



普通高等教育“十三五”规划教材  
全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

# 医用高等数学学习指导

姚莉 罗亚玲 梁波 主编



科学出版社



普通高等教育“十三五”规划教材

全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

# 医用高等数学学习指导



姚莉 罗亚玲 梁波 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本学习指导与科学出版社出版的由罗亚玲、姚莉主编的教材《医用高等数学》配套，全书共十章，每章五个板块。在书的最后我们附上了教材中医用高等数学常用的数学公式和数学名词的汉英对照，以便学生在学习过程中使用。

本书可供医药院校本科生使用。

### 图书在版编目 ( CIP ) 数据

---

医用高等数学学习指导 / 姚莉, 罗亚玲, 梁波主编. —北京: 科学出版社, 2018.8

普通高等教育“十三五”规划教材·全国普通高等教育基础医学类系列配套教材

ISBN 978-7-03-058415-1

I. ①医… II. ①姚… ②罗… ③梁… III. ①医用数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第171227号

---

责任编辑: 王 颖 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 赵 博 / 封面设计: 陈 敬

版权所有, 违者必究。未经本社许可, 数字图书馆不得使用

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市密东印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018年8月第一版 开本: 787×1092 1/16

2018年8月第一次印刷 印张: 13

字数: 300 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 《医用高等数学学习指导》

## 编写委员会

主 编

姚莉 罗亚玲 梁 波

副 主 编

万里平

---

编 委

(以姓氏笔画为序)

万里平(重庆医科大学)

罗亚玲(重庆医科大学)

姚 莉(重庆医科大学)

梁 波(重庆医科大学)

# 目 录

## 前言

<b>第一章 函数、极限与连续</b>			<b>1</b>
一、知识点精要	1	四、教材习题同步解析	7
二、教学基本要求	4	五、自测试题	19
三、典型例题解析	4	附: 自测试题参考答案	21
<b>第二章 导数与微分</b>			<b>22</b>
一、知识点精要	22	四、教材习题同步解析	29
二、教学基本要求	25	五、自测试题	43
三、典型例题解析	26	附: 自测试题参考答案	45
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b>			<b>47</b>
一、知识点精要	47	四、教材习题同步解析	53
二、教学基本要求	49	五、自测试题	62
三、典型例题解析	50	附: 自测试题参考答案	64
<b>第四章 不定积分</b>			<b>65</b>
一、知识点精要	65	四、教材习题同步解析	71
二、教学基本要求	66	五、自测试题	77
三、典型例题解析	67	附: 自测试题参考答案	78
<b>第五章 定积分</b>			<b>79</b>
一、知识点精要	79	四、教材习题同步解析	84
二、教学基本要求	81	五、自测试题	89
三、典型例题解析	81	附: 自测试题参考答案	91

## 第六章 多元函数微积分 92

一、知识点精要	92	四、教材习题同步解析	101
二、教学基本要求	97	五、自测试题	109
三、典型例题解析	97	附：自测试题参考答案	111

## 第七章 微分方程 112

一、知识点精要	112	四、教材习题同步解析	122
二、教学基本要求	116	五、自测试题	134
三、典型例题解析	116	附：自测试题参考答案	135

## 第八章 级数理论 138

一、知识点精要	138	四、教材习题同步解析	144
二、教学基本要求	139	五、自测试题	156
三、典型例题解析	139	附：自测试题参考答案	157

## 第九章 概率论基础 159

一、知识点精要	159	四、教材习题同步解析	168
二、教学基本要求	161	五、自测试题	172
三、典型例题解析	161	附：自测试题参考答案	173

## 第十章 线性代数基础 174

一、知识点精要	174	四、教材习题同步解析	182
二、教学基本要求	177	五、自测试题	191
三、典型例题解析	177	附：自测试题参考答案	194

附录 1 医用高等数学常用数学公式	197	附录 2 常用数学名词汉英对照	199
-------------------	-----	-----------------	-----

