



黄东卫 编著

非线性数学基础引论

Introduction to Nonlinear Mathematics Foundation



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

非线性数学基础引论

Introduction to Nonlinear
Mathematics Foundation

黄东卫 编著



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

非线性数学基础引论 / 黄东卫编著. — 天津: 天津大学出版社, 2018.9

ISBN 978-7-5618-6241-4

I. ①非… II. ①黄… III. ①非线性—研究生—教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 207915 号

出版发行	天津大学出版社
地 址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话	发行部:022-27403647
网 址	publish.tju.edu.cn
印 刷	北京虎彩文化传播有限公司
经 销	全国各地新华书店
开 本	185mm×260mm
印 张	10.75
字 数	268 千
版 次	2018 年 9 月第 1 版
印 次	2018 年 9 月第 1 次
定 价	28.50 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

非线性科学是科学研究中的一个重要领域,其包含的内容纷繁复杂,涉及数学、物理、化学、计算机、建筑工程、生物科学、机械工程、管理工程、生物生态、经济金融、医药医学工程以及航空航天等学科。

本书旨在介绍非线性科学研究中一些常用的基本数学知识和方法,以期启发读者发现、理解、认识一些简单的非线性现象。近年来,非线性数学的研究工作在理论层面的精深成果不断出现,广大科技人员更关注的是非线性数学与其他学科的交叉融合,本书旨在以简短的篇幅,避开或高深或冗长的理论推导,仅给非线性数学的初学者一个简洁朴素的引导,以期抛砖引玉,若读者能在此后将所学知识应用到各自的学习工作中,或激发读者进一步深入探索非线性数学的兴趣,则编著者不胜欣慰。

读者应具有高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数值分析的基础知识,若能对数学软件 Mathematica, Matlab, SPSS 有一定了解则更好。

本书仅供本科生、研究生及对非线性科学有兴趣的读者参考使用。

鉴于编著者的学识有限,错误与不足在所难免,敬请批评指正,不胜感激。

致谢

1. 本书主要参考了许兰喜先生编写的《高等应用数学——非线性分析》(化学工业出版社),谢季坚先生和邓小炎先生编写的《现代数学方法选讲》(高等教育出版社),杜纲先生编著的《管理数学基础——理论与应用》(天津大学出版社)的内容,还有百度文库中的部分内容,在此向上述作者表示衷心感谢。

2. 本书的编写工作得到了天津工业大学 2016 年“十三五”学位与研究生教育项目(No. 52010535)的资助。

课程相关资料请关注微信公众号:Maths_life



目 录

第 1 章 基础知识	(1)
1.1 常微分方程组解的存在唯一性定理	(1)
1.2 解的延拓	(5)
1.3 解对初值的连续性和可微性定理	(6)
1.4 解对参数的连续性与可微性定理	(6)
第 2 章 常微分方程稳定性理论简述	(7)
2.1 基本概念	(7)
2.2 二维自治系统的稳定性	(9)
2.3 线性微分方程组	(15)
2.4 奇点附近性态	(21)
2.5 Lyapunov 第二稳定性判别方法	(25)
2.6 周期解和极限环	(28)
2.7 相图的拓扑结构	(30)
第 3 章 动力系统简述	(35)
3.1 流的概念	(35)
3.2 动力系统轨线的极限状态	(37)
第 4 章 分岔与混沌简述	(40)
4.1 引言	(40)
4.2 分岔的简单分类	(41)
4.3 研究混沌的方法简述	(50)
4.4 中心流形	(53)
第 5 章 分形与分维简述	(57)
5.1 分形现象简述	(57)
5.2 分形的意义与分维	(60)
5.3 分形维数的其他定义	(63)
第 6 章 层次分析法简述	(67)
6.1 层次分析法	(67)
6.2 层次分析法(AHP)计算实例	(70)
6.3 综合评价理论基础	(73)
第 7 章 模糊数学基础简述	(77)
7.1 模糊数学的诞生	(77)
7.2 集合与关系	(78)

7.3	模糊集合及其运算	(83)
7.4	模型识别	(89)
7.5	聚类分析	(94)
7.6	模糊决策	(106)
7.7	二元对比决策	(108)
第 8 章	统计学应用简述	(115)
8.1	方差分析	(115)
8.2	试验设计	(126)
第 9 章	神经网络简述	(141)
9.1	神经网络概念	(141)
9.2	人工神经网络的基本特征	(142)
9.3	激发函数	(143)
9.4	BP 神经网络简述	(146)
9.5	径向基函数神经网络简述	(157)
9.6	广义回归神经网络(GRNN)简述	(159)

第1章 基础知识

在浩瀚无垠的宇宙中,人们所面临的所有事物都是随时间变化的;所谓永恒,只是相对的,或只体现在理论层面.

