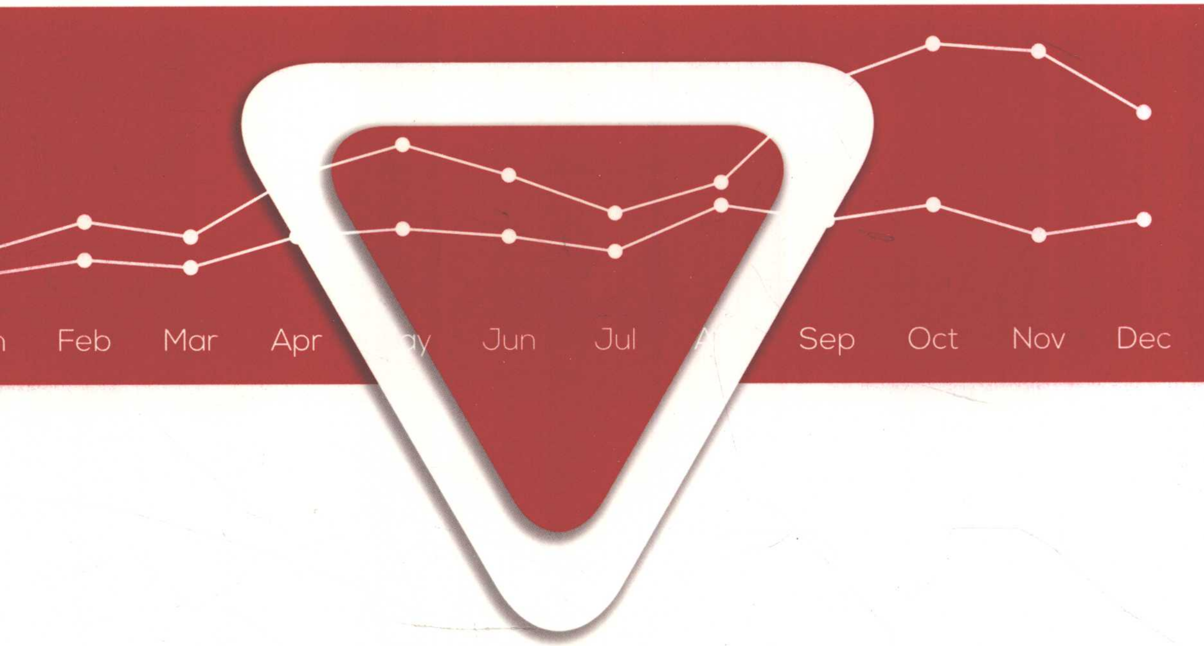


数理统计基础与应用

Mathematical Statistics and Its Application

管玉峰　主编

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

数理统计基础与应用

Mathematical Statistics and Its Application

管玉峰　主编

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

数理统计基础与应用/管玉峰主编．—广州：暨南大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-5668-2355-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①管… Ⅲ.①数理统计 Ⅳ.①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 064991 号

数理统计基础与应用
SHULI TONGJI JICHU YU YINGYONG
主　编：管玉峰

出 版 人：徐义雄
策划编辑：潘雅琴
责任编辑：潘雅琴　邓家昭
责任校对：苏　洁
责任印制：汤慧君　周一丹

出版发行：暨南大学出版社（510630）
电　　话：总编室（8620）85221601
　　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
网　　址：http://www.jnupress.com
排　　版：广州良弓广告有限公司
印　　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：13.875
字　　数：310 千
版　　次：2018 年 8 月第 1 版
印　　次：2018 年 8 月第 1 次
定　　价：45.00 元

前　言

数理统计是高等院校一门非常重要的基础课程，是许多高校学生在完成“高等数学”“线性代数”课程学习后必修的一门课。数理统计是伴随着概率论的发展而来的，它研究如何有效地收集、整理和分析受随机因素影响的数据，发现其内在的规律，并做出一定精确程度的判断和预测，为采取某种决策和行动提供依据或建议。

