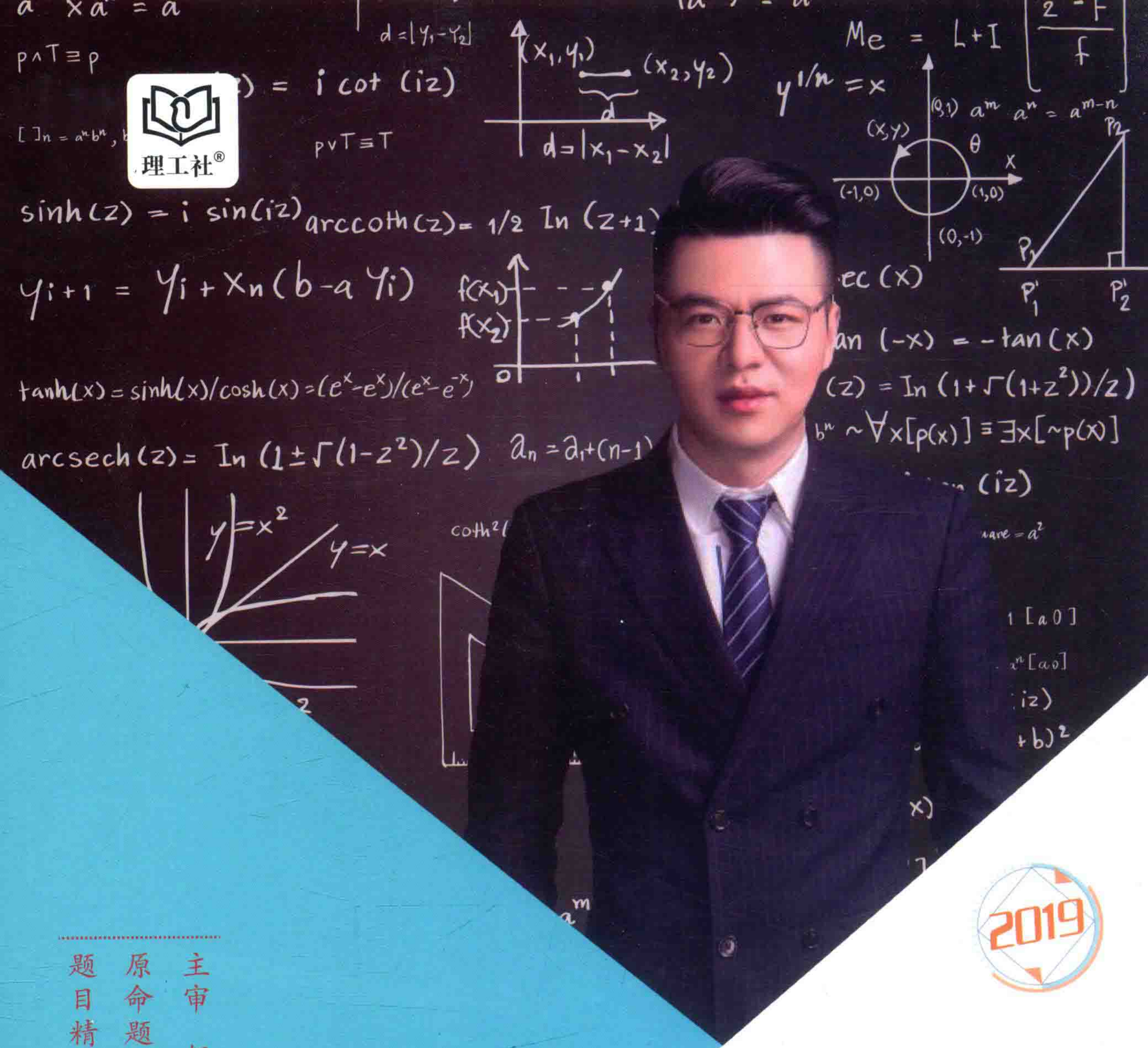
理工社®



主审 胡金德

原命题专家、辅导专家联合编写

题目精挑细选，难度阶梯上升

2019

杨超

考研数学必做986题

（适用于数学一、二、三）

主 编 杨超
副主编 姜晓千 胡烈懋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

杨超
考研数学必做986题

主　编 杨超　　副主编 姜晓千 胡烈懋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

杨超考研数学必做986题/杨超主编. —北京:北京理工大学出版社，2018.6
ISBN 978-7-5682-5772-5

Ⅰ.①杨… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第122538号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编 / 100081
电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网 址 / http://www.bitpress.com.cn
经 销 / 全国各地新华书店
印 刷 / 三河市宇通印刷有限公司
开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印 张 / 31
字 数 / 610千字
版 次 / 2018年6月第1版 2018年6月第1次印刷
定 价 / 69.90元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

为帮助广大考生更好地备考，在短期内切实提高考场做题能力及应试水平，作者根据30多年的真题出题规律，结合10多年的一线辅导经验及往届考生常犯失误，精心编制一定数量的题目以供广大考生练习使用，以期进一步加深对知识点的理解并提高计算解题能力。

