“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第四版（上册）

复旦大学数学系
欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第四版（上册）

复旦大学数学系
欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书在2007年出版的第三版的基础上作了全面修订。这次修订，主要在文字上作了不少修改，使概念的表述和定理的论证更清晰，读起来也更通顺流畅；适当补充了数字资源（以符号■标识）。

本书分上下两册，上册内容为极限初论、极限续论、单变量微分学、单变量积分学；下册内容为数项级数和反常积分、函数项级数、多元函数的极限与连续、多变量微分学、多变量积分学。

本书可作为一般院校数学类专业的教材，也可作为工科院校以及经济管理类院系中数学要求较高的专业的数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析. 上册/欧阳光中等编. --4版. --北京：高等教育出版社，2018.8

ISBN 978-7-04-049718-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①欧… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第088960号

项目策划 李艳馥 兰莹莹 李 蕊

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 张晓丽　封面设计 张志奇　版式设计 王舒婷

插图绘制 于 博　责任校对 张 薇　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	河北鹏盛贤印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	16.5	版　次	1978年5月第1版
字　数	340千字		2018年8月第4版
购书热线	010-58581118	印　次	2018年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	34.20元

物 料 号 49718-00

数学分析

第四版（上册）

复旦大学数学系

欧阳光中　朱学炎　金福临　陈传璋　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/127915，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

数学分析简史（上）　　数学分析简史（下）　　第一版前言

http://abook.hep.com.cn/127915

第四版前言

本书第四版和第三版相比，主要在文字上作了不少修改，希望新的一版对概念的表述和定理的论证更清晰些，读起来更通顺流畅。如在利用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的有界性和一致连续性之前，先讲述利用有限覆盖定理的作用，是将处理无限多个开区间的问题化为只需处理有限多个开区间，使问题迎刃而解。

新版对旧版的内容作了少量删减，上册删除了定积分中的椭圆积分，下册删除了一些带 * 号的内容，如删减了无穷乘积、函数相关和算子 ∇ 等，只保留反常积分中的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法，仍将它们作为带 * 号的内容。

新版保留了原第三版的习题，仅作极个别的删减。

本版内容有少量增加，增加的内容都是直观描述性的。如在定积分中增加了一小段关于黎曼可积的充要条件，从直观上引进零测度集的概念，然后介绍函数的黎曼可积和函数几乎处处连续的关系，使读者不仅有一个更高的观点，而且从一个更有趣也更容易接受的观点看待定积分存在的条件。又如在级数的阿贝尔变换中，增加了对该变换的几何解释，使阿贝尔变换成为一个很容易接受的直观结论。再如在重积分的变量代换中，从直观上引进外积，从而使重积分的变量代换变成更直接更简单的一种代数运算，也便于记忆，甚至可以代替烦琐的证明。

最后，我们希望本书的读者群会不断扩大，更希望使用本书的众多教师和广大读者对本书提出宝贵的批评和建议，谢谢。

欧阳光中　朱学炎

2017 年 10 月

第三版前言

目 录

第一篇 极 限 论

第一部分 极 限 初 论

第二部分　极限续论

第二篇　单变量微积分学

第一部分　单变量微分学

第二部分 单变量积分学

第一篇
极限论

第一部分
极限初论

第一章
变量和函数

§1 函数的概念

一、变量

在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在考察过程中保持不变的量，这种量称为**常量**. 还有一种是在这一过程中会不断变化的量，称为**变量**. 例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看成常量. 再如将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量. 在数学中，常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系，但在研究过程中有时还是需要注意它们的具体意义.

这些量，例如时间、质量、压力、温度、分子数等，都可以用实数来表示，所以应该称它们为实变量或实常量. 本书的研究对象都是实变量和实常量. 也简称它们为变量和常量.

在中学代数里已经知道，实数包括有理数和无理数两种. 所有整数、所有分数统称为有理数. 换句话说，凡能表示为$\frac{p}{q}$（这里 p,q 为整数，$q>0$，并设 p 和 q 无公因子）形式的数就是**有理数**. 除了这种形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数，如$\sqrt{2}$，圆周率 π 等，称为**无理数**. 关于实数的严密理论，这里不叙述了，但以下几个重要性质，还需读者注意：

（i）实数和直线上的点有着一一对应的关系，并称这条直线为实数轴. 今后我们将经常利用实数轴上的点来表示实数，而把实数轴上的点和实数统一起来，不加区别.