数理统计源于人口统计、社会调查等各种描述性统计活动。计算机的出现和应用，推动了数理统计在理论研究和应用方面不断向纵深发展，一系列数理统计数据处理软件如 Excel、SAS、SPSS、Matlab 等极大地推动了数理统计方法的应用。当前，数理统计的应用已渗透到各学科研究领域和国民经济部门，成为科学研究、政府决策不可缺少的工具之一。因此，开设“数理统计基础与应用”课程，为国家和社会培养具有相关知识和技能的人才，事关国计民生。而编写一本适合本科生数理统计学习的教材尤为必要。

由此，本书集作者多年“概率论与数理统计”和“数理统计学”的教学实践、科研体会及学生反馈的信息，参考了国内外相关书籍及作者的授课讲义编著而成。具体内容分为概率基础（随机事件与概率、随机变量及其分布和随机变量的数字特征）、数理统计基础（数理统计基础知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析）和 Excel 在数理统计中的应用，共八章。全书在逻辑顺序和知识系统上，本着厚基础、重应用的原则，从基础概念入手，逐步引向知识和方法的应用。读者只要具备高等数学和线性代数的相关知识就可以完成本书的学习任务。与国内外已出版的同类书籍相比，本书具有以下特点：

1. 基础性和系统性。一方面，全书内容从概率到数理统计，着重点在相关基础知识的学习和掌握，各章节依次按照基础概念、例题讲解和习题练习的顺序，采用目前该学科最通用的符号和表达式，增加图、表等直观表达，加强学习者对相关知识的理解和掌握。另一方面，针对当前应用型学科和社会的需要，本书在数理统计部分系统地介绍了参数的估计、参数和非参数的假设检验及回归分析等基础方法，增加了学习者对相关知识的了解和应用，为他们进一步深入学习奠定基础。

2. 全面性和趣味性。全书涵盖了概率基础知识和数理统计主要知识，为学习者更好更快地掌握数理统计的相关知识和方法提供了工具。在例题和习题的选择上更侧重于作者和学生的一些试验数据。这些数据很多来源于生态、地理、环境、农林、化学等专业的学生平时试验所接触的相关内容，这样更易于被学生接受，也增强了学生学习的动力和兴趣。此外，本书中还讲述了为师生所熟悉的 Excel 软件在数理统计中的应用。

3. 应用性。全书缩减了概率知识的内容，加大了数理统计相关方法的讲述，特别

增加了与生态、地理、环境、农林、化学等应用型学科比较密切的数据和数理统计方法的讲述。另外，随着 Excel 版本的提高，其数据处理与统计分析功能足以媲美很多专业的统计软件。在本书中，作者详细地讲述了通过 Excel 2016 软件提供的各统计函数和数据分析工具库如何处理和分析一些复杂的数据关系的方法。其易学、易用，广大师生使用起来也很方便。这些都在很大程度上增强了本书的应用性。

本书目录中带“*”号的为选学内容。

本书是面对高等院校化学、环境、地学、生态等专业本科教学的教材，也可作为相关专业研究生的参考教材。全书主要由华南师范大学管玉峰负责编写，珠江水利委员会珠江水利科学研究院王勇、华南师范大学苏洪雨、广东工业大学肖存陶，华南农业大学江雪萍和广州市 113 中学陶育实验学校王玲等参与编写。本书在编写和出版过程中，得到华南师范大学、暨南大学出版社等大力支持，在此表示衷心的感谢！

限于编者水平，书中难免存在错误和不足之处，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者
2017 年 10 月
于华南师范大学

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

概率论与数理统计研究的对象是随机现象。概率论研究随机现象的模型（即概率分布），数理统计研究随机现象的数据收集与处理。

在一定的条件下，并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**，如抛一枚硬币与掷一颗均匀的骰子。随机现象有两个特点：