本书篇章安排

本书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计（数二不要求）三部分。

同时，根据题目难度及对数一、数二、数三考生不同的考试要求，特将每部分区分为基础篇，强化篇，数一、数三专题，数一专题，数三专题。根据考试题型将每章、每部分题目分为选择题、填空题、解答题三部分。

本书特色

1. 权威打造　题目的挑选严格按照最新考试大纲的要求，将历年真题中每道题所考知识点进行拆分、重组、预测，站在出题老师的角度去编制并解析题目。

2. 通俗易懂　数学是很抽象的一门学科，尤其是对数字不敏感的学生，往往对其不得要领，听数学课就像听天书。在题目的解析中，为了让考生容易理解，采用“大话”系列进行讲解。

3. 循序渐进　只有在将每一个基础知识点掌握和练习到位的情况下，才能进一步去理解和掌握不同知识点间的区别和联系，从而达到综合运用知识的能力，故本书特意区分为基础篇和强化篇。

4. 重视计算　数学的复习离不开一定量习题的练习，切忌眼高手低，尤其是考场上180分钟要做150分的题目，时间上对计算能力要求就很高，计算能力的提高不是一蹴而就，而是需要在一道道题目的做题过程中慢慢提高的，为了有效避免“看着会，思路没啥问题，就是写不出结果”这样的困惑，建议考生一定要下手去做，只有这样，才能切实提高自己的应试水平。

5. 归纳总结　练习一道题就要有这道题的价值，要及时地归纳总结，绝不能像过流水账一样，学着后面的，忘了前面的，不仅浪费时间精力，而且打击信心，因此本书特意为考生设置了小结这个环节。

最后建议考生自己先做，不要边做边对答案，对于错处，一定要保证下次遇到不会再错。希望考生用好本书，切实提高应试能力。同时感谢为本书的顺利出版做出贡献的每一位老师和同事。

若有反馈，请联系本书客服人员。

目 录

习 题 部 分

第一部分　高等数学

【基础篇】

第一章　函数、极限、连续

(一) 选择题

(下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项填在指定位置上)

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时，有　(　　)

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　D. $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

2. 对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$，是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的　(　　)

A. 充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

3. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，则必有　(　　)

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　D. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

4. 设数列 x_n 与 y_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n = 0$，则下列选项正确的是　(　　)

A. 若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　B. 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

C. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　D. 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则 y_n 必为无穷小

5. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x) = \infty$，则下列命题中不正确的是　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x) = \infty$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = +\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x) = +\infty$

6. 函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n} - 1}{1 + x^{2n}}$ 的间断点及类型是　(　　)

A. $x = 1$ 为第一类间断点，$x = -1$ 为第二类间断点

B. $x = \pm 1$ 均为第一类间断点

C. $x = -1$ 为第二类间断点，$x = 1$ 为第一类间断点

D. $x = \pm 1$ 均为第二类间断点

7. $x = \dfrac{1}{n}(n = 2,3,\cdots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]$的　(　　)

A. 无穷间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 可去间断点　　D. 连续点

8. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则　　(　　)

A. $g[f(x)]$ 必有间断点　　B. $g(x)/f(x)$ 必有间断点

C. $[g(x)]^2$ 必有间断点　　D. $f[g(x)]$ 必有间断点

9. 设 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$，则

A. 有无穷多个第一类间断点　　B. 只有 1 个可去间断点

C. 有 2 个跳跃间断点　　D. 有 3 个可去间断点

10. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，函数 $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则　　(　　)

A. 点 $x=0$ 必是函数 $g(x)$ 的第一类间断点

B. 点 $x=0$ 必是函数 $g(x)$ 的第二类间断点

C. 点 $x=0$ 必是函数 $g(x)$ 的连续点

D. 函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性与 a 的取值有关

11. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(二) 解答题

(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\{y_n\}$ 为任意数列，能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$？举出适当的例子.

2. 请讨论以下问题：

(1) 若 $\lim f$ 存在，$\lim g$ 不存在，试问 $\lim(f+g)$，$\lim(f\cdot g)$ 一定存在吗？

(2) 若 $\lim f$ 和 $\lim g$ 均不存在，讨论以上同样的问题.

3. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^{30}(3x-2)^{40}}{(6x^2+7)^{50}}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{\sin(x^2-1)}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\right)^{x}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\,dt$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}-\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}\right]$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^x-1}{\sqrt{1+3x^2}-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1+x)^x-1]\ln\cos x}{\sin^4 x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{\arctan x-x}$.

34. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-x-\cos x}{\arcsin^2 x}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

37. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n a_n$，$a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$.

38. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$.

39. 设函数 $S(x)=\displaystyle\int_0^x|\cos t|dt$，当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时：

(1) 求证 $2n\leqslant S(x)\leqslant 2(n+1)$；(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

41. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+n^2+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n+n}\right)$.

