现代数学基础丛书 175

线性代数导引

冯 琦 编著

科学出版社

现代数学基础丛书 175

线性代数导引

冯 琦 编著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书内容包括数、数的加法和数的乘法，以及由此延伸开来的群、环、域、多项式和向量空间. 与其他线性代数的教科书不同的是立足点和理论框架的选择. 本书不将任何数及其算术运算当成给定的原始概念，而是从数学基础的角度建立起它们的确切解释，并将这样的解释作为数学的一种基础，进而建立和发展线性空间的基本理论.

本书是为刚进大学(尤其是对线性代数有兴趣)的学生写的. 对于熟知线性代数理论但忽略线性代数基础的高年级本科生，甚至研究生，本书也将提供有益的参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导引/冯琦编著. —北京: 科学出版社, 2018.9
(现代数学基础丛书; 175)
ISBN 978-7-03-058734-3

I. ①线… II. ①冯… III. ①线性代数 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 206957 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 9 月第一次印刷 印张: 56 1/2
字数: 1121 000

定价: 198.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨 乐

2003 年 8 月

序　言

过去四年 (自 2014 年秋至今) 里, 受席南华之邀在中国科学院大学 (以下简称“国科大”) 给一年级 (非数学专业) 新生讲授“线性代数 I”和“线性代数 II”. 虽然学生都是非数学专业的, 但教学大纲还是一样的, 只不过对大纲的解释有些差别; 两个学期所使用的教材也是一样的, 都是苏联学者柯斯特利金的《代数学引论》第一卷和第二卷. 第一卷由张英伯翻译, 第二卷由牛凤文翻译, 都由高等教育出版社出版 (2012 版本). 柯斯特利金的教材是为莫斯科大学数学力学系的学生写的. 所以, 教材对学生的假设或者课前要求自然和国科大非数学专业的刚入学的学生的实际状况难免不相吻合. 再加上语言文化习惯和表达方式的差别, 在阅读柯斯特利金教材中译本的时候, 学生们普遍地感到为难多于适应. 为了有效地帮助这些学生, 我便按照大纲的要求和教材的框架写成每周的课堂内容概要分发给学生. 四年来, 看过这些课堂内容概要的学生们认为还有帮助. 于是, 我便有了写一本《线性代数导引》(以下简称《导引》) 的念头. 这本《导引》是为刚进大学 (尤其是对他们中间那些对线性代数有兴趣) 的学生写的. 除去前面部分关于数的解释内容多半是新添加的, 基本都是一学年课程所覆盖的内容 (也有作为补充阅读材料的).

席南华刚刚写了两卷本的《基础代数》(科学出版社, 2016, 2018), 也是主要为国科大全体一年级新生写的. 或许因为席南华教的学生是数学专业的, 我教的学生是非数学专业的, 我们自然会对学生课前预备状态的假设有所不同, 课后的期望也会有些差别. 这种差别也就体现在课堂上和对同一本教材内容的选择性解释之中. 可想而知, 这本《导引》会不同于席南华的《基础代数》. 国内早先的线性代数学的优秀教材很多, 对我影响最大的是中国科学院数学研究所许以超先生的《代数学引论》(上海科学技术出版社, 1966). 正是许先生的这本内容极其丰富的《代数学引论》帮助我通过了哈尔滨工业大学计算机科学系软件专业 1981 年的研究生代数学考试. 那次备考带给我的真实体会就是一本好书带给爱好它的学生的感受是可以永久回味的难以言表的思维深处的美妙. 许先生后来改写了这本书, 以《线性代数与矩阵论》为书名由高等教育出版社出版 (1992, 2008). 面对许先生、席先生、苏联的柯先生以及其他人所作的线性代数的美妙之作, 我的确很犹豫是否还要花精力再写一本线性代数入门教材. 后来一个简单的意识最终触动了我自己. 因为我是受数理逻辑专业训练的, 在我熟悉的圈内有一种普遍说法, 就是现代数学是建立在数理逻辑和集合论之上的, 而线性代数学恰好是最能用来说明这一点的. 所以, 我找到了自己的立足点. 于是, 我愿意将自己在国科大过去四年来的课程内容概要整理成

《线性代数导引》呈献给学生.

