即

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&=|(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)|\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\end{aligned}$$

因此，由图 1.2 及图 1.3，我们可以得出下面的不等式：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\ (\text{三角不等式}) \tag{1.8}$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2| \tag{1.9}$$

式(1.8)和式(1.9)中等号成立的几何意义是:复数 z_1 和 z_2 所表示的两个向量共线且同向,即 $z_1\neq 0, z_2\neq 0$ 时,$z_1=kz_2 (k>0)$.

用数学归纳法,可以得到推广了的三角不等式,即

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \tag{1.10}$$

表示复数 z 的位置,也可以借助于点 z 的极坐标 r(即复数 z 的模)和 θ 来确定(见图1.1).这里使极点与直角坐标系的原点重合,极轴与正实轴重合.

当 $z\neq 0$ 时,以正实轴为始边,以表示复数 z 的向量$\overrightarrow{OP}$为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的**辐角**(Argument),记为

$$\mathrm{Arg}\, z=\theta$$

这里有

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \tag{1.11}$$

可以看出,任意非零复数 z 都有无穷多个辐角.如果 θ_1 是其中的一个,那么

$$\mathrm{Arg}\, z=\theta_1+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.12}$$

式(1.12)给出了 z 的所有辐角,即 Arg z 表示复数 z 的所有辐角.在 $z(\neq 0)$的所有辐角中,我们把满足条件 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为 Arg z 的主值,或称为 z 的**主辐角**,记作 $\theta_0=\arg z$.故

$$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.13}$$

注意　当 $z=0$ 时,辐角无意义.

复数 $z(\neq 0)$的辐角主值 $\arg z$ 与反正切 Arctan $\frac{y}{x}$的主值 arctan $\frac{y}{x}$有下列关系(其中 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,而$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}\leqslant\frac{\pi}{2}$):

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases}$$

图 1.4 和图 1.5 给出了它们的关系.

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置关系是关于实轴对称的,因而有

$$|z|=|\bar{z}|,\quad \mathrm{Arg}\, z=-\mathrm{Arg}\,\bar{z}$$

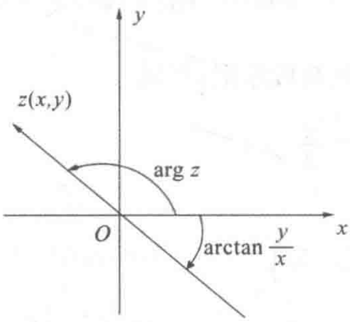

图 1.4

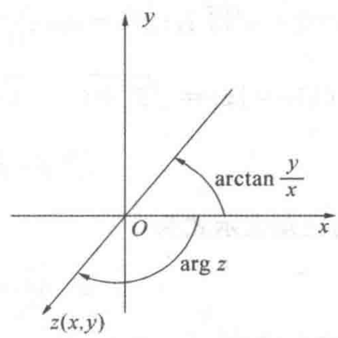

图 1.5

例 1.1 求 $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$ 和 $\mathrm{Arg}(-3-2\mathrm{i})$.

解 $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})+2k\pi$

$$=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$\mathrm{Arg}(-3-2\mathrm{i})=\arg(-3-2\mathrm{i})+2k\pi$

$$=\arctan\frac{-2}{-3}-\pi+2k\pi=\arctan\frac{2}{3}-\pi+2k\pi$$

$$=(2k-1)\pi+\arctan\frac{2}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例 1.2 已知流体在某点 P 的速度为 $v=-4+2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$,求其大小和方向.

解 大小:$|v|=|-6+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}|=\sqrt{(-6)^2+(2\sqrt{3})^2}=4\sqrt{3}$;

方向:$\arg v=\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{-6}+\pi=\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$.

根据直角坐标与极坐标之间的关系,可以得到

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

则我们还可以把 z 表示成下面的形式:

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.14}$$

再利用欧拉(Euler)公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,我们又可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.15}$$

我们分别称式(1.14)、式(1.15)为非零复数 z 的**三角形式**和**指数形式**,并称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数 z 的**代数形式**.

复数的这三种表示法可以相互转换,以适应讨论不同的问题时的需要,而且使用起来各有其方便.

当 $r=1$ 时,有

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

我们称模为 1 的复数为**单位复数**.