（1）结果不止一个；

（2）哪一个结果出现，人们事先并不知道。

只有一个结果的现象称为**确定性现象**。例如，每天太阳从东方升起；水在标准大气压（压力约为 101 kPa）下加热到 100℃ 就沸腾；一个口袋中有 10 只完全相同的白球，从中任取一只必然为白球。

例 1.1.1　随机现象的例子：

（1）抛一枚硬币，正面朝上或反面朝上；

（2）掷一颗均匀的骰子出现的点数；

（3）一天内进入某超市的顾客数；

（4）某种型号电视机的寿命；

（5）测量某物理量（长度、直径等）的误差。

所以我们可以看到随机现象随处可见。

对在相同条件下可以重复的随机现象的观察、记录、实验称为**随机试验**。也有很多随机现象是不能重复的，例如某场足球赛的输赢，某些经济现象（失业、经济增长速度等）。概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象，但也十分注意研究不能重复的随机现象。

随机现象的各种结果会表现出一定的规律性，这种规律性称之为**统计规律性**。数理统计就是通过这些统计规律进行计算和推断的。

1.1.2　样本空间

随机现象的一切可能基本结果组成的全体称为**样本空间**，记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示基本结果，又称为**样本点**。样本点是抽样的最基本单元。认识随机现象首先要列出它的样本空间。

例 1.1.2 下面给出几个随机现象的样本空间：

（1）抛一枚硬币的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$，其中 ω_1 表示正面朝上，ω_2 表示反面朝上；

（2）掷一颗均匀的骰子的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，其中 ω_i 表示出现 i 点，$i=1, 2, \cdots, 6$，也可以直接的标记为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$；

（3）电视机寿命的样本空间为 $\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

（4）测量误差的样本空间为 $\Omega=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$。

需要注意的是：

（1）样本空间中的元素可以是数也可以不是数；

（2）样本空间至少有两个样本点，仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间；

（3）从样本空间含有样本点的个数来区分，样本空间可分为有限和无限两类，譬如例 1.1.2 的（1）和（2），其样本空间中样本点的个数为有限的，而（3）和（4）中样本点的个数为无限的。在以后的数据处理上我们往往将样本点的个数为有限的情况归为一类，称为**离散样本空间**，而将样本点的个数为无限的情况归为另一类，称为**连续样本空间**。

1.1.3 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A，B，C，…表示。如在掷一颗均匀的骰子中，$A=$“出现奇数点”是一个事件，即 $A=\{1, 3, 5\}$，它是相应样本空间 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$ 的一个子集。需要注意的是：

（1）任一事件 A 是相应样本空间的一个子集。在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω，用其中一个圆或其他集合图形表示事件 A；

（2）当子集 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了，或者说事件 A 发生当且仅当 A 中某个样本点出现了；

（3）事件可以用集合表示，也可以用明白无误的语言描述；

（4）由样本空间 Ω 中的单个元素组成的子集称为**基本事件**。而样本空间 Ω 的最大子集（即 Ω 本身）称为**必然事件**，样本空间 Ω 的最小子集（即空集 $\varnothing$）称为**不可能事件**。

例 1.1.3 掷一颗均匀的骰子的样本空间为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$。

（1）事件 $A=$“出现 1 点”，它由 Ω 的单个样本点“1”组成，即 $A=\{1\}$；

（2）事件 $B=$“出现偶数点”，它由 Ω 三个样本点“2，4，6”组成，即 $B=\{2, 4, 6\}$；

（3）事件 $C=$“出现的点数小于 7”，它由 Ω 的全部样本点“1，2，3，4，5，6”组成，即必然事件 Ω；

（4）事件 $D=$“出现的点数大于 6”，Ω 中任意样本点都不在 D 中，所以 D 是空集，即不可能事件 $\varnothing$。

1.1.4　随机事件的关系与运算

在实际的问题中，我们常会遇到一些比较复杂的事件，需要对其进行相应的组合，这些就涉及随机事件间的关系与运算。

1. 事件的关系

（1）若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。例如，$A=\{1\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则有 $A \subset B$。