线性代数学入门课程的内容在时间轴上的分布涵盖数千年的人类数学的发展,就算有一道看起来新鲜的习题也几乎一定是重述先人智慧的产物. 所以, 在这本《导引》之中, 不会有属于作者的新发现; 作为一本入门教材, 这不过是总结别人智慧的产物, 尽管在选材和结构上可以有差别. 同时, 像研究型著作那样去标明每一道命题的原始出处将是困难、耗时且根本没有必要的事情. 现代信息时代, 任何有心的读者都可以在互联网上一瞬间查获所要的历史渊源. 这也就成了作者为自己节省时间免去繁琐的借口, 希望读者海涵. 《导引》的最后列有基本参考书目, 这本《导引》中的命题或者证明或者习题自然分别取自它们. 它们是源, 这本《导引》是池,作者则是将源中水搅和在一起的机器. 既望作者们见谅, 也望读者们宽容. 作者看重的是《导引》中概念演绎的逻辑结构和发展顺序, 因为作者愿意相信线性代数学无论是知识还是方法, 就其思想而言, 终究是有着深刻的典型的承前启后自然发展的关联的. 也就是说, 线性代数学有着自身天然的知识结构. 所以, 在将源头之水搅和于池中的时候, 作者没有太过注重其出处, 只在意它们各自在统一逻辑进程中的关联和结构位置. 就影响的轻重多寡而言, 柯斯特利金的《代数学引论》自然是重中之重, 因为它毕竟是国科大一年级学生的通用教材, 而且教学大纲就是以这本教材为蓝本设计的; 其次当属许以超的《线性代数与矩阵论》, 因为它的第一版毕竟是多年前就带给作者极大影响的一本书; 然后当然是席南华的《基础代数》, 因为我们都在用各自的理解来解释柯斯特利金的《代数学引论》, 能够参考他的书是一种特有的幸运. 尽管有着天然的保持独立性的倔强, 近朱者赤, 受其影响到底是在所难免的. 也借此机会表示对许先生和席先生真诚的敬意和谢意, 也对柯斯特利金《代数学引论》的翻译者, 尤其是张英伯先生, 表示敬意和谢意.

最后, 请允许我借机表达对我高中时期既在课内又在课外教我线性代数学的超级热心的周典老师特别的敬意和谢意. 周典老师是开启我数学思维的启蒙者. 请允许我表达对我大学时期教我线性代数和离散数学两门课程的王义和老师的特别的敬意和谢意. 王义和老师, 亦师亦友, 是无意之中引导我从计算机软件专业转向基础数学的导师.

当然, 我还要感谢的是科学出版社和李静科编辑. 如果没有科学出版社和李编辑的热情支持和细心帮助, 这本《导引》未必可以与读者见面.

冯　琦

2018 年 8 月

中国科学院数学与系统科学研究院

中国科学院大学

目　录

绪　论

这本《导引》所涉及的基本对象就是数、数的加法和数的乘法. 自然, 这是我们从小学到高中都已经花了太多时间和精力慢慢变得熟悉起来的基本对象. 现在我们都上大学了, 为什么还要花时间来探讨数、数的算术运算这些早已熟悉了的事物? 因为对于这些熟悉的事物我们未必已经有了充分的认识. 当然, 何为充分? 这是一个仁者见仁智者见智的形容词. 在这里, 我们需要重新认识数与数的算术运算, 是因为我们希望对它们有一个系统性的认识, 并且这种系统性还必须限制在遵守线性等式规则的范围之内. 如果说我们在进大学之前所接触到的数与数的算术都是具体的事物的话, 那么我们现在将从它们身上抽象出最本质的性质来, 然后带着这些抽象的性质以及由这些抽象性质组合出来的概念去识别新事物 —— 那些我们还没有来得及见过面的新鲜的具体的东西. 如果说从小学到高中关于数与数的算术的认识是一个漫长的过程的话, 那么这个过程的结果就是将我们带到了崇山峻岭之中一座风光无限美妙的高峰脚下, 而我们当前的任务就是要去寻找一条登上顶峰的最佳观景之路. 诗人杜甫曾经有言: 会当凌绝顶, 一览众山小. 登顶不是目的, 观景才是动机. 能够在寻找登顶路径之中得到乐趣以及一路领略不断登高所带来的尽收眼底的风光才是这本《导引》的引导功用. 自然, 当读者自己沿着自己寻找的登山之路登上峰顶再环顾四周乃至鸟瞰曾经的出发之地时, 一定会有自己特殊的感受, “横看成岭侧成峰, 远近高低各不同.”

