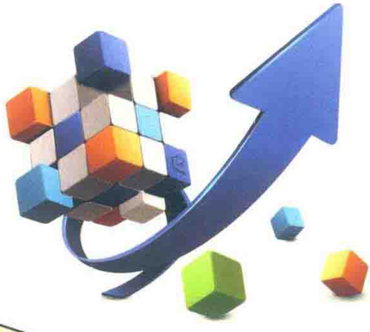
GAOZHONG WULI CHANGYONG DE SHUXUE SIXIANG FANGFA

高中物理常用的
数学思想方法

林辉庆◎著



东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

高中物理常用的数学思想方法

林辉庆◎著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
长春

图书在版编目（CIP）数据

高中物理常用的数学思想方法 / 林辉庆著．—长春：东北师范大学出版社，2018.6

ISBN 978－7－5681－4695－1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①林… Ⅲ．①中学物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 149602 号

□封面设计：中联学林

□责任编辑：张　烙　　□内文设计：中联学林

□责任校对：王春彦　　□责任印制：张 允 豪

东北师范大学出版社出版发行

长春市净月开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）

销售热线：0431－84568122

传真：0431－84568122

网址：http：//www.nenup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

三河市华东印刷有限公司印装

2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷

幅面尺寸：170mm×240mm　印张：13.5　字数：180 千

定价：45.00 元

前 言

数学是研究现实世界的空间形式、数量关系以及事物存在的模式和秩序的学科。物理学是研究物质运动最一般规律和物质基本结构的学科。物质的运动和结构总是以一定的模式、秩序和数量关系存在于空间和时间之中,空间形式和数量关系是物理现象不可分割的部分。物理现象的数学特性,决定了数学的概念、法则、定理、公理是任何物理现象都必须遵守的基本规律;决定了数学是物理最重要的语言和推理工具之一;决定了数学思想方法是物理研究、物理学习和用物理知识解决问题的重要思想方法,并且是更具基础性和普遍性的方法。

在物理的研究、学习和运用中,数学知识、数学技能固然不可或缺,但数学思想方法更为重要。如果没有数学思想方法做指导,我们终究不能将数学知识和技能运用于各种不同的物理情境。只有在数学的学习和运用中形成数学思想方法,并在物理学习中使之与物理实际相结合,才能灵活地运用数学知识、技能解决物理问题。

所谓数学思想方法,是由数学思想转化而来的,对人们的数学活动起宏观指导作用的行动方针和原则。数学思想方法不同于如配方法、待定系数法等对解决特定问题有效的具体数学方法,它对一般的数学活动起宏观的方向性的指导作用,因此,它的适用范围也更为宽广。

数学思想是对数学事实、数学理论和数学活动的本质认识,只有遵循这种本质,数学研究、数学学习和数学运用才能有效地开展。当数学思想成为

对人们数学活动的指导时，它也就转化成了数学思想方法。所以，数学思想与数学思想方法是本质上相同的东西，都是对数学事实、数学理论和数学活动的本质认识，当其表现为思想观念时，就是数学思想，当其表现为对数学活动的指导时，就是数学思想方法。例如，我们认识到事物总有量的特征，不同事物之间的联系一定也反映在量的联系上，不同事物量的联系可以用关系式来表示，这就是方程思想。当我们遇到具体问题时，基于对事物之间具有量的联系的认识，通过建立量的关系式解决问题，这就是方程思想方法。因为如此，在本书的论述中，很多地方并不区分数学思想和数学思想方法。

中学数学涉及的数学思想方法十分丰富。主要有：符号与变元表示的思想，集合思想，对应思想，公理化与结构思想，数形结合思想，化归思想，对立统一思想，整体思想，函数与方程思想，抽样统计思想，极限思想，模型思想，分类讨论思想等。本书介绍高中物理中常用的十一种数学思想方法：方程思想，函数思想，数形结合思想，分类讨论思想，化归思想，对称思想，类比思想，微积分思想，一般化与特殊化思想，猜测验证思想，概率统计思想。其中有些思想方法，如分类讨论思想、类比思想、猜测验证思想等，不只是处理物理中的数学问题的思想方法，而是物理研究乃至一般科学研究中对于非数学问题也是常用的思想方法，它们属于一般的科学方法。只是由于它们也是处理数学问题的思想方法，并且对于高中物理学习十分重要，因而把它归到数学思想方法的名下加以介绍。