（2）若事件 A 与事件 B 同时满足：$A \subset B$ 和 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$。例如，甲乙两队进行足球比赛，开赛前约定：抛一枚硬币，出现正面，则甲队先发球。记事件 $A=\{$甲队先发球$\}$，事件 $B=\{$正面向上$\}$，则有 $A=B$。

（3）若事件 A 与事件 B 同时发生，则称事件 A 与事件 B 相交或事件 A 与事件 B 的积，记作 $A \cap B$ 或 AB。若 $AB=\varnothing$，即事件 A 与事件 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥。例如，$A=\{1, 4\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，$C=\{3, 5\}$，则有 $AB=\{1\}$，$AC=\varnothing$。

类似地，若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

（4）若事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称事件 A 与事件 B 相并或事件 A 与事件 B 的和，记作 $A \cup B$。例如，$A=\{1, 4\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则有 $A \cup B=\{1, 3, 4, 5\}$。若事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，即 $A \cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 对立或互逆，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。

类似地，若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生，则称 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。

（5）若事件 A 发生而事件 B 不发生，则称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$。例如，$A=\{1, 4\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则有 $A-B=\{4\}$。

此外，对于同一随机试验 E 中的事件 A，B，C，事件间的运算还满足下述规律：

①交换律：$A \cup B=B \cup A$；$AB=BA$；

②结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$；$(AB)C=A(BC)$；

③分配律：$(A \cup B)C=(AC) \cup (BC)$；$(AB) \cup C=(A \cup C)(B \cup C)$；

④对偶律：$\overline{A \cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A} \cup \overline{B}$。

1.2　概率的定义及其确定方法

在这一节中，我们要给出概率的定义及其确定方法，这是概率论中最基本的一个问题，简单而直观的说法就是：概率是随机事件发生的可能性大小。对此，我们先看下面一些经验事实：

（1）随机事件的发生是带有偶然性的，但随机事件发生的可能性是有大小之分的。

例如口袋中有 10 个相同大小的球，其中 9 个黑球，1 个红球，从口袋中任取 1 球，人们的共识是：取出黑球的可能性比取出红球的可能性大。

（2）随机事件发生的可能性是可以设法度量的，就好比一根木棒有长度，一块土地有面积一样。例如抛一枚硬币，出现正面与出现反面的可能性是相同的，各为$\frac{1}{2}$。足球裁判就用抛硬币的方法让双方队长选择场地，以示机会均等。

（3）在日常生活中，人们对一些随机事件发生的可能性大小往往是用百分比进行度量的。例如购买彩票后可能中奖，也可能不中奖，而中奖的可能性大小可以用中奖率来度量；抽取一件产品可能为合格品，也可能为不合格品，而产品质量的好坏可以用不合格品率来度量；新生婴儿可能为男孩，也可能为女孩，而生男孩的可能性可以用男婴出生率来度量。这些中奖率、不合格品率、出生率等都是概率的原型。

那么如何来界定概率？在概率论发展史上，曾有过概率的古典定义、几何定义、频率定义和概率的主观定义等，但这些定义各适合一定的随机现象。那么如何给出适合一切随机现象的概率的最一般的定义呢？1900 年数学家希尔伯特（Hilbert）提出要建立概率的公理化定义以解决这个问题，即以最少的几条本质特性出发去刻画概率的概念。1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）首次提出概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处，不管什么随机现象，只有满足该定义中的三条公理，才能说它是概率。这一公理化定义迅速获得世界公认，是概率论发展史上的一个里程碑。有了这个公理化定义后，概率论得到了迅速发展。具体如下：

1.2.1 概率的公理化定义

定义 1.2.1 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，若对随机试验 E 的任意随机事件 A，一个实数值函数 $P(A)$ 满足：