# 函数、极限与连续

## 一、知识点精要

### (一) 函数

#### 1. 函数的概念

设有两个变量  $x$ 、 $y$ ，如果变量  $x$  在其变化范围  $D$  内任取确定的数值时，按照某个对应法则  $f$ ，变量  $y$  总有唯一确定的值与之对应，则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数。记为  $y = f(x)$ 。 $x$  称为自变量， $y$  称为因变量， $D$  称为函数的定义域， $f$  表示由  $x$  确定  $y$  的对应法则，全体函数值组成的集合称为函数的值域。

#### 2. 函数的主要性质

(1) 有界性：设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ，数集  $I \subset D$ 。存在某正数  $K$ ，使得对任何  $x \in I$ ，都有  $|f(x)| \leq K$ ，则称函数  $f(x)$  在  $I$  上有界。

(2) 奇偶性：设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ， $D$  是对称于原点的数集。如果对任何  $x \in D$ ，有  $f(-x) = -f(x)$  (或  $f(-x) = f(x)$ )，则称函数  $f(x)$  为奇函数(或偶函数)。

(3) 单调性：设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ，区间  $I \subset D$ 。如果对区间  $I$  中任意两个数  $x_1$ 、 $x_2$ ，当  $x_1 < x_2$  时，总有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ )，则称函数  $f(x)$  在区间  $I$  上单调递增(或单调递减)。

(4) 周期性：设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ 。如果存在某个正数  $T$ ，使得对任何  $x \in D$ ，都有  $f(x \pm T) = f(x)$ ，则称函数  $f(x)$  为周期函数，并称  $T$  为  $f(x)$  的周期。

#### 3. 复合函数

设函数  $y = f(u)$ ， $u \in E$ ， $u = \varphi(x)$ ， $x \in D$ 。 $D^*$  表示  $D$  中使得  $y = f(u)$  有意义的全体  $x$  的非空集合，即  $D^* = \{x | u = \varphi(x) \in E, x \in D\} \neq \emptyset$ 。若对于  $D^*$  中任何一个  $x$ ，通过函数  $u = \varphi(x)$  对应  $E$  中唯一的  $u$ ，又通过函数  $y = f(u)$  对应唯一的  $y$  值，则对每一个  $x \in D^*$ ，变量  $y$  都有唯一确定的值与之对应，从而得到一个定义在集合  $D^*$  上的函数，记为  $y = f[\varphi(x)]$ ， $x \in D^*$ ，称该函数为由函数  $y = f(u)$  与函数  $u = \varphi(x)$  复合而成的复合函数。

其中,称  $y=f(u)$  为外函数,  $u=\varphi(x)$  为内函数,  $u$  为中间变量.

#### 4. 基本初等函数与初等函数

常数函数  $y=C$  ( $C$  是常数)、幂函数  $y=x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ )、指数函数  $y=a^x$  ( $a>0, a \neq 1$ )、对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0, a \neq 1$ )、三角函数以及反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算步骤得到的、用一个式子表示的函数,称为初等函数.

## (二) 极限

### 1. 极限的概念

(1) 函数极限的定义: 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某空心邻域内有定义,  $A$  是某确定常数. 若当自变量  $x$  趋于  $x_0$  时,  $f(x)$  无限接近于常数  $A$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x$  趋于  $x_0$  时以  $A$  为极限, 并称  $f(x)$  在  $x$  趋于  $x_0$  时收敛于  $A$ . 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ . 若当自变量  $x$  趋于  $x_0$  时,  $f(x)$  不以任何常数为极限, 则称函数  $f(x)$  在  $x$  趋于  $x_0$  时发散.

(2) 左极限和右极限的定义: 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个左邻域  $(x_0 - \delta, x_0)$  (右邻域  $(x_0, x_0 + \delta)$ ) ( $\delta > 0$ ) 内有定义,  $A$  是某确定常数. 若  $x$  从  $x_0$  左(右)侧趋于  $x_0$  时,  $f(x)$  无限接近于常数  $A$ , 则称  $A$  为函数  $f(x)$  在  $x$  从  $x_0$  左(右)侧趋于  $x_0$  时的左(右)极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A).$$

(3) 充分必要条件:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ .

### 2. 极限的计算

(1) 极限的四则运算法则: 设  $\lim f(x)$  与  $\lim g(x)$  都存在, 则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x),$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x),$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0).$$

(2) 两个重要极限: ①  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ( $x$  为弧度数); ②  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

## (三) 无穷小与无穷大

### 1. 无穷小与无穷大的定义

(1) 无穷小的定义: 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = 0$ , 则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

(2) 无穷大的定义: 若  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} |f(x)| = +\infty$ , 则称函数  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大.

### 2. 无穷小与无穷大的关系

在同一极限过程中, 若  $\lim f(x) = 0$ , 则  $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$ ; 若  $\lim |f(x)| = +\infty$ , 则  $\lim \frac{1}{f(x)} = 0$ .



## 3. 无穷小的性质

- (1) 有限个无穷小的代数和是无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积是无穷小;
- (3) 有界函数变量与无穷小的乘积是无穷小.

## 4. 无穷小与函数极限的关系

在同一极限过程中,  $\lim f(x) = A$  的充分必要条件是  $f(x) = A + \alpha$  ( $\lim \alpha = 0$ ).

## 5. 无穷小阶的比较

设在同一极限过程中,  $f(x)$ ,  $g(x)$  都是无穷小. 若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 则称在这个极限过程中

中  $f(x)$  为  $g(x)$  的高阶无穷小, 亦称  $g(x)$  为  $f(x)$  的低阶无穷小, 记为  $f(x) = o(g(x))$ ; 若

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = k$  ( $k \neq 0$ ), 则称在这个极限过程中  $f(x)$  与  $g(x)$  为同阶无穷小, 记为

$f(x) = O(g(x))$ . 特别地, 当  $k=1$  时, 称  $f(x)$  与  $g(x)$  为等价无穷小, 记为  $f(x) \sim g(x)$ .

## 6. 等价无穷小替代定理

若在某极限过程中  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $g_1(x) \sim g_2(x)$ , 且  $\lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = A$ , 则  $\lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$ .

## (四) 函数的连续性

## 1. 函数连续的概念

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续. 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  内每一点处都连续, 则称  $f(x)$  在区间  $I$  内连续.

若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ), 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  处左(右)连续.

## 2. 连续的充分必要条件

函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续的充分必要条件是  $f(x)$  在点  $x_0$  处左、右都连续.

## 3. 间断点的概念

若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  不满足以下三个条件至少之一:

- (1)  $f(x)$  在点  $x_0$  有定义;
- (2) 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

则称点  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

间断点分为以下两类:

第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点. 包括可去间断点(左、右极限相等的间断点)和跳跃间断点(左、右极限不相等的间断点).

第二类间断点: 左、右极限至少一个不存在的间断点.

#### 4. 连续函数的性质及初等函数的连续性

(1) 连续函数的四则运算性质: 两个连续函数的和、差、积、商(若分母不为 0)是连续函数.

(2) 复合函数的连续性: 若  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  处连续,  $y = f(u)$  在点  $u_0 = \varphi(x_0)$  处连续, 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x_0$  处连续.

(3) 反函数的连续性: 单调连续函数的反函数是连续函数.

(4) 初等函数的连续性: 初等函数在其定义域内连续.

## 二、教学基本要求

- 理解函数、复合函数的概念, 了解函数的主要性质.
- 理解极限的概念.
- 熟练掌握极限的计算, 掌握用两个重要极限求极限的方法.
- 理解无穷小与无穷大的概念, 了解无穷小“阶”的概念, 会运用等价无穷小的替代求极限.
- 理解函数在一点连续的概念, 了解初等函数的连续性.
- 了解间断点的概念, 并会判断间断点的类型.

## 三、典型例题解析

### (一) 复合函数

**例 1** 设函数  $f(u)$  的定义域为  $(0, 1)$ , 求函数  $f(\ln x)$  的定义域.

**解** 由于函数  $f(u)$  的定义域为  $(0, 1)$ , 要使  $f(\ln x)$  有意义, 须有  $0 < \ln x < 1$ , 解得  $x \in (1, e)$ . 故函数  $f(\ln x)$  的定义域为  $(1, e)$ .