《导引》将如何引导?

第一要务自然是系统地解释数和数的算术运算的内涵. 这一要务被分布在前三章里逐步完成. 这会是与其他线性代数的教科书在立足点上不相同的地方. 这本《导引》不将任何数当成给定的原始概念, 而是给出一种确切的解释, 因为这实在是数学中最为基础的部分. 作者自然希望借机建立起数学基础的一个例子或者一种解释, 这也是写作这本《导引》的一个原始驱动.

《导引》中关于数和数的运算的解释将建立在集合以及集合之间的属于关系这两个不加定义的原始概念之上. 我们将根据这种解释的需要给出关于集合与属于关系必须遵守的基本性质. 一切展开都将在这个基础之上进行, 不可或缺的自然是逻辑基础. 我们会在一开始就解释线性代数里真与假到底都意味着什么以及如何在明确这种真假含义的基础上展开推理和论证. 这些逻辑基础其实应当是掌握和运用数学理论的常识, 只是常识这个名词也的确是一个在内涵上解释起来会因人而异的名词. 所以, 这个开篇会是希望读者不断回来重温的一节. 在明确了逻辑基础

之后, 我们将展示集合论基础. 一切从这里开始.

首先是关于自然数的解释. 这将由自然数集合的确定来实现, 这种确定将展示我们所熟悉以及后面所需要的有关自然数的基本性质. 由于数的加法和乘法事实上就是两类特殊的二元函数, 我们就将线性代数的基本对象锁定在函数这个基本概念之上. 事实上, 这本《导引》中的线性代数内涵完全依托着函数这个基本概念来展现. 函数的复合是我们得到新函数的最基本的操作. 因此, 函数与函数的复合会是这本《导引》最基本的经过严格定义而得到的概念. 与函数概念直接关联的导出概念为单射、满射和双射. 我们将会看到所有线性代数里的方程或者方程组都是为了回答所给定的具体的某些函数是否为单射、满射, 或者为了验证是否存在函数所确定的对应关系, 这一类的询问而展示出来的问题形式. 与函数以及函数复合这两个基本概念并驾齐驱的基本概念就是等价关系和商集. 可以说集合论基础部分的主要任务就是严格地定义这四个基本概念. 打一个不太确切的比喻, 这四个基本概念就如同制造汽车四个轮子所需要的模具, 函数与等价关系用来制造驱动轮, 函数复合与商集用来制造导向轮. 在线性代数乃至数学的许多分支中, 任何一次这些模具实质性的成功应用一定导致一种优美结构的诞生, 这本《导引》也不例外. 比如, 利用函数复合的基本性质, 我们引进半群和群的概念. 任何一个非空集合上, 在自己内部取值的一元函数的全体在复合之下就是一个半群; 而这些函数中的双射的全体在复合之下就是一个群. 这些甚至在自然数的加法和乘法运算定义之前就被引进来. 这是这本《导引》在选择概念引进顺序上所贯彻的一条原则: 当完成最自然的铺垫之后, 当一个概念呼之欲出的时候, 抓住第一时间展现它, 不用等到黄花菜都凉透之后. 说到底, 数学中的概念, 无非就是将一系列性质捆绑在一起, 将这些信息浓缩起来以最精炼的词汇表述出来的形式, 因为这是最有效的节省时间的方式. 比如, 所谓半群无非就是在一个非空集合之上有一个满足结合律的二元运算 (函数) 这句话的简称. 所以, 当有了足够的铺垫、概念呼之欲出的时候, 毫无拖延地引进来, 尽管这时有可能过于抽象或者例子很少或者难以充分展开, 但一旦未来有新的例子出现时, 读者将会有似曾相识的感觉, 原本抽象的概念就又一次被具体化. 也许, 这正是循序渐进悟透重要概念的一种可行的途径. 《导引》中的概念, 就如同一部电视剧中的人物, 随着故事进程的演绎发展而登场与再现, 始终担负着角色本来的使命功能. 铺垫、呼应、承上启下, 这些都是例子、概念在线性代数这部电视剧中的人物角色应当担负的一种使命功能. 群这个概念在自然数加法引进之前被引进还有一个很重要的原因. 如果说数学归纳法原理 (定理) 可以在自然数集合被确定之后就立即得到证明, 自然数的加法则必须等到函数概念被引进以及递归定义定理被证明之后. 递归定义定理保障在给定条件下根据某种可以实现的要求唯一确定一个定义在自然数集合之上的函数. 这是线性代数学乃至整个数学以及计算机科学经常使用的最为基本的一条定理. 毫无疑问, 它并没有像人们关注数学归纳法定理

