高等院校经济管理核心课程精品教材
普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材
上海财经大学优秀教材一等奖

线性代数

第四版

LINEAR ALGEBRA

黄振耀 编著

本书内容编排合理，重点突出，由浅入深，通俗易懂
充分体现本课程的系统性、科学性和实用性的要求
例题丰富，每章章末设计有大量习题，有利于学生练习

上海财经大学出版社
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

高等院校经济管理核心课程精品教材
普通高等教育“十三五”应用型本科规划教材
上海财经大学优秀教材一等奖

线性代数 第四版

LINEAR ALGEBRA

黄振耀 编著

上海财经大学出版社
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/黄振耀编著.—4版.—上海:上海财经大学出版社,2018.1

(高等院校经济管理核心课程精品教材)

ISBN 978-7-5642-2928-3/F·2928

Ⅰ.①线… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第013363号

□ 责任编辑 王 芳

□ 封面设计 杨雪婷

XIANXING DAISHU

线 性 代 数

(第四版)

黄振耀 编著

上海财经大学出版社出版发行

(上海市中山北一路369号 邮编2004083)

网 址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海叶大印务发展有限公司印刷装订

2018年1月第4版 2018年1月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 13印张 333千字

印数:18 001—22 000 定价:39.00元

前　言

线性代数是高等院校经济管理类专业的基础课之一。它是在经济管理、经济数量分析、质量控制和运筹学中有着广泛应用的基础课程。

本书是为了适应高等教育中经济管理类专业学生的实际学习需要而编写的经济数学系列教材之一。根据高等教育的特点，本书在编写中力求内容完整，做到重点突出、联系实际、由浅入深、通俗易懂，充分体现该课程的系统性、科学性和实用性的要求。

本书可以作为高等院校经济管理类线性代数课程的教材或教学参考书，也可以作为高等教育自学考试中"高等数学"(二)课程的自学参考书。

在本书此次修订中，罗万钧老师提出许多宝贵意见，在此谨表谢意。书中若有不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2018年1月

目　录

1　前言

1　第一章　行列式
1　第一节　行列式的概念
5　第二节　行列式的性质
8　第三节　行列式按行(列)展开
11　第四节　行列式的计算举例
18　第五节　克莱姆法则
20　习题一

26　第二章　矩　阵
26　第一节　矩阵的概念
29　第二节　矩阵的运算及其性质
37　第三节　逆矩阵
41　第四节　分块矩阵及其运算
45　第五节　矩阵的初等变换
50　第六节　初等方阵
56　习题二

61　第三章　线性方程组
61　第一节　n 维向量的概念
63　第二节　线性相关与线性无关

68 第三节 向量组的秩
70 第四节 矩阵的秩
77 第五节 线性方程组解的判别定理
80 第六节 线性方程组解的结构
92 习题三

97 第四章 特征值与特征向量
97 第一节 特征值与特征向量
103 第二节 相似矩阵
104 第三节 矩阵的对角化
108 第四节 矩阵的约当标准型介绍
111 习题四

114 第五章 实二次型
114 第一节 二次型与合同矩阵
117 第二节 二次型的标准形
120 第三节 惯性定理与正定二次型
123 习题五

126 第六章 正交矩阵
126 第一节 向量空间
128 第二节 向量的内积
130 第三节 向量组的正交化
132 第四节 正交矩阵
139 习题六

143 习题解答

第一章

行列式

行列式是学习线性代数的重要基础知识。初等数学中曾用二阶、三阶行列式来解二元、三元线性方程组，在本书研究 n 元线性方程组的解，以及研究矩阵性质时也要用到行列式，为此首先引入行列式的概念。

第一节　行列式的概念

一、行列式的概念

［定义 1.1］　一阶行列式由一个数组成，记为 $|a_{11}|=a_{11}$.

［定义 1.2］　二阶行列式是由 2^2 个元素排成 2 行 2 列，用

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示，且规定：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

其中，元素 a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列的元素$(i,j=1,2)$；$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$的**代数余子式**；而 M_{ij} 是行列式中划去第 i 行且划去第 j 列元素后所剩下的元素组成的行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**$(i,j=1,2)$。

显然在定义中，$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，而 $M_{11}=|a_{22}|=a_{22}$；$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-|a_{21}|=-a_{21}$，则二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

这与中学里所学的对角交叉相乘所得结果一致。

［例 1.1］　求二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

的值。

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}\\ &=5\times(-1)^{1+1}\times2+(-6)\times(-1)^{1+2}\times3=10+18=28\end{aligned}$$

［**定义 1.3**］ 三阶行列式是由 3^2 个元素排成的 3 行 3 列，用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示，且规定

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

其中：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称 M_{11} 为 a_{11} 的**余子式**，它是在三阶行列式中划去 a_{11} 所在的行及列后按原次序所成的二阶行列式，称 A_{11} 为 a_{11} 的**代数余子式**；同理称 M_{12} 为 a_{12} 的**余子式**，A_{12} 为 a_{12} 的**代数余子式**；一般地，M_{ij} 就是三阶行列式中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列剩下的元素按原次序构成的二阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**$(i,j=1,2,3)$。