（ii）有理数在实数中是稠密的，也就是说，在任何两个不同的实数之间必存在着有理数. 同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之间也必存在着无理数.

（iii）有理数与有理数的和或差仍为有理数. 有理数与无理数的和或差为无理数. 无理数与无理数的和或差可能仍为无理数，也可能为有理数.

在观察各种运动过程的时候还发现,有些变量具有一定的变化范围.例如自由落体的下降时间和距离只有在落体落到地面以前才有意义.

变量的变化范围,也就是变量的取值范围,在取实数值的时候,往往用区间表示:设 a,b 是有限数,$a<b$,满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 的全体组成一个闭区间,记为$[a,b]$,也可以说:变量 x 的变化范围为闭区间$[a,b]$.满足不等式 $a<x<b$ 的 x 的全体组成开区间(a,b).而满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的 x 的全体组成半开半闭的区间$(a,b]$或$[a,b)$.如果变量 x 能够取实数轴上所有的数,我们把它的变化范围记为$(-\infty,+\infty)$,在这里"∞"并不表示数量,它只不过是一个记号,前面的"+""-"表示方向.例如,$x\geqslant a$ 的 x 全体可记为$[a,+\infty)$,又如 $x\leqslant a$ 的 x 全体可记为$(-\infty,a]$等.有时候,在并不一定要指明是开的或闭的场合,也常用 X,Y 等来表示区间.

特别地,$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$是以 x_0为中心,长度为 2δ 的开区间,我们称它为点 x_0的 δ 邻域,记为 $O(x_0,\delta)$.

二、函数

在同一现象中的各种变量通常并不都是独立变化的,它们之间存在着依赖关系,我们考察如下几个具体例子:

(1) 自由落体运动的规律:根据自由落体公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

这里 s 表示下降距离,t 表示时间,g 是重力加速度.这个公式指出了在物体自由降落的过程中,距离 s 和时间 t 的依赖关系.

(2) 用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个高为 x 的无盖小盒(如图 1-1).于是这盒的体积 V 和高 x 存在着依赖关系

$$V=x(a-2x)^2.$$

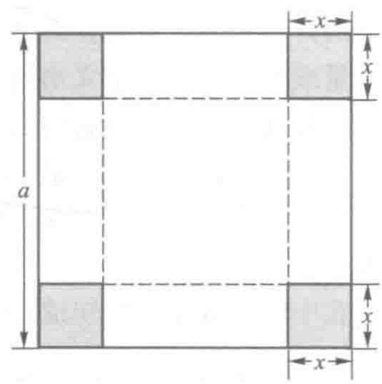

图 1-1

(3) 在中学的数学课程中,已经讲到过许多有用的函数,例如直线函数 $y=ax+b$(其中 a,b 都是常数),又如 $y=\tan\dfrac{x}{2}$,$y=5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$等三角函数以及对数函数 $y=\lg(1+x)$和指数函数 $y=2^x$等,它们给出了变量 x 和变量 y 的依赖关系.

从以上这些依赖关系中可以看到一些共同的特征:

(i) 在这些依赖关系中,某一个变量变化时,另一个变量也相应地变化,我们把前者称为**自变量**,而随着它相应变化的量称为**因变量**.如上例中的时间 t,盒高 x 就是自变量,而下降距离 s 和盒的体积 V 就是因变量.此外,在某一过程中,哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的,例如在自由落体公式中,如果已经知道下降距离为 s 而要求出经过了多少时间 t,这时就视距离 s 为自变量,而 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$ 就成为因

变量了.

(ii) 自变量有一定的变化范围. 如(1)中的时间 t,在这个运动过程中,如果把物体刚开始下落的时刻记为 $t=0$,把物体刚到达地面的时刻记为 $t=T$,那么时间 t 的变化范围只能是在 0 与 T 之间,即 t 的变化范围是闭区间 $[0,T]$. 又如(3)中的函数 $y=\lg(1+x)$,从对数函数的性质容易知道,自变量 x 的变化范围只能是 $x>-1$,即 x 的范围是 $(-1,+\infty)$. 当然相应地因变量也有一定的变化范围.