如何描述事物的发展变化,正是动力系统研究的基本问题,在这些问题中,有一类问题可以转化为微分方程(组)问题,用微分方程模型来描述该问题.在数学模型建立完成后,通过分析模型的状态变量的性质与变化趋势,从而说明实际问题各类变量的性质与状态.这项工作既要给出定性理论分析结果,更要给出定量数值化、可视化的直观表达与演示,从而形象地展示问题中各个状态变量的发展演化过程,揭示目标变量(事物)发展的基本规律.

就某种意义而言,通过对模型的分析,展示出事物的未知与未来的发展性态,对研究人员乃至对人类有限的时间或生命而言是极其有价值的.例如,人们已经可以演化出星空流转、大气环流、天气预报、物种繁衍、药物作用机理、海洋和江河的生态水文等多种事物的发展性态.

本章仅列出常微分方程定性理论的一些基本概念与基本定理,为学习以后各章的知识提供必要的基本理论基础.

1.1 常微分方程组解的存在唯一性定理

1.1.1 基本概念

1. 可列集

集合 A 中元素的个数称为集合 A 的基数(势),记为 $\bar{A}$.

例如, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则 $\bar{A} = n$, 此时称 A 为有限集.

若 A 为无限集,即 A 有无限多个元素,则 A 的基数就不是显而易见的.

例如,区间 $[0, 1]$ 中全体有理点所成的集合和全体无理点所成的集合相比,哪个集合的基数更大?

若两个集合 A 和 B 之间存在一一对应的映射关系,则称 A 和 B 有“同样多”的元素(或者称 A 和 B 有同样的基数),也称 A 和 B 对等,记为 $A \sim B$ (或 $\bar{A} = \bar{B}$).

若集合 A 的所有元素可以按次序排成一行,即 $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, 则称 A 为可列集(或可数集),或称 A 是可列的(或可数的).换言之, A 可与自然数集 $\mathbb{N}^+$ 对等.

(1) 自然数集是可列集.

(2) 整数集是可列集, $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

(3) 若 $A_i (i=1, 2, \dots)$ 为可列个集合,且 A_i 自身是可列的,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是可列集.

(4) $[0, 1]$ 上的全体实数是不可列的.

康托尔(Cantor)集的概念: $[0, 1]$ 分成3等份,可得到3个区间,去掉中间的那个,对剩余的两段,分别三等分,各去掉中间一段,剩下更短的四段,……,将这样的操作一直继续下去,直至无穷,由于在不断分割舍弃过程中,所形成的线段数目越来越多,长度越来越小,在极限的情况下,得到一个离散的点集,称为康托尔点集, Cantor 集. 这时称为康托尔点集的极限图形长度趋于0,线段数目趋于无穷,实际上相当于一个点集.

分析 操作 n 次后,集合的长度 $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 边数 $N(r) = 2^n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

用反证法证明:假设 $[0, 1]$ 上全体实数是可列的,记为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} (= [0, 1])$.

在 $[0, 1]$ 上构造 Cantor 集,把 $[0, 1]$ 三等分,将不含 x_1 的集合记为 I_1 ; 继续将 I_1 三等分,将不含 x_2 的集合记为 I_2 ; 如此这般做下去,将会得到 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = x^*$.

根据上述做法, $x^* \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, 但 $I_n \in [0, 1]$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = x^* \in [0, 1]$, 所以矛盾, 故假设错误, 即 $[0, 1]$ 上全体实数是不可列的.

进而得出结论: $[0, 1]$ 中的有理点集是可列的, 但 $[0, 1]$ 中的无理点集是不可列的.

2. n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$

设 $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 定义加法和数乘法(线性运算)为

$$x \pm y = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad ax = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n (a \text{ 为实数}).$$

显然 $\mathbf{R}^n$ 对上述两种运算是封闭的, 此时称 $\mathbf{R}^n$ 为一个线性空间.

若在 $\mathbf{R}^n$ 中两个元素之间定义一种内积运算(inner product)(亦称数量积)

$$\langle x, y \rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbf{R},$$

此时 $\mathbf{R}^n$ 又称为内积空间.