那样被关注. 更有甚者, 在有的地方, 它被混淆地当成了数学归纳法. 或许, 这也是许多数学错误产生的一个根源, 因为只有当一个一致的计算过程存在的时候, 某种具有特殊性质的序列才可以被唯一地确定, 而有人恰恰在不具备可以保障能够实现所需要求的一致计算过程的情形下使用了归纳法, 这就必然导致错误. 基于这样的考虑, 这本《导引》先建立起递归定义定理, 再定义自然数加法和乘法. 作者在这里希望引起读者注意的是, 数学归纳法和递归定义定理是一架马车上的两个轮子, 支撑和连接这两个轮子的车轴就是自然数集合的秩序, 而这架马车就是自然数集合, 如果你希望成功地驾驭这架马车以到达目的地, 这两个轮子就缺一不可. 在完成自然数算术运算的解释定义之后, 利用自然数集合与函数双射的概念, 这本《导引》将有效地实现有限与无穷的区分. 也正是这种区分为我们带来额外收获: 有限置换群在这里被引进. 这自然为后面关于对称性与反对称性的探讨奠定了基础.

接下来的两章中, 《导引》会分别建立起整数和分数以及实数和复数的确切解释. 在第 2 章里, 以自然数范围内的赊账问题为引导, 依托自然数结构, 应用等价关系和商集概念, 实现从自然数到整数的扩展, 并建立起整数理论以及同余类数理论; 然后再以整数均分问题为引导, 再次应用等价关系和商集概念, 实现从整数到分数 (也就是有理数) 之扩展, 并建立起有理数有序域理论以及有理数平面有序域理论. 由于整数和有理数都有关于数的加法和乘法的运算, 在这一章里, 《导引》还系统地实现了在逻辑基础部分所引入的抽象的由变元、常元、加法运算和乘法运算迭代复合而成的项的含义的函数解释: 整系数多项式函数以及有理系数多项式函数被引进. 在这里读者有机会第一次回到逻辑基础部分体会“项”这个词的含义以及“真”“假”这两个相互冲突的名词的内涵. 《导引》关注有理数平面有序域是基于素数开方问题. 在这里, 我们可以有比较满意的对单个问题的解答, 但没有统一的解答. 这也就为后面的实数和复数的引入完成了铺垫. 从自然数到整数乃至同余类数, 从整数到有理数, 我们所用的工具就是很容易定义出来的自然的等价关系; 从有理数域到包含单个素数开方的扩张域, 也只需要在有理平面上引进一个合适的但依旧自然的乘法运算; 但是, 从有理数到实数, 这些代数手段已经捉襟见肘. 要想一劳永逸地解决全部素数开方问题, 这已不是同样适合于离散结构的代数方法可以奏效的任务, 因为实数轴与有理数轴最根本的差别就在于实数轴的连续性以及有理数轴的处处间断性. 用逻辑学的行话说, 这里涉及的是有理数的“二阶”性质, 也就是说, 有理数的子集合不得不被牵扯进来. 因此, 《导引》以有理数轴序完备化的方式定义实数轴, 然后再根据有理数有序域的基本性质在实数集合上定义实数的加法和乘法. 这就为实数这一直觉中的概念提供了典范的解释. 正是这种实数轴的连续性保证了在正实数范围内一元正整数次幂函数都是双射, 也就是说, 任何正实数都可以开任意次方; 也正是实数轴的这种连续性保证了任何奇次实系数多项式都有零点. 自然, 实系数多项式的引入为我们提供了再次回访逻辑基础的机会. 从实数到复数