［**例 1.2**］ 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

的值。

解 按照［定义 1.3］，因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}=48$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}=-6$$

所以

$$\begin{aligned} D &=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &=1\times 21+5\times 48+6\times(-6) \\ &=225 \end{aligned}$$

［**定义 1.4**］ 假设已定义了 $n-1$ 阶行列式，n 阶行列式是由 n^2 个元素排成 n 行和 n 列组成，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

且规定其值为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

其中，M_{1j} 表示元素 $a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 的**余子式**，它是 D 中划去 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后剩下的元素按原来的次序构成的 $n-1$ 阶行列式。$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 称为 a_{1j} 的**代数余子式**。

一般地，对于 n 阶行列式 D 来讲，M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**$(i,j,=1,2,\cdots,n)$。其中，M_{ij} 是 D 中划去元素 a_{ij} 所在的行和列元素后，按原次序排列构成的 $n-1$ 阶行列式。

［**例 1.3**］　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} D &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 8-33-57-3=-85 \end{aligned}$$

注　从以上定义及例子可以看到，n 阶行列式由 n^2 个元素构成，每个行列式都表示一个数值，且它等于第一行的元素分别乘以它的代数余子式再求和。这一定义也称为行列式按第一行展开。

二、用行列式表示二元及三元线性方程组的解

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，可用消元法解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

用二阶行列式可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

[例 1.4] 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=-4 \\ x_1-2x_2=5 \end{cases}$$

解 可用二阶行列式得

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-7}=1 \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{14}{-7}=-2$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

同样可以由消元法得到。当

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{32}\neq 0$$

时,可用消去法得到:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

其中:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}$$

[例 1.5] 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=7 \\ x_1+3x_2-x_3=-4 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=16$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=16$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}=-32$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-16$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=-1$$

第二节 行列式的性质

在第一节中，n 阶行列式的定义是按第一行展开，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$$

可以用数学归纳法证明 D 也可按第一列展开，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}$$

[定义 1.5] 交换行列式 D 的行与列所得的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T} 或 D'.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

［例 1.6］

若
$$D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\0 & 3 & -5\\7 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

则
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 7\\-4 & 3 & 6\\2 & -5 & -2\end{vmatrix}$$

用数学归纳法可以证得以下性质 1、性质 2。

性质 1 转置行列式的值等于原行列式的值，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号。

［例 1.7］ 交换行列式 D 的第一行和第三行，行列式变号。

$$D=\begin{vmatrix}7 & 6 & -2\\0 & 3 & -5\\1 & -4 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\0 & 3 & -5\\7 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

特别地，当行列式中有两行(列)对应元素都相同时，行列式的值为零。

因假设 D 中的第 i 行和第 j 行对应元素相同，交换第 i 行和第 j 行(仍为 D)，即得 $D=-D$，移项得 $2D=0$，于是 $D=0$。

［例 1.8］ $\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\0 & 3 & -5\\1 & -4 & 2\end{vmatrix}=0$，因为第一行与第三行相同。

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘同一个数 k，行列式的值扩大 k 倍。

［例 1.9］ $\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\0 & 3k & -5k\\7 & 6 & -2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\0 & 3 & -5\\7 & 6 & -2\end{vmatrix}$

这相当于行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

性质 4 行列式中两行(列)对应元素都成比例，行列式值为零。

设第 j 行为第 i 行的 k 倍，将 j 行提出公因子 k，即得第 i 行与第 j 行相同，于是行列式的值为零。

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

注

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

性质 6　把行列式某行(列)各元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上去,行列式值不变。

利用这些性质可以简化行列式的计算。

另外我们用 r_i 表示第 i 行,c_i 表示第 i 列。$r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换第 i 行与第 j 行;$r_i \times k$ 表示第 i 行乘 k 倍;$r_j + kr_i$ 表示把第 i 行元素乘 k 倍加到第 j 行上去。

[**例 1.10**]　利用行列式性质计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 - 2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 - 2r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - 3r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & 4 & -13 \end{vmatrix}$$

熟练以后,这几步也可合并为:

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 - 3r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & 4 & -13 \end{vmatrix}$$

然后按行列式定义，得：

$$D=-\begin{vmatrix}-7&6&-5\\-5&4&-7\\-7&4&-13\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_1}-\begin{vmatrix}-7&6&-5\\-5&4&-7\\0&-2&-8\end{vmatrix}\quad(\text{这里也可用 } c_3-4c_2)$$

$$\xlongequal[r_2\times7]{r_1\times5}-\frac{1}{35}\begin{vmatrix}-35&30&-25\\-35&28&-49\\0&-2&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1}-\frac{1}{35}\begin{vmatrix}-35&30&-25\\0&-2&-24\\0&-2&-8\end{vmatrix}$$

$$D=-\frac{1}{35}(-35)\begin{vmatrix}-2&-24\\-2&-8\end{vmatrix}=-32$$

第三节　行列式按行(列)展开

显然，n 阶行列式 D 中当 $a_{11}\neq0$，而其余 $a_{1k}=0(k=2,3,\cdots,n)$ 时，D 可按第一行展开为 $D=a_{11}A_{11}$. 同样第一列除 $a_{11}\neq0$，其余元素 $a_{k1}=0(k=2,3,\cdots,n)$ 时，D 可按第一列展开为 $D=a_{11}A_{11}$.