若 $x = y$, 则 $\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$. 则将 $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \triangleq \|x\|$ 称为 x 的模或范数(norm). 显然 $\|\cdot\|$ 具有以下性质:

- (1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$;
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

内积 $\langle x, y \rangle$ 满足:

- (1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

$$(2) \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle;$$

$$(3) \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(4) \text{施瓦茨(Schwartz)不等式 } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

此时的 $\mathbf{R}^n$ 称为赋范线性空间.

范数实际上是绝对值的推广, 绝对值可以看成 $\mathbf{R}$ 中的范数. 但是若空间的维数是高维, 甚至是无穷维时, 为了描述不同元素之间的差异和靠近程度, 就必须引入一种度量的方法, 这就是范数.

这些空间中的元素在实际问题中可能代表某种状态.

常见的范数还有 $\|f\| = \left\{ \int_a^b f^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}}, p \geq 2$.

例如, $\|f\| = \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$, 其中 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的平方可积函数. 又如

$$\|\sin x\|_{[0, 2\pi]} = \left\{ \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \approx 1.772.$$

若 $f(x) = x - \sin x$, 则它的范数为

$$\|f\|_{[0, 2\pi]} = \left\{ \int_0^{2\pi} (x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8\pi^3}{3} + 4\pi + \pi \right)^{\frac{1}{2}} \approx 9.9192.$$

当然, 完全可以根据问题的实际意义或需要定义自己的范数.

再如 $\|f\| = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$, 这恰好与下面的实际问题吻合.

下面确定交流电的电压及电流强度.

由于交流电是随时间变化的, 在计算时有颇多不便, 为此在电工学中通常使用“有效值”来表示交流电量的大小. 当交流电流 $i(t)$ 在一个周期内消耗在电阻 R 上的平均功率, 等于直流电流 I 消耗在电阻 R 上的功率时, 这个直流电流的数值 I 就叫做交流电流的有效值. 由于直流电流 I 消耗在电阻 R 上的功率为 $I^2 R$, 而交流电流在一个周期内消耗在电阻 R 上的平均功率为 $\frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt$, 因此有 $I^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt$, 从而有 $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$; 同样可

以计算出交流电压的有效值为 $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$.

对于正弦交流电流 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, 其有效值为

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) dt} \\ &= \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t + \varphi_i)] dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m. \end{aligned}$$

同样, 也可以计算出正弦电压的有效值为 $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m$.

可见, 正弦电量的有效值分别是其最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (0.707). 在实际应用中, 一般所说交流电量的大小都是指它的有效值. 我国民用交流电的电压是 220 V, 低压动力用电电压是 380

V, 均为有效值. 通常使用的各种交流电机, 电器设备铭牌标注的电压、电流数值, 交流电压表、电流表的示数等也都是有效值.

利用范数可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义距离: $d(x, y) = \|x - y\|$; 这样 $(\mathbf{R}^n, d)$ 就构成距离空间.

有了距离的定义就可以引入 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛: $\{x_m\}$ 收敛于 x_0 是指 $\|x_m - x_0\| \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$. 除此之外, 在此引入以下一系列概念.

(1) 邻域: 设 $x_0 \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$, 点集 $\{x | x \in \mathbf{R}^n, \|x - x_0\| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域, 且记为 $U_\delta(x_0)$, 简称 x_0 的邻域.

(2) n 维开球: $B^n(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n | \|x - x_0\| < r\}, (x_0 \in \mathbf{R}^n)$.

(3) n 维闭球: $\overline{B}^n(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^n | \|x - x_0\| \leq r\}, (x_0 \in \mathbf{R}^n)$.

(4) E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集: 若对任意 $x_0 \in E$, 存在 $\delta > 0$ 使 $U_\delta(x_0) \subset E$.

(5) E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集: 若 $\mathbf{R}^n - E$ 为开集.

(6) 闭包: 设 $A \subset \mathbf{R}^n, x_0 \in \mathbf{R}^n$, 若对任意 $\delta > 0$ 有 $U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 A 的接触点. 集 A 的接触点的全体所组成的集合称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$.

(7) 稠密: 设 A, B 均为 $\mathbf{R}^n$ 的子集, 若 $\overline{A} \supset B$, 则称 A 在 B 中稠密.

(8) 波雷尔(Borel)集: 以 $\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集为对象作出至多可列次并或交的运算所得的集称为 Borel 集.