另外，等效思想方法也是重要的数学思想方法，并且在高中物理中有极广泛的应用。但由于各种化归方法大多是等效转化；在对称现象中，对称事物之间的转化也是等效转化；在类比方法中，根据数学结构相同，可将不熟悉的事物等效为熟悉的事物。所有这些都是等效转化的主要形式，所以本书没有专门介绍等效思想方法。

本书介绍的数学思想方法，渗透于中学数学和物理乃至小学数学和科学课程各部分内容的学习中，高中生对它们早有接触和感受，只是尚处于朦胧体会阶段。在对这些数学思想方法有足够感知的基础上，现以明确的方

式学习它们的含义及其在物理中的应用，有利于将其提升到理性认识的水平，使我们能自觉地将其运用于物理学习之中，以极大地提高物理学习和运用的能力。

对每一种数学思想方法，本书均先简单地介绍其数学含义，然后侧重讨论它在物理的研究、学习和用物理知识解决问题中的应用。内容的阐述力求正确，而在严密性和全面性方面则没做刻意的追求。

在作者有限的阅读范围内，尚未发现对于高中物理常用的数学思想方法的系统而深入的研究，因此，本书的写作过程，借鉴较少，起点较低，再加上本人水平有限，错误与不当之处在所难免，衷心希望读者能予谅解，并提出批评指正。

目 录

CONTENTS

第一讲　方程思想方法 ······························ **1**

1　方程概念　1

2　方程思想方法　2

3　解决问题的算术法与方程法　3

4　方程思想在物理中的应用　5

5　例题分析　10

针对练习　16

答案　提示　简解　18

第二讲　函数思想方法 ······························ **19**

1　函数基本概念　19

2　函数与方程　21

3　函数思想方法　23

4　函数思想在物理中的应用　23

5　例题分析　25

针对练习　33

答案　提示　简解　34

第三讲　数形结合思想方法 …………………………………………… 36
1　数与形　36
2　数形结合思想方法　37
3　数形结合在物理中的应用　38
4　例题分析　42
针对练习　50
答案　提示　简解　52

第四讲　分类讨论思想方法 …………………………………………… 55
1　分类讨论思想方法　55
2　分类讨论在物理中的应用　56
3　分类讨论的基本步骤　58
4　例题分析　59
针对练习　68
答案　提示　简解　70

第五讲　化归思想方法 …………………………………………… 72
1　化归与化归思想方法　72
2　化归思想在物理中的应用　74
3　向矛盾的对立面转化　76
4　例题分析　77
针对练习　85
答案　提示　简解　87

第六讲　对称思想方法 …………………………………………… 89
1　对　称　89
2　对称思想方法　91
3　物理中的对称性　92

4 对称性思想在物理研究中的应用 96

5 对称性思想在物理学习中的应用 98

6 例题分析 99

针对练习 104

答案 提示 简解 106

第七讲 类比思想方法 …… 108

1 类比推理 108

2 类比思想方法 109

3 类比思想在物理中的应用 111

4 数学相似类比 113

5 等效思想与数学相似类比 117

6 例题分析 120

针对练习 125

答案 提示 简解 126

第八讲 微积分思想方法 …… 128

1 微分思想方法 128

2 积分思想方法 132

3 微积分在物理中的应用 135

4 例题分析 140

针对练习 145

答案 提示 简解 146

第九讲 特殊化与一般化思想方法 …… 148

1 特殊化与一般化思想方法 148

2 部分与整体和初始与全程 151

3 特殊化与一般化在物理中的应用 153

4 例题分析 156
针对练习 165
答案 提示 简解 166

第十讲 猜想验证思想方法 …… 168
1 猜想验证思想方法 168
2 猜想验证与物理学发展 171
3 猜想验证在物理解题中的应用 173
4 例题分析 175
针对练习 181
答案 提示 简解 183