(iii) 对自变量的变化范围内的每一个确定的值,通过依赖关系,总能得到一个确定的并且唯一的因变量的值.

把这种特征抽象出来,便得到函数的概念.

函数的定义　如果对某个范围 X 内的每一个实数 x,可以按照确定的规律 f,得到 Y 内唯一一个实数 y 和这个 x 对应,我们就称 f 是 X 上的**函数**,它在 x 的数值(称为**函数值**)是 y,记为 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 有时我们也称这个 y 是 x 的**像**,称 x 是 y 的一个**逆像**. 用数学记号把这件事表达出来就是

$$\begin{aligned} f:&X\to Y\\ x&\mapsto f(x). \end{aligned}$$

这个记号有两层意思:(i) 它表明通过函数 f 的作用,把整个 X 变到 Y 里面去,我们用记号 $X\to Y$ 来表示这一层意思. (ii) 对 X 内每一个实数 x,在 f 的作用下,变为 Y 内的唯一一个实数 y,记作 $f(x)$,或者说,在 f 的作用下,x 的像是 $f(x)$,也可以说 f 在 x 的函数值是 $f(x)$,我们用记号 $x\mapsto f(x)$ 来表示它.

我们称 x 是自变量,y 是因变量,又称 X 是函数 f 的**定义域**,它表示对 X 内的任何实数 x,在 f 的作用下是有意义的,或者说,$f(x)$ 是有意义的,它是 Y 内唯一确定的一个数. 当 x 取遍 X 内的所有实数时,相应的函数值 $f(x)$ 的全体所组成的范围叫做函数 f 的**值域**,要注意的是:值域并不一定就是 Y,它当然不会比 Y 大,但它可能比 Y 小.

例 1　中学里已经学过的正弦函数 f,用上述的记号写出来就是(设 $X=Y=(-\infty,+\infty)$)

$$\begin{aligned} f:&X\to Y\\ x&\mapsto y=\sin x. \end{aligned}$$

它表示正弦函数把所有实数变成另一些实数,并且把每一个具体的实数 x 变成实数 $\sin x$,这个 $\sin x$ 就是函数 f 在 x 点的函数值. 这时,f 的定义域是 $X=(-\infty,+\infty)$,而值域是 $[-1,1]$,它比 Y 小.

例 2　设 $X=(0,+\infty)$,$Y=(-\infty,+\infty)$,

$$\begin{aligned} \varphi:&X\to Y\\ x&\mapsto y=\lg x. \end{aligned}$$

它表示对数函数把 $(0,+\infty)$ 内的实数变成另一些实数,对每一个正的实数 x,φ 在 x 点的函数值是 $y=\lg x$,这就是我们所熟悉的对数函数,它的定义域是 X,值域是 $(-\infty,+\infty)$,值域等于 Y.

通常,为了省略,而略去上面所写的那些记号,干脆把函数

$$f\ :X\to Y,$$
$$x\ \mapsto y=f(x)$$

简单地记为$f(x)$，或 $y=f(x)$，例如函数 $y=\sin x$，函数 $y=\lg x$ 等.

例 3　函数

$$f(x)=\sqrt{\sin x}$$

只有当根号内的 $\sin x$ 非负时，这个函数才有意义，可见它的定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，函数的值域为$[0,1]$.

特别地，当 $x=0$ 时，函数值是 0，即 $f(0)=0$，类似地还有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}=1,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\ .$$

把这个函数用定义中的记号写出来就是，设 X 是由区间$[2n\pi,(2n+1)\pi](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$所组成的，$Y=(-\infty,+\infty)$，

$$f\ :X\to Y$$
$$x\ \mapsto\sqrt{\sin x},$$

f 的定义域是 X，值域是$[0,1]$.

例 4　函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

的定义域为满足下列不等式的全部 x 值：

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0,$$

解之得 $x>2$ 或 $x<-1$，这就是定义域. 如果用区间来表示，定义域为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. 函数的值域为$(0,+\infty)$. 特别地，

$$f(4)=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad f(-2)=\frac{1}{2}.$$

例 5　设

$$f\ :(a,b)\to(-\infty,+\infty)$$
$$x\ \mapsto C\quad（常数）,$$

即对(a,b)内的任何 x，都有 $f(x)=C$. 它是一个在其定义域内取常数值的函数.