（1）非负性公理：$P(A) \geqslant 0$；

（2）正则性公理：$P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性公理：若 A_1，A_2，…互不相容，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**。

概率的公理化定义刻画了概率的本质，概率是集合（事件）的函数，若这个函数能满足上述三条公理，就被称为概率；若这个函数不能满足上述三条公理中任一条，就被认为不是概率。

公理化定义没有告诉人们如何去确定概率。历史上在公理化定义出现之前，概率的频率定义、古典定义、几何定义和主观定义都在一定的场合下，有着各自确定概率的方法。但在有了概率的公理化定义之后，把它们看作确定概率的方法仍然是恰当的。

下面介绍几种确定概率的方法，包括古典方法和几何方法等。

1.2.2　确定概率的古典方法

确定概率的古典方法是概率论历史上最先被研究的方法，它简单、直观，不需要做大量重复试验，而是在经验事实的基础上，对被考察事件的可能性进行逻辑分析后得出该事件的概率。

古典方法的基本思想如下：

（1）所涉及的随机现象只有有限个样本点；

（2）每个样本点发生的可能性相等（称为**等可能性**）。例如抛一枚均匀的硬币，“出现正面”与“出现反面”的可能性相等；掷一颗均匀的骰子，出现各点（1，2，…，6）的可能性相等；从一副扑克牌中任取一张，每张牌被取到的可能性相等；

（3）随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.2}$$

其中 n 为包含的基本事件总数，m 为事件 A 中包含的基本事件的个数。由上式（1.2.2）计算事件概率的方法称为**古典概率法**。古典概率法是概率论发展初期确定概率的常用方法，所得的概率又称为**古典概率**。在古典概率法中，求事件 A 的概率归结为计算 A 中含有的样本点的个数 m 和 Ω 中含有的样本点的总数 n 的比值。所以在计算中经常用到排列组合的方法。

例 1.2.1　彩票问题（抽样模型）

福利彩票“幸运 35 选 7”即购买时从 01，02，…，35 中任选 7 个号码，开奖时不重复地选出 7 个基本号码和一个特殊号码。中奖规则如下：

①一等奖：7 个基本号码；

②二等奖：6 个基本号码 +1 个特殊号码；

③三等奖：6 个基本号码；

④四等奖：5 个基本号码 +1 个特殊号码；

⑤五等奖：5 个基本号码；

⑥六等奖：4 个基本号码 +1 个特殊号码；

⑦七等奖：4 个基本号码，或 3 个基本号码 +1 个特殊号码。

试求各等奖的中奖概率。

解：因为这种抽奖问题为不重复地选号，是一种不放回抽样，根据排列组合原理，样本空间 Ω 中所含样本点的个数为 C_{35}^{7}，抽奖的过程应是在分成三类的 35 个号中抽取：

①7 个基本号码；

②1 个特殊号码；

③27 个无用号码。

记 p_i 为中 i 等奖的概率（$i=1，2，\cdots，7$），利用抽样模型得各等奖的中奖概率

如下：

$$p_1=\frac{C_7^7C_1^0C_{27}^0}{C_{35}^7}=\frac{1}{6724520}=1.49\times10^{-7}$$

$$p_2=\frac{C_7^6C_1^1C_{27}^0}{C_{35}^7}=\frac{7}{6724520}=1.04\times10^{-6}$$

$$p_3=\frac{C_7^6C_1^0C_{27}^1}{C_{35}^7}=\frac{189}{6724520}=2.81\times10^{-5}$$

$$p_4=\frac{C_7^5C_1^1C_{27}^1}{C_{35}^7}=\frac{567}{6724520}=8.43\times10^{-5}$$

$$p_5=\frac{C_7^5C_1^0C_{27}^2}{C_{35}^7}=\frac{7371}{6724520}=1.096\times10^{-3}$$

$$p_6=\frac{C_7^4C_1^1C_{27}^2}{C_{35}^7}=\frac{12285}{6724520}=1.827\times10^{-3}$$

$$p_7=\frac{C_7^4C_1^0C_{27}^3+C_7^3C_1^1C_{27}^3}{C_{35}^7}=\frac{204750}{6724520}=3.045\times10^{-2}$$