第十一讲 概率统计思想方法 …… 186
1 随机事件与概率 186
2 两种简单的概率模型 188
3 概率统计思想方法 190
4 物理中的不确定现象 191
5 例题分析 194
针对练习 200
答案 提示 简解 200

主要参考文献 …… 202

第一讲　方程思想方法

1　方程概念

含有未知量的等式叫方程。方程中的未知量常用 x,y 或 z 等字母表示,已知量可以直接用数字表示,也可以用字母表示。如下面两个等式都是方程。

$$4x-3=7$$

$$ax+by+c=0$$

第一个式子中,x 是未知量。第二个式子中,a,b,c 是已知量,且 a,b 不同时为零,x,y 是未知量。当方程中的已知量用字母表示时,尤其要注意区分哪些字母代表未知量,哪些字母代表已知量。

含有一个未知量的方程叫一元方程,含有两个未知量的方程叫二元方程,含有 n 个未知量的方程叫 n 元方程。方程中未知量的最高次幂叫方程的次。最高次幂是 1 的方程叫一次方程,最高次幂是 2 的方程叫二次方程等。只有一个未知量且最高次幂是 1 的方程叫一元一次方程,一元二次方程、二元二次方程等意义类同。诸如三角方程、指数方程、对数方程、参数方程等,它们的意义都可以从字面上获得理解。

含有多个未知量的几个方程,如果至少有一个共同的未知量,那么这几

个方程叫方程组。

使等式成立的未知量的数值叫方程(组)的解,也叫方程(组)的根。

如果方程组中各个方程是等式,并且相互独立的方程个数与未知量的个数相同,这个方程组才可能有有限组确定的解,也可能无解。

2 方程思想方法

在解决问题时,通过分析、寻找问题中各因素之间的相互制约关系,然后用方程或方程组表示这种关系,通过解方程或方程组,或者运用方程的性质去分析、转化问题,从而使问题获得解决,这种解决问题的思想方法称为方程思想方法。

方程是事物之间以及事物中各因素之间相互联系、相互制约在数量关系上的反映。方程中的未知量反映的是事物运动变化的因素,已知量是事物运动变化的条件。事物虽然是运动变化的,但在一定条件下,由于事物间的相互联系、相互制约,各个变量一定有确定的数值,通过解方程能求得各个变量的确定数值。所以,方程思想就是动中求静的思想。

事物之间的联系和制约是普遍的、绝对的,因而方程思想方法是一种十分重要的数学思想方法。法国著名哲学家、数学家笛卡儿曾提出一个解决所有问题的通用模式:第一步,将任何问题转化为数学问题;第二步,将任何数学问题转化为代数问题;第三步,将任何代数问题转化为单个方程问题求解。笛卡儿的"通用模式"是否真的适用于解决所有问题?这可以讨论,但方程思想方法是数学乃至科学中研究和解决问题最重要的思想方法之一是毫无疑问的。

3　解决问题的算术法与方程法

在小学阶段解决问题时，一般是通过一系列的算术运算，逐步得到问题的最终结果。每一步的运算，都会得到一个不包含未知量的确定的结果；由题目的已知量或前面步骤的结果，构造出后续步骤的结果，如此通过前后相继的过程，直至得到问题需要的答案。这样解决问题的思考方法，我们把它叫作算术法。到初中阶段，我们学习了解决问题的另一种方法，即建立反映问题中各因素之间相互制约关系的方程，通过解方程求得问题的答案。这是解决问题的另一种思考方法，我们把它叫作方程法。下面用著名的鸡兔同笼问题说明这两种方法的区别。

"今有鸡兔同笼，上有35头，下有94足，问：鸡兔各几何？"

算术法求解：假如兔也只有2只脚，那笼中鸡和兔共有脚 $2\times35=70$ 只，多出的 $94-70=24$ 只脚都是兔的，所以兔有 $24\div2=12$ 只，鸡有 $35-12=23$ 只。