有了距离的概念就可以引入函数连续的概念. 对于向量函数

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))^T: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

由一元函数的连续、可微和可积性, 不难理解以下的结果和表达式:

(1) $\varphi(t)$ 连续 $\Leftrightarrow \varphi_i(t)$ 连续 ($i = 1, 2, \dots, n$);

(2) $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t) = (\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t))^T$;

(3) $\varphi(t)$ 在 $[t_0, t]$ 上的积分为 $\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau = \left(\int_{t_0}^t \varphi_1(\tau) d\tau, \int_{t_0}^t \varphi_2(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^t \varphi_n(\tau) d\tau \right)^T$;

(4) $\left\| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\varphi(\tau)\| d\tau$.

在 $\mathbf{R}^n$ 上定义的向量函数 $g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$ 的连续性.

设区域 $D \subset \mathbf{R}^n$, 向量函数 $g(x)$ 在 D 上有定义, 若对任 $x, y \in D$ 有常数 L 使 $\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|$ 成立, 则称 $g(x)$ 在区域 D 上是李氏的 (Lipschitz 的), 其中 L 称为李氏常数 (李普希茨常数).

增强条件以实现函数满足李普希茨条件, 举例如下.

若 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为凸集, $g(x)$ 在 D 上满足 $\left| \frac{\partial g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right| \leq K, K$ 是常数, 则 $g(x)$ 在 D 上是李氏的. 事实上, 对任意 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$|g_i(x) - g_i(y)| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i(y + \theta(x-y))}{\partial x_j} \right| |x_j - y_j| \quad (0 < \theta < 1).$$

该不等式的证明用到了多元函数的泰勒展开和余项表达式,其中 D 的凸性保证了 $y + \theta(x-y) \in D$, 而 $|g_i(x) - g_i(y)| \leq K \|x - y\|$, 故 $\|g(x) - g(y)\| \leq n^{\frac{3}{2}} K \|x - y\|$.

若对每一 D 中的点存在该点一个邻域 $D_0 \subset D$ 使 $g(x)$ 在 D_0 上是李氏的, 则称 $g(x)$ 在 D 上是局部李氏的. 例如, 若 $g(x)$ 在 D 上有一阶连续的偏导, 即 $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 均连续, 则 $g(x)$ 在 D 上是局部李氏的.

命题 若 $g(x)$ 在 D 上是局部李氏的, 则 $g(x)$ 在 D 的任何有界闭区域上都是李氏的.

1.1.2 存在与唯一性定理

考虑微分方程组

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1.1)$$

其中: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $f(x, t): D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间, $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域 (I 可以为 $\mathbb{R}$, D 可以等于 $\mathbb{R}^n$).

定理 1.1 (存在与唯一性定理) 设 $f(x, t)$ 连续, $f(x, t)$ 对 x 在 D 上是局部李氏的, 且对 $t \in I$ 有一致的李氏常数, 则对 $t_0 \in I$, $x_0 \in D$ 存在常数 $h > 0$, 使得在区间 $J = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上微分方程 (1.1) 有唯一连续解 $x = x(t)$, 且满足初始条件

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

1.2 解的延拓

存在唯一性定理确保了方程 (1.1) 在闭区间 $J = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上存在唯一的解, 现在把初始条件改为

$$x(t_1) = x(t_0 + h), \quad (1.3)$$

则由存在唯一性定理得: 存在 $h_1 > 0$ 使方程 (1.1) 在区间 $J_1 = [t_0 + h - h_1, t_0 + h + h_1]$ 上有唯一确定的连续解, 且方程 (1.3) 得到满足, 设该解为 $\bar{x}(t)$. 由唯一性得: 当 $t \in J \cap J_1$ 时, $x(t) = \bar{x}(t)$. 这样方程 (1.1) 的解就向右延拓了, 即找到了 $J \cup J_1$ 上的解. 同理可以向左延拓.

从上面可以看出, 解的延拓实际上是积分曲线的延长. 那么这样左右延拓可以到什么时候为止, 即解存在的最大区间是否存在? 为此引入以下定理.

定理 1.2 (解的延拓定理) 在定理 1.1 的条件下, 令 $G = D \times I$, 若 $x(t)$ 是方程 (1.1) 满足方程 (1.2) 条件下在 $[t_0 - h, t_0 + h]$ 上的解, 则存在 $x(t)$ 的延拓解 $\bar{x}(t)$, 其最大存在区间为开区间, 设为 (α, β) , 并且当 $t \rightarrow \alpha + 0$, $t \rightarrow \beta - 0$ 时积分曲线上的点 $(t, \bar{x}(t))$ 趋于 G 的边界 (若 G 无边界, 则 $|t| + \|\bar{x}(t)\| \rightarrow \infty$).