42. 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0$，$x_0>0$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

43. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)], & x>0,\end{cases}$ 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求 a 的值.

44. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点，并指出类型.

第二章　一元函数微分学

(一) 选择题

(下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项填在指定位置上)

1. 设 $f(x)$ 在 a 点某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 a 点处可导的一个充分条件是　(　)

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]\cdot h$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

2. 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0, f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有 (　　)

A. $f'(x)>0, f''(x)<0$　　B. $f'(x)>0, f''(x)>0$

C. $f'(x)<0, f''(x)<0$　　D. $f'(x)<0, f''(x)>0$

3. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是 (　　)

A. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值

B. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

C. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值

D. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

4. 若曲线 $y=x^3+ax$ 与曲线 $y=bx^2+c$ 在点 $(-1,0)$ 处相切，其中 a,b,c 为常数，则 (　　)

A. $a=b=-1, c=1$　　B. $a=-1, b=2, c=-2$

C. $a=1, b=-2, c=2$　　D. $a=c=1, b=-1$

5. 曲线 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$（常数 a,b,c 满足 $4ac-b^2>0$ 且 $a>0$），下列叙述正确的是 (　　)

A. 没有渐近线　　B. 只有一条渐近线

C. 有两条渐近线　　D. 是否有渐近线与 a,b,c 无关

6. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (　　)

A. 有且仅有水平渐近线

B. 有且仅有铅直渐近线

C. 既有水平渐近线，也有铅直渐近线

D. 既无水平渐近线，也无铅直渐近线

(二) 填空题

（写出具体步骤）

1. 设 $f(x)=|x^2-1|(x^2-3x+2)$，则 $f(x)$ 的不可导点个数为________.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)dt$ 所确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$________.

3. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

4. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

5. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$________.

6. $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,dt=$________.

7. 设 $y=f(x)$ 由参数式 $\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u \end{cases}$ 所确定，则在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

8. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________.

9. 曲线 $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ 的拐点为________.

10. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的向上凸区间是________.

11. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为________，在区间 $[0,2\pi]$ 上的最大值为________.

(三) 解答题

(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 设 $\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，证明：$f(x)=|x-a|\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处可导的充分必要条件为 $\varphi(a)=0$.

2. 求 m 的范围，使 $f(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的二阶导数存在.

3. (1) 设 $f(x)=\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+2\,016)}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2\,017)}$，求 $f'(-1)$.

(2) 设 $f(t)=\left(\tan\frac{\pi t}{4}-1\right)\left(\tan\frac{\pi t^2}{4}-2\right)\cdots\left(\tan\frac{\pi t^{100}}{4}-100\right)$，求 $f'(1)$.

4. 设 $F(x)=\max\{\sin x,\cos x\}(0<x<2\pi)$，求 $F(x)$ 的不可导点.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u \end{cases}(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

6. 求函数 $y=\arcsin\sqrt{\mathrm{e}^{x^2}}$ 的导数 y'.

7. 求函数 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 的导数 y'.

8. 利用对数求导法求函数 $y=\frac{\mathrm{e}^{2x}\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ 的导数 y'.

9. 已知 $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

10. 设 $\begin{cases} x=\int_0^t f(u^2)\mathrm{d}u, \\ y=[f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

11. 设 $y=\frac{1}{x^2-5x+4}$，求 $y^{(100)}$.

12. 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$，求 $f^{(n)}(1)$.

13. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

14. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

16. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$，求 $y^{(n)}$.

17. 由方程 $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$ 确定 $y=y(x)$，求 y' 与 y''.

18. 设曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$，过点 $P(-1,0)$ 引 L 的切线，试求切点 $M(x_0,y_0)$ 并写出切线方程.

19. 求曲线 $y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ (3-x)\sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的凹凸区间和拐点.

20. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围.（数三不作要求）

21. 设 $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$，求 $F(x)$ 在闭区间$[0,\pi]$上的极大值和极小值.

22. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

23. 求由隐函数 $y^2+\mathrm{e}^{xy}=2$ 所确定的曲线在 $x=0$ 处的切线方程和法线方程.

24. 已知曲线 $y=a\sqrt{x}\,(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点(x_0,y_0)处有公共切线，求：

(1) 常数 a 及切点；

(2) 过(x_0,y_0)的公共切线方程.

25. 已知函数 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，$-\infty<x<+\infty$，求：

(1) $f'(x)$；

(2) $f(x)$ 的单调性；

(3) $f(x)$ 的奇偶性；

(4) $f(x)$ 的图形的拐点；

(5) $f(x)$ 的图形的凹凸性；

(6) $f(x)$ 的图形的水平渐近线.

26. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内连续，且 $f(x)>0$，证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}$$

在$(0,+\infty)$内单调减少.

27. 设 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$，求 $y=f(x)$ 的极值和渐近线.

28. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-2xy=0$ 确定，试求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

29. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

30. 求 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值 M 与最小值 m.

31. 求证 $x^3-9x-1=0$ 恰有三个实根.