方程法求解：设有 x 只鸡，y 只兔，根据题意得：

$$x+y=35 \quad ①$$

$$2x+4y=94 \quad ②$$

①两边乘2，得到

$$2x+2y=70 \quad ③$$

②两边分别减去③两边，求得 $y=12$。把 $y=12$ 代入①，得到 $x=23$。

比较这两种方法，可以看出它们在本质上是相同的，只是前者直接通过一系列的数字运算得出结果，后者用字母表示未知量，列出两个包含未知量的等式——方程组，然后通过解方程组得出结果。不过，从对解题者思维的要求和解题方法这两个角度看，这两种方法还是有很大不同的。用算术法解决问题，解题者必须想出整个单向序列的能用逐步的算术计算得到结果的解题方案之后，才能执行这一方案求得结果。而用方程法

解题,列方程(组)与解方程(组)两个环节是相对独立的,列方程(组)时,只要关注解决问题要用到的各个数量关系并用方程表示出来,而不必考虑如何求解方程;解方程(组)时,只要关注通过必要的等价操作,把未知量转化为已知量。显然,算术法与方程法相比,前者对解题者的思维要求较高。另外,求解①②两式组成的方程组,除前述解法外,还有很多种其他方法。例如,我们可以从①式求出 $x=35-y$,然后代入②式求出 y;也可以把②式两边同乘$\frac{1}{2}$后减去①式的两边,求出 y;还可以从②式求出 y,然后代入①式求出 x 等。

用算术法解决问题时,需要找到一条巧妙的解题思路,这条解题思路不仅反映问题中有关因素的制约关系,并且各个环节都要能算出具体的结果。能逐步算出结果的解题思路往往是特殊而巧妙的,较难寻找,并且也只有在问题不太复杂的情况下才存在这样的解题思路;在解决问题的过程中,每一步都必须算出具体的结果,运算量大;前后相继"串联"的解题过程,任何一步错误都会导致后续步骤无法进行或错误。总之,用算术法解决问题,思维难度大,运算量大,容易出错。用方程法解决问题,列方程的阶段只要专注于寻找问题中的数量关系并用数学式子表达这种关系,所列的方程中已知量与未知量可以混杂在一起,也可以包含多个未知量;解方程的阶段只要最后能求出未知量,就不必每一步都要算出一个具体的结果,因而有较大的推理、操作自由度。总体而言,算术法适宜于数量之间的关系较简单的问题;对于数量之间的关系较复杂的问题,往往难以找到单向序列的能用逐步的算术计算得到结果的解题途径,甚至不存在这样的途径。这时,就不宜甚至不能用算术法求解。相反,只要是数量关系足够,都可以用方程法求解。

总之,算术法与方程法是解决有关数量关系问题的两种不同层次的思维方法,后者比前者使用范围更大。

4 方程思想在物理中的应用

4.1 物理规律与方程

物理是一门定量的科学,反映物理现象中各因素之间本质联系的物理规律,除用文字表达外,一般还用数学方程式表示。如匀变速直线运动基本规律的数学公式是

$$v = v_0 + at, \quad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

牛顿第二定律的数学公式是 $F = ma$

法拉第电磁感应定律的数学公式是 $E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$

热力学第二定律(熵增加原理)的数学公式是 $\Delta S \geqslant 0$

物质粒子性与波动性关系的德布罗意方程组是 $E = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}$

爱因斯坦质能方程是 $E = mc^2$

等。

4.2 物理研究与方程思想方法

对于一种物理现象,只有找到了描述这种现象变化规律的方程,才算是对它有了全面而深刻的了解。所以,从某种角度讲,物理研究最终的目标,就是要建立描述物理现象变化规律的方程。尤其是近代和现代物理,理论探索往往大大超前于实验探索,理论物理学家往往只靠少数的事实,直接猜出方程,然后用方程解释已有的事实,推出新的可检验的结论,当这些结论被实验和观察所证实,那么以这个方程为核心的新理论也就在很大的程度上得到了证实。相对论、量子力学以及弦论的研究莫不如此。