在定理 1.2 中, 若 G 无界, 对解向右延拓来说有下面两种情况:

(1) $x = x(t)$ 可以延拓到 $[t_0, +\infty)$ (即 $\beta = +\infty$);

(2) 若 $x(t)$ 只可以延拓到 $[t_0, m)$, m 为有限, 则当 $t \rightarrow m$ 时, 或者 $x = \bar{x}(t)$ 无界, 或者

$(t, \bar{x}(t))$ 趋于 G 的边界.

1.3 解对初值的连续性和可微性定理

由前面讨论可知, 对给定的 $x_0 \in D$ 存在唯一的满足初值条件 $x(t_0) = x_0$ 的解. 若初值 x_0 变化, 解也在变化, 我们想知道解的变化与初值的变化有什么关系. 设 $x = x(x_0, t)$ 是满足 $x(t_0) = x_0$ 的解, 从而解也是 x_0 的函数, 对此函数有如下定理.

定理 1.3 (解对初值的连续性和可微性定理) 若方程 (1.1) 的右端项 $f(x, t)$ 对空间变量 x 连续可微, 即 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 连续, 则方程对应初值 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x = x(x_0, t)$ 对 x_0 是连续可微的.

向量函数连续: 当 $x'_0 \rightarrow x_0$ 时, $\|x(x'_0, t) - x(x_0, t)\| \rightarrow 0$, $\frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial (x(x_0, t))_i}{\partial (x_0)_j} \right)_{n \times n}$ 连续.

1.4 解对参数的连续性与可微性定理

考虑带参数的微分方程

$$\dot{y} = f(x, t; \mu), \mu \in I_1 \subset \mathbf{R}, \quad (1.4)$$

其中, $f(x, t; \mu)$ 是从 $D \times I \times I_1$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数; I_1 是开区间, $f(x, t; \mu)$ 关于 x 是局部李氏的, 且对 t 和 μ 有一致的李氏常数 (不依赖于 t 和 μ).

定理 1.4 (解对参数的连续性与可微性定理) 若 $f(x, t; \mu)$ 对 x, μ 有连续的偏导, 上述条件具备, 则方程 (1.4) 的满足条件 $x(t_0, \mu) = x_0$ 的解 $x = x(x_0, t, \mu)$ 对 x_0, μ 连续可微. 若 $f(x, t; \mu)$ 对一切变量解析, 则其满足初始条件 $x(t_0, \mu) = x_0$ 的解 $x = x(x_0, t, \mu)$ 关于 μ 解析; 若 $f(x, t; \mu)$ 关于 x, t 和 μ 连续, 则方程 (1.4) 的解作为 x_0, t 和 μ 的函数均为连续.

第2章 常微分方程稳定性理论简述

2.1 基本概念

微分方程是用来描写物体或质点的运动规律的;微分方程的某一解表示质点可能出现的一种运动状态;微分方程的解依赖于初始值,由于不可避免的实际测量误差可能导致初值有误差,这样看来,若要把某一状态作为设计目标,就必须分析其稳定性.所谓某一状态的稳定性,是指其抵御外界干扰的能力.主要考虑定态(steady state)解的稳定性.请观察一个简单的例子.

例 2.1 考虑微分方程

$$\dot{x} = ax, \quad (2.1)$$

a 是常数,其通解为 $x = ce^{at}$ (c 为任意常数).显然 $x=0$ 为一特解,且为一定态解(与时间无关),称之为零解.由通解可以看出:

(1) $a < 0$ 时,所有初值不为零的解当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于零解;

(2) $a > 0$ 时,所有初值不为零的解当 $t \rightarrow \infty$ 时都离零解越来越远,如图 2.1 所示.

对于情况(1),称零解是稳定的;而情形(2),称零解是不稳定的.

若考虑微分方程

$$\dot{x} = a(x - A), \quad (2.2)$$

其中 a, A 为常数,定态解为 $x = A$,通解为 $x = ce^{at} + A$.易见 $x = A$ 的稳定性与前面讨论的零解的稳定性完全相同.只需作变换 $y = x - A$ 便可以把方程(2.2)化为方程(2.1)的形式.