［定理 1.1］ 若 n 阶行列式 D 中除 a_{ij} 外，第 i 行(或 j 列)的其余元素都为零，那么 D 可按第 i 行(或 j 列)展开为 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 设第 i 行除 $a_{ij}\neq0$，其余元素都为零。

先将第 i 行和第 $i-1$ 行对换，再与第 $i-2$ 行对换，……经过$i-1$次对换，含 a_{ij} 的原第 i 行就换到第一行，行列式的值应乘$(-1)^{i-1}$.

类似经过 $j-1$ 次列对换，可将含 a_{ij} 的列变到第一列，即

$$D=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix}a_{ij}&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\a_{1j}&a_{11}&\cdots&a_{1\,j-1}&a_{1\,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{2j}&a_{21}&\cdots&a_{2\,j-1}&a_{2\,j-1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{nj}&a_{n1}&\cdots&a_{n\,j-1}&a_{n\,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

因为新行列式中划去第 1 行划去第 1 列所成的余子式就是 D 中的 M_{ij}(划去原第 i 行和原第 j 列)。

［定理 1.2］ (拉普拉斯展开)n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即按第 i 行展开为

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

[定理 1.3] 行列式 D 的任意一行(列)各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

或
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$$

证明 将 D 的第 j 行元素 $a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn}$ 换成 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 所成的新行列式的第 i 行与第 j 行相同;于是新的行列式值为零。

另一方面,新行列式可按第 j 行展开,得:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

利用行列式性质将某行(列)的元素尽可能化为零,然后展开,可简化行列式的计算。

[例 1.11] 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

解 首先寻找含零个数最多的行或列。本题第 3 列含两个零,于是从第三列着手,再变出一个零元素。

$$D\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}\quad\text{(按第 3 列展开得)}$$

$$D=1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_1}-\begin{vmatrix}1&2&4\\4&-1&2\\0&0&-9\end{vmatrix}\quad\text{（再按第 3 行展开得）}$$

$$=-(-9)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\4&-1\end{vmatrix}=-81$$

本题也可这样解：第 4 行与第 1 行有三个对应元素相同，于是用第 4 行减第 1 行也可同时出现 3 个零，然后按第 4 行展开，即得：

$$D\xlongequal{r_4-r_1}\begin{vmatrix}1&2&0&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\0&0&0&-9\end{vmatrix}$$

$$=(-9)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&2&0\\1&0&1\\3&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_1}-9\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&0&0\\3&-1&-4\end{vmatrix}$$

$$=-9\times1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-4\end{vmatrix}=-81$$

［例 1.12］ 行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&x&2\\4&5&2\end{vmatrix}$$

是关于 x 的一次多项式，求一次项 x 的系数。

解 由于行列式中 x 在其第二行，按第二行展开，可得：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&x&2\\4&5&2\end{vmatrix}=3\times(-1)^3\times\begin{vmatrix}2&3\\5&2\end{vmatrix}+x\times(-1)^4\times\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}+2\times(-1)^5\times\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}.$$

可以看到，一次项 x 的系数就是 x 的代数余子式 $A_{22}=(-1)^4\times\begin{vmatrix}1&3\\4&2\end{vmatrix}=-10.$

［例 1.13］ 计算行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\0&0&-y&-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_4}\begin{vmatrix}1+x & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1-x & 0 & 1\\ 1 & 1 & y & 1\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{vmatrix} \quad \text{(按第 4 行展开得)}$$

$$=-y\begin{vmatrix}1+x & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 0\\ 1 & 1 & y\end{vmatrix} \quad \text{(再按第 3 列展开得)}$$

$$=(-y)y\begin{vmatrix}1+x & 1\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}$$

$$=-y^2[(1+x)(1-x)-1]$$

$$=-y^2(1-x^2-1)=x^2y^2$$

第四节 行列式的计算举例

本节主要对有某些特征的行列式的计算进行介绍。

我们把 n 阶行列式 D 的从左上角到右下角含 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的连线称为**主对角线**。

一、对角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中,只有主对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 不为零,其余省略的元素皆为零。

显然:

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

[例 1.14] 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & 1\\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$$

没写出的元素皆为零。

解 经过 $n-1$ 次列交换,可将最后一列换到第 1 列。

$$D=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ 0 & n & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix} \quad \text{(再将第 } n \text{ 列经过 } n-2 \text{ 次相邻列交换,换到第 2 列)}$$