随着物理学的发展,大部分物理量的意义都远离人们的直接感觉经验,

它们的数值需要用间接方法测量。那么,要用仪器直接测出哪些量,才能用已有公式求出待测物理量?这实际上就是一个建立方程和解方程的问题。

例如,汤姆孙用图 1-1 所示的放电管,根据带电粒子在电场和磁场中受力运动的情况,测量电子的比荷。当金属板 C,D 之间未加电场时,阴极 K 发出的经过电极 A,B 的小孔而形成的一细束阴极射线不偏转,射在屏上的 P_1 点。当加上图示方向的电场 E,射线发生偏转,射在屏上的 P_2点。在金属板 C,D 之间的区域施加一个大小合适、方向垂直纸面向里的磁场 B,使射线不发生偏转,重新射到 P_1 点。此时,电子受到的电场力 qE 与洛伦兹力 qvB 大小相等、方向相反。金属板 C,D 间的距离 d 是已知量,只要测出 C,D 之间的电压 U,就可求得电场强度 E。磁场由电流产生,磁感应强度 B 也可由电流的大小算出。这样就能求出电子的速度 v。

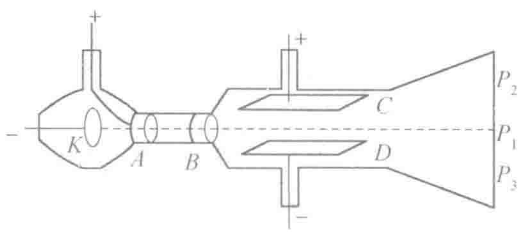


图 1-1

撤去金属板 C,D 间的电场 E,保留磁场 B,阴极射线在磁场区域做圆周运动,离开磁场后射到屏上的 P_3点。圆周运动的半径 r 可以由 P_3点的位置和放电管的几何参数算出,然后由洛伦兹力提供向心力,即可求出电子的比荷$\frac{q}{m}$。

汤姆孙测量电子比荷的方法可以简明地用图 1-2 表示。从数学角度看,这就是一个用直接测得的 C,D 两板之间的电压 U 和距离 d、产生磁场的电流 I、电子射到屏上的位置的移动距离和放电管的几何尺寸这些已知量,由有关的物理公式和几何关系,求解电子比荷的过程。

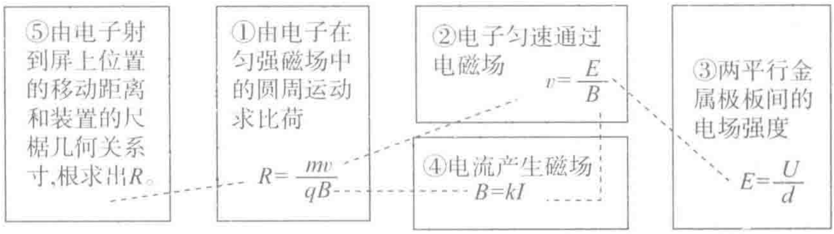


图 1-2

4.3　方程思想在物理解题中的应用

物理解题,就是要在问题情境中寻找有关的联系,由已知条件,根据这些联系,推导出问题的答案。对于定量的问题,则要根据反映这些联系的方程,由已知量解出待求量。可以说,方程思想方法是物理解题最基本的思想方法。

高中学习的物理现象,涉及的物理量多,物理量之间的关系复杂。很多情况下,我们不能用前后相继的逐步算出由已知量表示的确定数值的算术法求解,而必须用方程法求解。即先寻找问题中的各种联系,然后列出反映这些联系的方程,最后解方程求得答案。

例如,质量为 m_1 的小球以速度 v_0 与静止的质量为 m_2 的小球发生弹性正碰,设碰后两个小球的速度分别为 v_1,v_2。这个过程动量和动能均守恒,从而满足方程

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad ②$$

已知 m_1,m_2 和 v_0,就应该能求出 v_1,v_2。但是,要从①求出 v_1,需要先知道 v_2,而要从②求出 v_2,又需要先知道 v_1。这样,我们就无法用算术法求出 v_1,v_2,而必须联立求解由①②组成的方程组,才能得到答案。

如果两小球发生了如图 1-3 所示的弹性斜碰,则情况将更为复杂。当已知了两小球的质量 m_1,m_2 和小球 m_1 碰前的速度 v_0 及碰后的速度 v_1 与 v_0 的夹角 θ_1,就应该能求出两小球碰后的速度大小 v_1、v_2 及碰后小球 m_2 的速度