若考虑方程组

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) \quad (2.3)$$

的某特解 $x = x_0(t)$ 的稳定性时,可先令 $y = x - x_0(t)$,代入(2.3)并整理得

$$\dot{y} = f(y + x_0(t), t) - x'_0(t) = g(y, t). \quad (2.4)$$

显然有 $g(0, t) = 0$,这说明系统(2.3)的解 $x = x_0(t)$ 对应于系统(2.4)的零解.这样就把一个非零解的稳定性问题转化为零解的稳定性问题来研究.因此,以后只考虑零解的稳定性问题.下面给出稳定的数学描述,也称 Lyapunov 稳定性定义.

定义 2.1 设系统(2.3)中的 $f(x, t)$ 满足 $f(0, t) = 0$,且在 $x=0$ 附近满足存在唯一性定理的条件.

(1) 若对 $\forall \epsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使当 $\|x_0\| < \delta$ 时,初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad t > t_0 \quad (2.5)$$

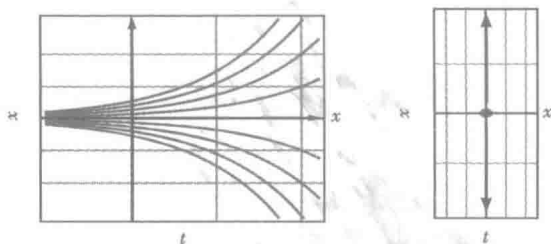


图 2.1 系统 $\dot{x} = ax$, 在 $a > 0$ 时的解曲线示意图,
每条曲线均表示一个特解

的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\| < \epsilon$ ($t \geq t_0$), 则称系统(2.3)的零解是稳定的.

(2) 若零解稳定, 且存在 $\delta_0 > 0$, 使当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 初值问题(2.5)的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$, 则称系统的零解是渐近稳定的.

(3) 若系统(2.3)的零解是渐近稳定的, 且存在区域 D_0 , 当且仅当 $x_0 \in D_0$ 时, 初值问题(2.5)的解 $x(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$, 此时称 D_0 为吸引域, 若 $D_0 = \mathbf{R}^n$ (即全空间), 则称零解是全局稳定的(或无条件稳定的), 反之称为条件稳定的.

(4) 若存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, 有 $\|x_0\| < \delta$, 仍有对任一时间 $\bar{t}_0$, 总存在某时刻 $t_1 > \bar{t}_0$, 使得初值问题(2.5)的解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\| > \epsilon_0$, 此时称零解是不稳定的.

例 2.2 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - y^2, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

显然, $y_1 = 0, y_2 = 1$ 分别是泛定方程的两个定态解, 且分别满足初始条件 $y_1(0) = 0$,

$y_2(0) = 1$, 该定解问题的其他解可表示为 $y = \frac{1}{1 + [y_0^{-1} - 1]e^{-t}}$.

其积分曲线如图 2.2 所示.

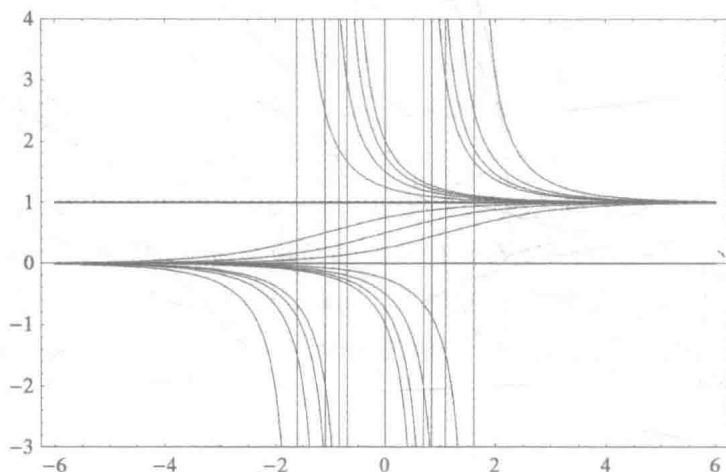


图 2.2 $y' = y - y^2$ 的方程积分曲线示意图

用 Mathematica 求解:

$$D[\{y'[t] == y[t] - y[t]^2, y[0] == y_0\}, y[t], t];$$

得到结果: $\frac{e^t y_0}{1 - y_0 + e^t y_0}$.

显然若 $y_0 = 0$, 则 $y(t) \equiv 0$; 若 $y_0 = 1$, 则 $y(t) \equiv 1$, 两个定态解, 从图 2.2 可以看出解 $y(t) \equiv 1$ 是渐近稳定的, $y(t) \equiv 0$ 是不稳定的, 同时还可以看出, 从初值 $y_0 < 0$ 出发的解在有限时刻趋于无穷, 这种现象称为解的破裂 (blow up).