**例 2** 已知  $f(x^2 - 4) = \lg \frac{x^2}{x^2 - 8}$ , 求函数  $f(x)$  的定义域.

**解** 令  $x^2 - 4 = u$ , 则  $f(u) = \lg \frac{u+4}{u-4}$ . 要使  $f(u)$  有意义, 必须  $\frac{u+4}{u-4} > 0$ , 则  $u < -4$  或  $u > 4$ . 又  $u = x^2 - 4 \geq -4$ . 所以  $f(x)$  的定义域为  $(4, +\infty)$ .

### (二) 极限

1. 利用分子或分母有理化求极限

**例 3** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 1}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}.$$

解 (1) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + 1})}{3n - 1} = 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{8}{3}.$

(2) 原式 =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{2x+3} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{2x+3} + 3)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - 6)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{3(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{3} + 3}.$

2. 先求和、再求极限

例 4 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2n - 1) - 2n}{n - 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - 1} \right).$$

解 (1)  $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2n - 1) - 2n = [1 + 3 + \cdots + (2n - 1)] - 2(1 + 2 + \cdots + n)$   
 $= \frac{n \cdot 2n}{2} - 2 \cdot \frac{n(1 + n)}{2} = -n,$

故

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} - 1} = -1.$$

(2) 由于

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right),$$

故

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

3. 利用两个重要极限求极限

例 5 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 \sin \frac{2}{n}}{\sqrt{3n^2 - 1}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = 1;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = e.$$

解 (1) 原式 =  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2}{n\sqrt{3n^2 - 1}} \cdot \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n}{\sqrt{3n^2 - 1}} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 2\sqrt{3}.$

$$(2) \text{ 原式 } \stackrel{1-x=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} t \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \frac{\pi t}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}} \cdot \cos \frac{\pi t}{2} = \frac{2}{\pi};$$

$$(3) \text{ 原式 } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \cdot \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = e \cdot e^{-1} = 1;$$

$$(4) \text{ 原式 } = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]} = e^{0 \cdot \ln e} = 1.$$

例6 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$  当  $x \rightarrow 0$  时  $f(x)$  极限是否存在.

解  $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ,  $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ .  $f(0-0) \neq f(0+0)$ , 所以当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  极限不存在.

#### 4. 利用等价无穷小代换求极限

例7 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}$ .

解 由于  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \rightarrow 0$ ,  $\tan(\sin x) \sim \sin x$ ;  $\tan x \rightarrow 0$ ,  $\sin(\tan x) \sim \tan x$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

#### 5. 其他方法求极限

例8 若  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b-4}{x-2} = 4$ , 求  $a, b$ .

解 由于  $x \rightarrow 2$  时,  $x-2$  为无穷小, 而  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b-4}{x-2} = 4$ , 故  $x \rightarrow 2$  时  $ax+b-4$  必为无穷小, 即

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax+b-4) = 2a+b-4 = 0,$$

$$b-4 = -2a.$$

将上式代入原极限, 有

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{x-2} = a = 4,$$

故

$$a = 4, b = 0.$$

### (三) 分段函数的连续性

例9 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^{ax} + b, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{a \sin x}{x} - b, & x < 0, \end{cases}$   $a, b$  是常数. 试讨论  $a, b$  为何值时,  $f(x)$

在其定义域内连续.

解  $f(x)$  的定义域是  $(-\infty, +\infty)$ . 由初等函数的连续性知, 在非分段点  $x \neq 0$  处  $f(x)$  是连续的. 现在讨论其在分段点  $x = 0$  处的连续性, 为此需考察其左、右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{a \sin x}{x} - b \right) = a - b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{ax} + b) = 1 + b,$$

又  $f(0) = 1$ . 要使  $f(x)$  在点  $x = 0$  连续, 必须  $\begin{cases} a - b = 1, \\ 1 + b = 1, \end{cases}$  则  $a = 1, b = 0$ .