若记 A 为事件“中奖”，$\overline{A}$ 则为事件“不中奖”，由 $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$，得不中奖的概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-p_1-p_2-p_3-p_4-p_5-p_6-p_7=0.9665$$

这就说明，一百个人中约有 3 个人中奖，而中一等奖的概率仅有 1.49×10^{-7}，即两千万人中约有 3 个人中一等奖。

例 1.2.2 生日问题（盒子模型）

一个班有 n 个人，不计 2 月 29 日出生的（即假定一年为 365 天），全班至少有两人生日相同的概率是多少？

解： 把 n 个人看成 n 个球放入 $N=365$ 个盒子中。因为每个球都可放到 N 个盒子中的任一个内，所以 n 个球放的方式共有 N^n 种，它们是等可能的。而 P（至少两人生日相同）$=1-P$（生日全不相同），其中“生日全不相同”就相当于“恰有 n（$n\leqslant N$）个盒子各有一球”，所以 n 个人的生日全部不相同的概率为

$$P(\text{生日全不相同})=\frac{A_N^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}=\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

$$P(\text{至少两人生日相同})=1-P(\text{生日全不相同})=1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

根据班级人数 n，我们可以求出至少有两人生日相同的概率，如

$$p_{20}=0.4114,\ p_{30}=0.7063,\ p_{50}=0.9704,\ p_{60}=0.9941$$

1.2.3　确定概率的几何方法

古典概率法只考虑了有限等可能结果的随机变量的概率模型。这里我们进一步研究样本空间为线段、平面区域或空间立体等的等可能随机变量的概率模型，我们称为概率的几何方法。

其基本思想是：

(1) 如果一个随机现象的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量（如长度、面积、体积等）大小可用 S_Ω 表示；

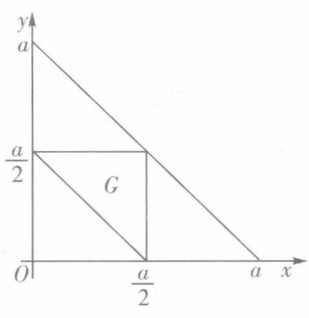
(2) 任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的，譬如在样本空间 Ω 中有一单位正方形 A 和直角边长为 1 与 2 的直角三角形 B，而点落在区域 A 和区域 B 是等可能的，因为这两个区域的面积相等；

(3) 若事件 A 为 Ω 中的某个子区域，且其度量大小可用 S_A 表示，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$$

这种概率称为**几何概率**。

求几何概率的关键是对样本空间 Ω 和所求事件 A 用图形描述清楚（一般用平面或空间图形），然后计算出相关图形的度量（如面积或体积等）。



例 1.2.3　长度为 a 的棒任意折成三段，求它们可以构成一个三角形的概率。

解：设折得的三段长度分别为 x，y 和 $a-x-y$，那么样本空间 $S_\Omega=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant a-x-y\leqslant a\}$。而随机事件 A："三段构成三角形" 相应的区域 S_A 应满足两边之和大于第三边的原则，得到联立方程组

$$\begin{cases}a-x-y<x+y\\ x<a-x\\ y<a-y\end{cases}，解得\ 0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<x+y<a,$$

即 $S_A=\{(x,\ y)\mid 0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<x+y<a\}$，由图中计算面积之比，可得到相应的几何概率