解的破裂是指解析解在有限时间内解本身或其某些导数趋于无穷, 这实际上是一种非线性效应; 一般说来, 在偏微分方程中, 对于线性问题只要初值适当光滑, 则初值问题的解也有一定的光滑性, 且解在 $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$ 上存在; 而非线性演化方程的解析解一般只能在有限时间段内存在, 即使对充分光滑的初值也是如此. 另外, 对上述例子很容易确定定态解 $y(t) = 1$ 的稳定区域, 即吸引域.

2.2 二维自治系统的稳定性

对于二维微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, t), \\ \dot{y} = f_2(x, y, t), \end{cases} \quad (x, y \in \mathbf{R}, t > 0), \quad (2.7)$$

若函数 f_1 和 f_2 满足解的存在唯一性定理的条件 (如有连续的偏导数), 则过任一点 (x_0, y_0) 有唯一解, 设为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, 这个解所表示的曲线称为积分曲线 (时间历程图). 若把 t 看成参数, 把 $(x(t), y(t))$ 描到 Oxy 平面上就得到一条曲线, 称为轨线 (相图). 我们把二维平面 Oxy 称为相平面, 对于更高维的情形称为相空间. 所谓相空间, 是要研究的物理量本身 (如位移、速度、密度、温度等) 作为坐标分量所成的广义空间. 最常见的是以位移和速度作为分量.

若系统 (2.7) 的右边函数与 t 无关, 此时称系统为二维自治系统.

类似可定义 n 维自治系统 (autonomous system), 图 2.3 为一个三维系统的轨线与积分曲线.

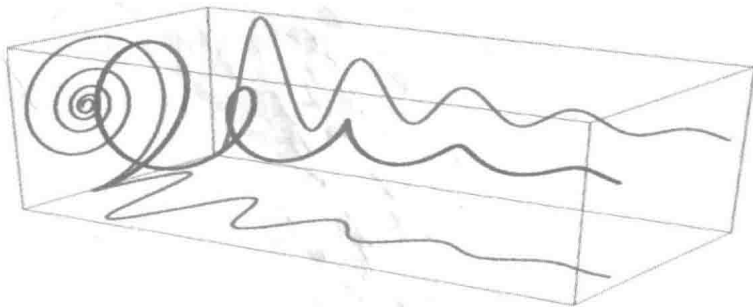


图 2.3 三维系统的轨线与积分曲线示意图

1. 自治系统轨线的简单性质

现在就 n 维自治系统给出其轨线的性质. 考虑 n 维自治系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.8)$$

其中 $x \in \mathbf{R}$, $f(x): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\Omega \in \mathbf{R}^n$, Ω 为开区域. 若 $f(x)$ 在 Ω 上局部是李氏的, 则对任意 $x_0 \in \Omega$ 方程(2.8)有唯一的满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的解(解的存在唯一性定理), 记此解为 $x = x(x_0, t)$. 设 $J(x_0)$ 为其存在的最大区间, 在上述假设下有如下定理.

定理 2.1 若 $x(t)$ ($t \in J$) 为方程(2.8)的解, 则对任意实数 h , $x(t+h)$ 也是方程(2.8)的解, 其定义区间为 $J_h = \{t | t+h \in J\}$.

该定理告诉我们不同的解可以对应相同的轨线.

定理 2.2 若 $x(t)$ 和 $\tilde{x}(t)$ 均为方程(2.8)的解, 其定义区间分别为 J 和 $\tilde{J}$, 若存在 $t_0 \in J$, $\tilde{t}_0 \in \tilde{J}$, 使 $x(t_0) = \tilde{x}(\tilde{t}_0)$, 则对任 $t \in \tilde{J}$ 有 $\tilde{x}(t) = x(t+t_0-\tilde{t}_0)$.

该定理告诉我们不同的轨线不能相交. 关于自治系统轨线的性质将在下一章作进一步讨论.

定义 2.2 若有 $x^* \in \Omega$ 满足 $f(x^*) = 0$, 则称 x^* 是系统(2.8)的奇点(也称平衡点). 显然奇点对应方程的一个定态解.

2. 常系数线性系统

首先考虑最简单的自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (2.9)$$

若令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则系统可写为 $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, 其中 $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 对方程作非退化的线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \text{ 代入上述方程得 } \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = TAT^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

即原线性方程组通过非退化的线性变换后变成一新的线性方程组, 该线性方程组的系数矩阵与原线性方程组的系数矩阵相似.