下面说明何谓两个函数相等. 对于两个函数 f 和 g，当且仅当它们有相同的定义域 X，且对 X 内的每一个实数 x，它们有相同的函数值，我们才称这两个函数相等，记为 $f=g$. 显然，它们的值域也必相同.

例如函数

$$y=\sin x\quad 和\quad y=\frac{x\sin x}{x},$$

前者的定义域为$(-\infty,+\infty)$；后者的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 实际上第二个函数虽然在 $x\neq0$ 时有 $y=\sin x$，但在 $x=0$ 没有定义，因此，这两个函数并不相等，因为它们的定义域不一样.

还应该注意的是，在函数概念中，并没有表明变量间的函数关系非得用一个式

子来表达不可. 事实上,例如火车时刻表、出站和进站的车次都是时间的函数,但它一般不用式子来表达,而是用列表的方法来表示这种函数关系. 气象站中的温度记录器记录了温度与时间的一种函数关系,这种关系既不用一个式子来表达,也不用列表法来表达,而是借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的. 再如下例所给出的一个常用的函数关系,是用一句话来表示的.

例 6　"y 是 x 的最大整数部分",这句话的意思是说,对任何一个实数 x,y 是小于或等于 x 的最大整数. 这句话能不能确定一个函数关系呢? 现在我们考察一下:因为对于任何实数 x,总可以把它表示为一个整数和一个非负小数之和,也就是

$$x=[x]+(x),$$

这里 $[x]$ 是一个整数,(x) 是一个非负小数,$0\leqslant(x)<1$,例如当 $x=\frac{7}{2}$ 时,$[x]=3$,$(x)=0.5$,而当 $x=-2.41$ 时,$[x]=-3$,$(x)=0.59$. 容易看出,$[x]$ 就是 x 的最大整数部分,它由 x 唯一确定. 换句话说,对任何一个实数 x,总有唯一的一个 $y=[x]$ 和这个 x 对应. 因而"y 是 x 的最大整数部分"这句话确定了一个函数

$$f\ :X=(-\infty,+\infty)\to Y=(-\infty,+\infty)$$
$$x\mapsto[x],$$

f 的值域是一切整数. 于是在引进一个新的记号 $[x]$ 后,上面用一句话表示的函数可以记为

$$y=[x].$$

如图 1-2 所示,例如,当 $x=2.17$ 时,

$$y=[2.17]=2;$$

当 $x=-3.91$ 时,

$$y=[-3.91]=-4.$$

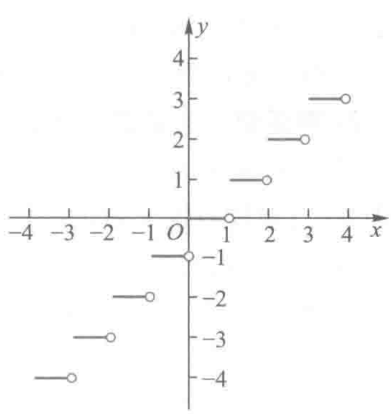

图 1-2

再来考察天文学中的开普勒(Kepler)方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

(这里 ε 为常数,$0<\varepsilon<1$),又是另一种形式. 在这方程中甚至不可能将 y 用 x 的明显式子表示出来. 尽管如此,我们以后将会知道 y 的确是 x 的函数. 一般说,凡是由方程

$$F(x,y)=0$$

确定的函数关系,称为**隐函数**. 开普勒方程就确定一个隐函数. 需要注意的是:随便写一个方程并不一定就是一个隐函数. 究竟在什么条件下能够由一个方程来确定一个隐函数呢? 这将在本书下册的隐函数存在定理中专门讨论. 隐函数的理论在数学的许多分支中有重要应用.

三、函数的一些几何特性

关于函数还有几个常用的概念必须叙述一下,这些概念都和函数图形的特性有关,例如单调函数、奇函数、偶函数、周期函数. 其中有些概念在中学课程里已经叙述过,因此,这里只是简单地提一下.