当 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ 时,有

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow r_1=r_2,\ \theta_1=\theta_2+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例 1.3 将下列复数化为三角形式与指数形式:

(1)$z=2-\sqrt{12}\,\mathrm{i}$;(2)$z=\sin\dfrac{\pi}{10}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{10}$;(3)$z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$.

解　(1)$r=|z|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{12})^2}=4$. 由于 z 在第四象限,所以

$$\theta=\arctan\frac{-\sqrt{12}}{2}=-\frac{\pi}{3}$$

因此,z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$$

(2)$r=|z|=\sqrt{\left(\sin\dfrac{\pi}{10}\right)^2+\left(\cos\dfrac{\pi}{10}\right)^2}=1$. 由于 z 在第一象限,所以

$$\theta=\arctan\frac{\cos\dfrac{\pi}{10}}{\sin\dfrac{\pi}{10}}=\arctan\left(\cot\frac{\pi}{10}\right)=\frac{2}{5}\pi$$

因此,z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{2}{5}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{5}\pi$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}$$

由于该复数的实部和虚部都是用三角函数的形式给出的,因此,我们还可以利用三角函数的恒等变换给出它的三角形式和指数形式:

$$\begin{aligned}z&=\sin\frac{\pi}{10}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)\\&=\cos\frac{2}{5}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{5}\pi=\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}\end{aligned}$$

(3)由于 $0<\theta<\pi$,则 $0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$. 利用三角函数的恒等变换可得

$$\begin{aligned}z&=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]\\&=2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

再如,下列特殊复数的三角形式和指数形式分别为

$\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$;

$-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$;

$$-3i=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3e^{-\frac{\pi}{2}i};$$

$$1=\cos 0+i\sin 0=e^{0\cdot i}.$$

1.3　复数的乘幂与方根

1.3.1　乘积与商

设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

即

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.16}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{1.17}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2 \tag{1.18}$$

式(1.16)说明，z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量拉伸(或缩短)$r_2=|z_2|$倍，然后再旋转一个角度 θ_2 得到的. 特别地，当$|z_2|=1$ 时，只需把 z_1 所对应的向量旋转一个角度 θ_2 就行了(见图 1.6). 也就是说，以单位复数乘任何复数，就相当于将该复数所对应的向量旋转一个角度.

例如：iz 就相当于把 z 所对应的向量按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$；$-z$ 相当于把 z 所对应的向量按逆时针旋转 π；当 $\arg z_2=0$ 时，向量的乘法变成了仅仅是将向量拉伸(缩短).

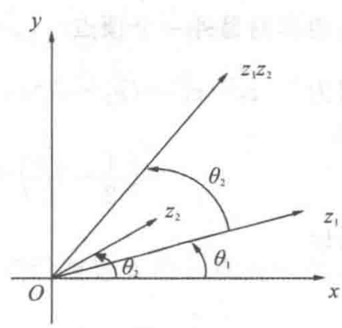

图 1.6

注 1　在复平面上，一直线绕其上面一点旋转，可有两种旋转方向：一种是"逆时针"的，一种是"顺时针"的. 我们规定按逆时针方向旋转的角度为正，按顺时针方向旋转的角度为负.

注 2　当把复数看作向量时，复数的乘法既不同于向量的数量积，也不同于向量的向量积.

注 3　关于等式(1.18)，两边各是无穷多个数(角度)的集合. 例如，设 $z_1=-1$，$z_2=i$，则 $z_1z_2=-i$，而

$$\mathrm{Arg}\, z_1=\{\pi+2m\pi, m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

$$\mathrm{Arg}\, z_2=\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\left\{\frac{3}{2}\pi+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$$

式(1.18)意味着，在等式左边取出一个数值(相当于取定一个 k 值)，等式右边也可以相

应地分别找出 m 与 n 的值，等式右边的数的和等于左边的值；反之亦然.

如果用指数形式来表示复数：$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.19}$$

由此，我们可以将两个复数的乘积推广为 n 个复数的乘积. 如果

$$z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

则

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\\&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\end{aligned} \tag{1.20}$$

根据复数的商的定义，当 $z_2\neq0$ 时，有 $z_1=\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2$，由式(1.17)和式(1.18)，可得

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}\,z_1=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Arg}\,z_2$$

即

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|,\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.21}$$

如果用指数形式表示复数：$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq0) \tag{1.22}$$

例 1.4　已知正三角形的两个顶点分别为 $z_1=1$，$z_2=2+\mathrm{i}$，求它的另外一个顶点.