(1) $|A| \neq 0$.

若 A 有互异的实特征值 λ_1, λ_2 , 此时由线性代数知识可知, A 可以通过非退化的线性变换变成 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. 由于非退化的线性变换不会改变奇点的位置和其轨线的拓扑性质, 因此只需考虑方程组

$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta \end{cases}$ 的解. 该方程组有通解 $\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\eta = C_2 e^{\lambda_2 t}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

情形 1 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, 见图 2.4.

显然, 当 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ 时, 零解是渐近稳定的, 此时称奇点为稳定的结点.

例如: $\begin{cases} \dot{y} = -x - 2y, \\ \dot{x} = 3x - 6y, \end{cases} A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, A 的特征值与特征向量分别为

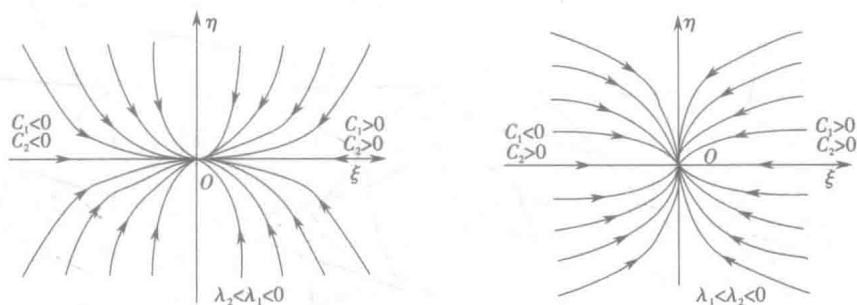


图 2.4 二维线性系统特征值全部为负时, 系统结点附近相图的示意图

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -3; u = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 C_2 \neq 0, \text{ 可取变换矩阵 } T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{则设 } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, X = TY, \dot{X} = T\dot{Y} = A(TY), \dot{Y} = (T^{-1}AT)Y,$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ 即有 } \begin{cases} \dot{\xi} = -4\xi; \\ \dot{\eta} = -3\eta. \end{cases}$$

情形 2 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, 轨线图与情形 1 相同, 但方向相反. 奇点为不稳定的结点.

情形 3 λ_1, λ_2 异号, 见图 2.5. 此时的奇点为鞍点, 鞍点是不稳定的.

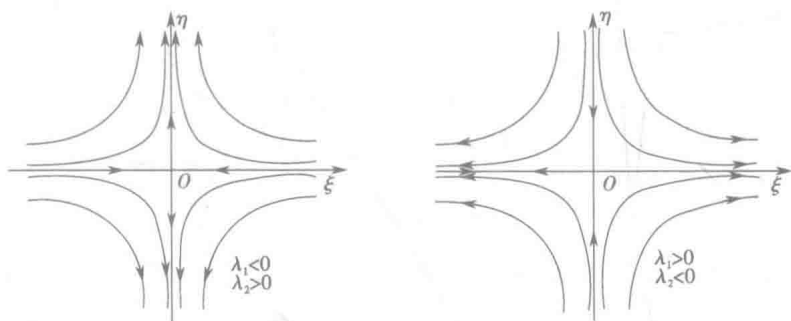


图 2.5 二维线性系统特征值符号互异时, 系统鞍点附近相图的示意图

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, a_{12} \neq 0$ 或 $a_{21} \neq 0 (a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0)$, 此时矩阵 A 可通过非退化的线性变换变成 $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 解方程 $\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi + \eta, \\ \dot{\eta} = \lambda\eta, \end{cases}$ 得 $\xi = (C_1 t + C_2)e^{\lambda t}, \eta = C_1 e^{\lambda t}$.

情形 1 若 $\lambda < 0$, 则零解是渐近稳定的, 对于轨线有 $C_1 = 0 \Leftrightarrow \xi$ 轴的左右半轴.

当 $C_1 \neq 0, t = -\frac{C_2}{C_1}$ 时, $\xi = 0$, 即 $t = -\frac{C_2}{C_1}$ 轨线与 η 轴相交.

又由 $\frac{\eta(t)}{\xi(t)} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2} \rightarrow 0$, 得轨线切于 ξ 轴.

此时称奇点为稳定的退化结点.

情形 2 若 $\lambda > 0$, 奇点对应的零解是不稳定的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时轨线远离零点而去, 从而零点是稳定的退化结点. 图 2.6 中的虚线表示轨线在 $t < 0$ 时的情形.