的历程是代数的, 因为解决复数开方这样的问题我们在有理平面上已经见到过, 这里所需要的也是在实平面上引进一个合适的、自然的乘法运算. 依旧利用实数轴的连续性, 我们得以建立代数基本定理: 复系数多项式都有零点. 在这一章里, 利用数组, 我们将有机会见识可构造数, 也就是那些可以在平面上利用圆规和直尺作图标注出来的数; 也还有机会认识四元数. 所谓四元数, 其实就是四维实数集合笛卡儿乘积空间中的点, 或者向量. 关键是这个空间上可以配置一个乘法, 以至于所有的非零元构成一个非交换的乘法群. 为了解决开方问题, 我们两次步入平面、有理平面和实平面. 在这些平面上, 我们定义平面点之间的加法和乘法. 这就意味着我们开始远离我们曾经全身心关注的数, 因为这里的加法和乘法已经不再单单是数之间的运算. 我们开始关注另一类崭新的对象: 向量. 从数转向向量, 是线性代数实现华丽转身的瞬间. 而这种转身, 是在我们牢靠地建立起数系之后. 只有在我们真正深切地明白关于数的解释之后, 我们才可以坦然地面对以数组为基本对象的向量, 才可以坦然地面对几何中的点以及物理学中的向量. 当然, 只有在这种转身之后, 线性代数学才真正开始自己的探索, 因为线性代数学毕竟不是数论.

《导引》的第 4 章是多项式理论. 这既是对前两章中引入的多项式的系统性的重新认识, 也是为未来的需要奠定基础. 多项式理论, 更多的时候与整数理论相似, 比如带余除法、因式分解, 但其核心问题还是零点问题, 所以多项式理论归根结底是关于多项式的零点的理论. 毫无疑问, 这里面令人兴奋的结果是因式分解定理、根的判定定理以及揭示根与系数的关系定理. 就线性代数而言, 我们从两个方面关注多项式空间. 一方面, 它是一个有着良好性质的环, 而且从一开始就与开方问题直接相关; 另一方面, 它为我们先行展示出无穷维线性空间的风采, 并且它事实上是作为一系列有限维线性空间的自然极限而存在的, 尽管在这个时候我们还会尽量回避线性空间的维数的说法. 一旦我们后面的线性空间理论成熟起来, 这类多项式空间就为我们提供了熟悉的例子. 也可以认为这是一种铺垫. 自然, 另外一个理由就是我们后面关于线性算子的理论需要多项式理论.

《导引》对线性代数理论的探索在第 5 章正式拉开帷幕. 这一章的的确确是关于三维实空间的线性代数理论. 这里包揽着线性代数一般理论的具体实例. 无论是线性方程组问题、矩阵问题、线性映射问题、对称与斜对称多重线性函数问题, 还是几何向量空间中的度量问题, 这里都有缩影展示. 可以说, 在前面已有的铺垫和积累之上, 这里的内容几乎没有什么难度, 因为一切都十分具体, 具体到可以直接上手计算. 恰恰在这里, 我们真诚地希望读者适当停留并仔细琢磨. 因为这些既非过于简单又非过于复杂的具体的实例才是后面一切线性代数学认知的源泉. 一旦读者明白在所有的具体计算中, 或者推理分析中, 那些具体的信息只是为了带给人一种脚踏实地的感觉之外并无任何其他用途, 在面对一般化的线性代数理论时就会有如鱼得水的自由之感. 这或许就是人们通常所说的从具体到抽象的那样一个过