解　如图 1.7 所示，由复数乘法的几何意义可知，将向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转$\dfrac{\pi}{3}$(或$-\dfrac{\pi}{3}$)，其终点(z_3 或 z_3')就是正三角形的另外一个顶点.

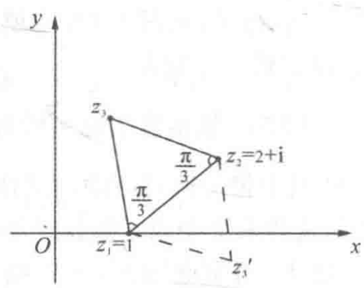

图 1.7

因为　$$\begin{aligned}z_3-z_1&=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}\end{aligned}$$

所以

$$z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

类似可得 $z_3'=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

1.3.2　复数的乘幂与方根

作为复数乘法的特例，n个相同的复数z的乘积，称为复数z的n**次幂**，记作z^n. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.23}$$

从而有

$$|z^n|=|z|^n,\quad \mathrm{Arg}\,z^n=n\mathrm{Arg}\,z$$

如果我们定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$，那么当 n 为负整数时，式(1.23)也成立.

特别地，当 $|z|=r=1$ 时，可得到棣莫佛(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

设 $w^n=z$，其中 z 是已知的复数，则称 w 是复数 z 的 n 次方根，记为$\sqrt[n]{z}$，即

$$w=\sqrt[n]{z}\quad(n\geqslant 2,\text{且 } n \text{ 为整数})$$

我们即将看到，当 $z\neq 0$ 时，会有 n 个不同的 w 与之对应. 下面我们来求它们.

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

从而可以得到以下两个方程：

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

解得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

从而有

$$|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|},\quad \operatorname{Arg}\sqrt[n]{z}=\frac{\operatorname{Arg} z}{n}$$

因此，z 的 n 次方根为

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\theta+2k\pi}{n}}\tag{1.24}$$

或者

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\cdot\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\tag{1.25}$$

这里，表面上 k 要取遍所有的整数，但实际上，只要 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，就可以得到复数 z 的 n 个不同的 n 次方根. 所以 k 只取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 即可. 记号$\sqrt[n]{z}$和$(\sqrt[n]{z})_k$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$是一致的.

现在我们把式(1.25)表示为

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\cdot w_0$$

其中 $w_0=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$. 由复数乘法的几何意义可知，要在复平面上表示复数 z 的 n 次方根的不同值 w_k，可由 w_0 依次绕着原点旋转

$$\frac{2}{n}\pi,\quad 2\cdot\frac{2}{n}\pi,\quad 3\cdot\frac{2}{n}\pi,\quad \cdots,\quad (n-1)\cdot\frac{2}{n}\pi$$

得到. 它们沿中心在原点、半径为$\sqrt[n]{r}$的圆周均匀地分布着(图 1.8 是 $n=6$ 的情形).

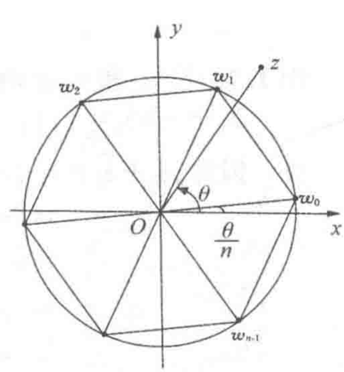

图 1.8

例 1.5　计算 $\sqrt[4]{-16}$.

解　因为 $-16=16(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$，则

$$\sqrt[4]{-16}=2\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\right],k=0,1,2,3$$

当 $k=0$ 时，$w_0=\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$；

当 $k=1$ 时，$w_1=\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$；

当 $k=2$ 时，$w_2=\sqrt{2}(-1-\mathrm{i})$；

当 $k=3$ 时，$w_3=\sqrt{2}(1-\mathrm{i})$.