### (四) 求函数的间断点并判别类型

例10 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \cdot x$  的连续性. 若有间断点, 判别其类型.

解  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \cdot x = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \text{ 在 } x \neq \pm 1 \text{ 处, } f(x) \text{ 连续.} \\ -x, & |x| > 1. \end{cases}$

在  $x = 1$  处,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1$ , 因此  $x = 1$  为第一类间断点(跳跃);

在  $x = -1$  处,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ , 因此  $x = -1$  也为第一类间断点(跳跃).

## 四、教材习题同步解析

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1);$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} + \arcsin \frac{x-1}{5};$$

$$(3) y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}};$$

$$(4) y = \frac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}.$$

解 (1) 要使函数有意义, 必须  $\begin{cases} 1-x > 0, \\ 3x+1 > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x < 1, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$  所以, 该函数的定义域是  $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ .

(2) 要使函数有意义, 必须  $\begin{cases} 25-x^2 > 0, \\ \left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -5 < x < 5, \\ -4 \leq x \leq 6. \end{cases}$  所以, 该函数的定义域是  $[-4, 5)$ .

(3) 要使函数有意义, 必须  $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 + \frac{1}{x} \neq 0, \\ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ 1 + \frac{1}{x} \neq -1, \end{cases}$  故  $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$  所以, 该函数的定

义域是  $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$ .

(4) 要使函数有意义, 必须  $\begin{cases} 3x-x^2 \geq 0, \\ |x-1|-1 \neq 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$  所以, 该函数的定义域是

$(0, 2) \cup (2, 3]$ .

2. 已知函数  $f(x)$  的定义域是  $[0, 4]$ , 求函数  $y = f(x+3) + f(x^2)$  的定义域.

解 由于  $f(x)$  的定义域是  $[0, 4]$ , 所以  $\begin{cases} 0 \leq x+3 \leq 4, \\ x^2 \leq 4, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -3 \leq x \leq 1, \\ -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$  所求定义域为  $[-2, 1]$ .

3. 设函数  $f(\log_a x) = \sqrt{x}$ , 求  $f(x)$  的表达式及其定义域.

解 令  $\log_a x = u$ , 则  $x = a^u$ , 代入函数得  $f(u) = \sqrt{a^u} = a^{\frac{u}{2}}$ ,  $u \in (-\infty, +\infty)$ . 故  $f(x) = a^{\frac{x}{2}}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

4. 已知  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$ , 求  $f(x)$ .

解  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ ,  $x \neq \pm\sqrt{2}$ .

5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2, & x > 2, \end{cases}$  求  $f(x)$  的定义域以及函数值  $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $f\left[f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ .

解 定义域为  $[0, +\infty)$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ ,  $f\left[f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$ .

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$  求  $f(x)$  的定义域, 函数值  $f(0)$ ,  $f(1)$ , 并作出其图像.

解 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 0$ . 图像略.

7. 判别下列函数的奇偶性:

(1)  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ ;

(2)  $f(x) = x^2 \cos x$ ;

(3)  $f(x) = x^2 + \sin x$ ;

(4)  $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x < 0, \\ x(1+x), & x > 0. \end{cases}$

解 (1)  $f(-x) = \ln[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)] = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \ln \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}$   
 $= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -f(x)$ , 奇函数.

(2) 偶函数(解略).

(3) 既非奇函数, 也非偶函数(解略).

(4) 奇函数(解略).

8. 函数  $y = \cos^2 x$  是否是周期函数? 若是, 求出其周期.

解  $y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  是周期函数, 周期为  $k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

9. 判别下列函数在指定区间上的有界性:

(1)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (0, 1)$ ;

(2)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ ;

(3)  $y = x^3$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ ;

(4)  $y = x^3$ ,  $x \in [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ ;

(5)  $y = \tan x$ ,  $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

(6)  $y = \ln x$ ,  $x \in (0, 1)$ ;

(7)  $y = \frac{1}{\sin x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

(8)  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

解 (1) 无界; (2) 有界; (3) 无界; (4) 有界; (5) 无界; (6) 无界; (7) 无界; (8) 有界.