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{1}{4}$$

1.2.4 确定概率的频率方法

若古典概率法的两个条件不能满足，此时如何定义概率？常用的一种方法是把含有事件 A 的随机试验独立重复 n 次；记事件 A 发生的次数为 n_A，也称 n_A 为事件 A 的频数，称比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率。人们的长期实践表明，随着试验重复次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会稳定在某个值 p 附近，我们称这个常数 p 为频率的稳定值，这个值 p 就定义为事件 A 的概率。

例 1.2.4 一口袋中有 6 只乒乓球，其中 4 只白球，2 只红球。每次试验任取一球，观察颜色后做记录，放回袋中搅匀，再重复。

表 1.2.1 取球试验的若干结果

取球次数（n）	出现白球次数（n_A）	频率（$\frac{n_A}{n}$）
200	139	0.695
400	261	0.653
600	401	0.668

在本例中，取出的球为白球的频率在 0.66 附近摆动，当 n 增大时，逐渐稳定于$\frac{2}{3}$。

例 1.2.5 历史上很多人做过抛硬币的试验，考察“正面朝上”的次数，其结果见表 1.2.2。

表 1.2.2 历史上抛硬币试验的若干结果

实验者	抛硬币次数（n）	出现正面朝上次数（n_A）	频率（$\frac{n_A}{n}$）
蒲丰（Buffon）	4040	2048	0.5069
克里奇（Kerrich）	10000	5067	0.5067
皮尔逊（K. Pearson）	12000	6019	0.5016
皮尔逊（K. Pearson）	24000	12012	0.5005

在本例中，抛出的硬币正面朝上的频率在 0.50 附近摆动，当 n 增大时，逐渐稳定于$\frac{1}{2}$。

注意：确定概率的频率方法虽然是很合理的，但此方法的缺点也是很明显的。在现实中，人们无法把一个试验无限次地重复下去，因此要精确获得频率的稳定值是很困难的。但频率方法提供了概率的一个可供想象的具体值，并且在试验重复次数 n 较大时，可用频率给出概率的一个近似值，这是频率方法最有价值的地方。在统计学中常用频率作为概率的估计值。

1.2.5　概率的性质和计算公式

利用概率的公理化定义可推导出频率的一系列性质和概率计算公式，以下我们逐一给出概率的一些常用性质。

性质 1.2.1　必然事件 Ω 的概率为 1，不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0，即

$$P(\Omega)=1,\ P(\varnothing)=0$$

性质 1.2.2　对任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

若有限个事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 1.2.3　对任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

若 $B\subset A$，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

性质 1.2.4　对任意事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

其中 $\overline{A}$ 为事件 A 的对立事件。在计算概率时，有些事件直接考虑较为复杂，而考虑其对立事件的概率则相对比较简单，如例 1.2.2 中，我们直接求“至少有两人生日相同”的概率相对比较复杂，而利用它的对立事件“生日全不相同”的概率来求相对要简单很多。

例 1.2.6 已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，$P(AB)=0.2$，求 $P(A\cup B)$，$P(A-B)$，$P(\overline{A})$。

解：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0.2=0.6$$
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0.2=0.1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7$$

1.2.6 条件概率及乘法公式

在实际中，除了前文所述各事件的概率问题外，还会遇到“在事件 A 已经发生的条件下，求事件 B 发生的概率”问题，这就是条件概率，记为 $P(B|A)$。

定义 1.2.2 设有两个事件 A 和 B，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的**条件概率**。

类似地，当且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。易证，条件概率同样满足概率的公理化定义，即

（1）非负性：$P(B|A)\geqslant 0$；

（2）正则性：$P(\Omega|A)=1$；

（3）可列可加性：若 B_1，B_2，…互不相容，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$。

因此，条件概率也是概率，具有概率的一切性质。

定义 1.2.3 当 $P(A)>0$，由条件概率定义 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，则有

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$

类似地，当且 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

它们都称为概率的**乘法公式**。

对于多个事件的情况，条件概率的乘法公式也适用。例如，设三个事件 A，B，C，且 $P(AB)>0$，则有