1.3.3 共轭运算

设 $z=x+\mathrm{i}y$，其共轭复数为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，由复数的运算，我们容易验证下面的公式：

(1) $\overline{(\bar{z})}=z$；

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

(3) $|z|^2=z\bar{z}$，$\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$；

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$ 表示对复数 $a,b,c,\cdots$ 的任一有理运算，则

$$\overline{R(a,b,c,\cdots)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$$

例 1.6　求复数 $w=\dfrac{1+z}{1-z}(z\neq1)$ 的实部、虚部和模.

解　因为

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}}=\frac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}$$

$$=\frac{1-|z|^2+2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$$

故

$$\mathrm{Re}\,w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\quad \mathrm{Im}\,w=\frac{2\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$$

又因为

$$|w|^2=w\bar{w}=\frac{1+z}{1-z}\cdot\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}=\frac{1+z\bar{z}+z+\bar{z}}{|1-z|^2}$$

$$=\frac{1+|z|^2+2\mathrm{Re}\,z}{|1-z|^2}$$

故

$$|w|=\frac{\sqrt{1+|z|^2+2\mathrm{Re}\,z}}{|1-z|}$$

例 1.7　设 z_1 和 z_2 是两个复数，试证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

证　因为

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\end{aligned}$$

由所证等式及不等式

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1\overline{z_2}|=|z_1||\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$$

可以得到

$$|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

故有三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

1.4 复平面上的点集

同实变数一样，每一个复变数都有自己的变化范围，称为**点集**. 例如，复平面上的线段、直线和曲线等都是点集. 今后我们研究的对象——解析函数，其定义域和值域也都是某个点集.

1.4.1 平面点集的几个基本概念

定义 1.1 由不等式 $|z-z_0|<\rho$ 所确定的点集，即以 z_0 为中心，以 ρ 为半径的圆内部的点所成的点集称为点 z_0 的 **ρ 邻域**，常记为 $N_\rho(z_0)$；并称 $0<|z-z_0|<\rho$ 为点 z_0 的**去心 ρ 邻域**，常记为 $N_\rho(z_0)-\{z_0\}$. 它们是复数列和复变函数论的基础.

定义 1.2 设 E 是一平面点集，若平面上一点 z_0(不必属于 E)的任意邻域都有 E 的无穷多个点，则称 z_0 是 E 的**聚点或极限点**；若 z_0 属于 E，但不是 E 的聚点，则称 z_0 是 E 的**孤立点**，即我们一定能找到 z_0 的某个邻域，使得该邻域内的点，除了 z_0 以外，再没有属于 E 的点；若 z_0 不属于 E，又不是 E 的聚点，则称 z_0 是 E 的**外点**.

E 的全部聚点所成的点集用 E' 表示.

定义 1.3 若点集 E 的每一个聚点都属于 E，即 $E'\subset E$，则称 E 是**闭集**；设点 z_0 是 E 中任意一点，如果存在点 z_0 的 ρ 邻域全含于 E 内，则称 z_0 是 E 的**内点**(见图 1.9)；若点集 E 的所有点都是它的内点，则称点集 E 是**开集**；若在 z_0 的任意邻域都有属于点集 E 和不属于 E 的点，则称 z_0 是 E 的**边界点**；点集 E 的所有边界点所组成的点集称为 E 的**边界**，记为 ∂E.

显然，点集 E 的孤立点必是 E 的边界点.

定义 1.4 若有正数 M，对于 $\forall z\in E$，都满足不等式 $|z|\leqslant M$，即点集 E 全含于一圆之内，则称 E 为**有界集**，否则称 E 为**无界集**.

定义 1.5 具备下面性质的非空点集 D 称为**区域**：

(1) D 为开集；

(2) D 中任意两点可以用全在 D 中的折线连接(见图 1.9).

即所谓的区域就是连通的开集.

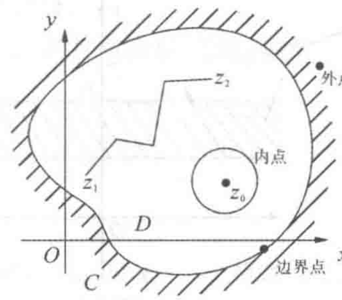

图 1.9

定义 1.6 区域 D 加上它的边界 C 所组成的点集称为**闭域**，记为

$$\overline{D}=D+C$$

定义 1.7 点集 E 的直径为