10. 将方程  $\lg(x+1) + \lg(y-1) = 2$  中的隐函数化成  $y = f(x)$  的形式.

解  $\lg(x+1) + \lg(y-1) = \lg(x+1)(y-1) = \lg 100$ ,  $(x+1)(y-1) = 100$ , 则  $y = \frac{100}{x+1} + 1$ .

11. 以下各组函数能否复合为一个函数? 若能, 写出复合函数表达式.

(1)  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = x - x^2$ ;

(2)  $y = \ln u$ ,  $u = \sin x - 1$ ;

(3)  $y = e^u$ ,  $u = \tan v$ ,  $v = \frac{1}{x}$ ;

(4)  $y = \frac{1}{1+u}$ ,  $u = \frac{1}{1+v}$ ,  $v = \frac{1}{x}$ .

解 (1)  $y = \sqrt{x-x^2}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

(2) 内函数的值域  $[-2, 0]$  与外函数的定义域  $(0, +\infty)$  交集为空, 该组函数不能复合.

$$(3) y = e^{\tan \frac{1}{x}}, x \neq 0, x \neq \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(4) y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}, x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}.$$

12. 分解下列复合函数的结构:

$$(1) y = e^{-x};$$

$$(2) y = (a + bx^n)^m;$$

$$(3) y = \sin\left(x + \frac{1}{x}\right);$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}};$$

$$(5) y = \ln \sin e^{x+1};$$

$$(6) y = (\arcsin \sqrt{1-x^2})^2.$$

解 (1)  $y = e^u, u = -x;$

(2)  $y = u^m, u = a + bx^n;$

(3)  $y = \sin u, u = x + \frac{1}{x};$

(4)  $y = u^{\frac{1}{2}}, u = x + \sqrt{v}, v = x + \sqrt{x};$

(5)  $y = \ln u, u = \sin v, v = e^t, t = x + 1;$

(6)  $y = u^2, u = \arcsin v, v = \sqrt{t}, t = 1 - x^2.$

13. 若  $\varphi(t) = t^3 + 1$ , 求  $\varphi(x^2)$ ,  $[\varphi(x)]^2$ ,  $\varphi[\varphi(x)]$  及  $\varphi\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]$ .

解  $\varphi(x^2) = x^6 + 1, [\varphi(x)]^2 = (x^3 + 1)^2, \varphi[\varphi(x)] = (x^3 + 1)^3 + 1, \varphi\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right] = \left(\frac{1}{x^3 + 1}\right)^3 + 1.$

14. 求下列函数的反函数:

(1)  $y = e^{2x}, x \in (-\infty, +\infty);$

(2)  $y = \frac{x+1}{x-1}, x \neq 1;$

(3)  $y = \sqrt{x^2 - 1}, x \in [1, +\infty);$

(4)  $y = \sin 2x, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$

解 (1)  $y = \frac{1}{2} \ln x, x \in (0, +\infty);$

(2)  $y = \frac{x+1}{x-1}, x \neq 1;$

(3)  $y = \sqrt{x^2 + 1}, x \in [0, +\infty);$

(4)  $y = \frac{1}{2} \arcsin x, x \in [-1, 1].$

15. 求函数  $f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = \frac{x}{|x|}$  当  $x \rightarrow 0$  时的左、右极限. 它们在  $x \rightarrow 0$  时极限是否存在?

解  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存

在;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x),$$



$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  不存在.

16. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (|x| + 1);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (-|\operatorname{sgn} x|).$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x^2} = -1;$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (|x| + 1) = 1;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (-|\operatorname{sgn} x|) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

17. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x-2, & |x| > 1, \end{cases}$  试讨论  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$ . 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在;

又  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  也不存在.

18. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{3n^2 + 5n - 1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(\sin x - \cos x - x^2);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{x+2}{1-x^3} \right);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(11) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x + 1} - 1}{\Delta x};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2}.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 3 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = 3;$