

各向异性介质中的电磁波 传播与散射

李 瑾 李应乐 弓树宏 著



科学出版社

各向异性介质中的电磁波 传播与散射

李 瑾 李应乐 弓树宏 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从各向异性介质的麦克斯韦方程和电磁场的多尺度理论出发,严格地推导出各向异性介质中的电磁波辐射、传播和散射的有关公式或表达式。

本书叙述通俗易懂,推导详尽,便于自学与应用,可作为电动力学或电磁场理论的参考教材或有关专业的选修课教材,也可作为有关研究人员、教师或研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

各向异性介质中的电磁波传播与散射 / 李瑾, 李应乐, 弓树宏著. —北京: 科学出版社, 2018.11

ISBN 978-7-03-058994-1

I. ①各… II. ①李… ②李… ③弓… III. ①电磁波传播 ②电磁波散射 IV. ①O451②O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 225511 号

责任编辑: 冯 涛 杨 昕 / 责任校对: 马英菊
责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 东方人华平面设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月 第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2018 年 11 月 第一次印刷 印张: 17 1/4

字数: 333 000

定价: 98.00 元

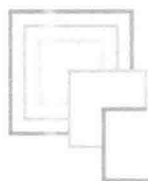
(如有印装质量问题, 我社负责调换〈虎彩〉)

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135397-2032



版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303



前言

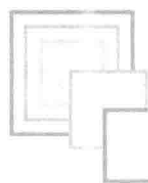
麦克斯韦电磁理论自诞生以来,在通信、遥感、国防等领域得到广泛的应用,受到学术界的高度关注,比较成熟的代表性论著有斯特拉顿(Stratton)撰写的 *Electromagnetic Theory* 等。如果说牛顿把天上和地上的运动规律统一起来是实现第一次大综合的话,那么麦克斯韦把电、光统一起来则是实现第二次大综合,为现代通信和太空探测等奠定了理论基础。尽管电磁场理论已经成熟,但在应用上,如目标电磁缩比、电磁各向异性介质中电磁波的传播和电磁源的辐射等基本问题尚需进一步完善。目前理论上仅解决了理想导电目标的电磁缩比关系,有关电介质、有损耗介质、非均匀电介质和磁性材料目标的电磁缩比理论尚无定论;电磁各向异性介质中关于标量电势和矢量磁势的非齐次波动方程难以建立,成为研究各向异性介质中电磁波散射和辐射的理论瓶颈。多年来,我们在主持完成国家自然科学基金项目的前提下,基于问题导向,深入系统地开展了电磁各向异性介质目标散射等研究,提出了电磁场的多尺度理论。客观地讲,一个新理论从提出到完善直至获得学术界的认可需要一个不断完善、同行逐渐理解和接纳的过程。

本书是以2006年我们已出版的《电磁场的多尺度变换理论及其应用》为基础,吸收了同行反馈的意见和建议,进一步完善了电磁场的多尺度理论。部分章节是在我们近十年来主持完成国家自然科学基金项目的成果和国内外专业学术期刊上发表的关于电磁场多尺度理论的研究论文的基础上整理而成的。本书第1章、第3章、第5章、第7章和计算机仿真与文献查阅由李瑾博士完成,李应乐教授执笔撰写了第2章、第4章、第6章和第8章,弓树宏教授进行了书稿的统稿和修订工作。在完善理论和撰写的过程中,我们得到了许多同行专家的鼓励和支持,特别是王明军教授、董群锋教授和李凯教授等提出了宝贵的建议,在此对他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,不妥之处在所难免,欢迎批评指正。

李应乐

2017年7月于西安



目 录

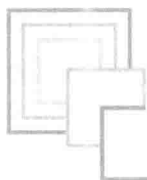
第1章 介质中的电磁场方程	1
1.1 电磁场的实验定律及其特性	1
1.1.1 洛伦兹力	1
1.1.2 库仑定律	2
1.1.3 毕奥-萨伐尔定律	3
1.1.4 法拉第电磁感应定律	3
1.1.5 电荷守恒定律	5
1.1.6 高斯定理	6
1.1.7 磁感应强度的散度	7
1.1.8 磁场的环路定理	7
1.2 介质中的麦克斯韦方程	9
1.3 时谐场的麦克斯韦方程	10
1.4 介质界面上的电磁场方程	11
1.5 介质的电磁特性	13
1.6 介质的本构方程	14
1.6.1 本构方程	14
1.6.2 本构方程与笛卡儿坐标系的关系	16
1.7 各向异性无损耗介质	20
1.7.1 介质的无损耗条件	20
1.7.2 无损耗各向异性介质电磁参数的对角化研究	21
1.7.3 电磁场在主坐标系中与特征坐标系中的关系	25
1.8 混合体的等效介电常数张量	27
1.8.1 等离子体的介电常数张量	27
1.8.2 离散粒子体的介电常数张量	30
1.8.3 特征坐标系中各向异性离散粒子体的介电常数张量	32
1.9 各向异性介质中电磁场的位函数及波动方程	34
1.9.1 电磁场的矢量磁位 A 和标量电位 φ	34
1.9.2 规范变换与规范不变性	34
1.9.3 赫兹矢量	35
参考文献	35

第 2 章 电磁场的长度多尺度理论	36
2.1 电磁场的长度多尺度理论的提出背景	36
2.2 坐标的尺度变换关系	40
2.3 球坐标的尺度变换关系	41
2.4 柱坐标的尺度变换关系	47
2.5 算符的变换关系	48
2.5.1 笛卡儿坐标系中微分算符的尺度关系	48
2.5.2 球坐标系中微分算符的尺度关系	49
2.6 自由空间电磁场量的变换关系	53
2.6.1 电荷密度和电流密度矢量的尺度变换	53
2.6.2 电位移矢量与磁感应强度矢量的尺度变换	54
2.6.3 球坐标系中电位移矢量与磁感应强度矢量的尺度变换	55
2.6.4 柱坐标系中电位移矢量与磁感应强度矢量的尺度变换	57
2.6.5 直角坐标系中电场强度矢量与磁场强度矢量的尺度变换	59
2.6.6 球坐标系中电场强度矢量与磁场强度矢量的尺度变换	60
2.6.7 柱坐标系中电场强度矢量与磁场强度矢量的尺度变换	61
2.7 电磁波传播矢量的尺度变换	63
2.8 极化强度矢量与磁化强度矢量的变换	64
2.9 电磁波能量密度矢量与能流密度矢量的尺度变换	66
2.10 洛伦兹力的尺度变换关系	68
2.11 介质电磁参数的尺度变换关系	69
2.11.1 直角坐标系中电磁参数的尺度关系	69
2.11.2 球、柱坐标系中电磁参数的尺度关系	72
2.12 电磁辅助位函数的尺度变换关系	74
2.13 电磁场的多尺度不变量	77
2.13.1 多尺度理论隐含的不变量	77
2.13.2 多尺度理论导出的不变量	77
2.14 电磁波的相位传播速度	79
参考文献	80
第 3 章 各向异性介质中的静电场	81
3.1 各向异性介质中静电场的微分方程	81
3.2 微分方程的求解	82
3.2.1 点电荷密度的 δ 函数表示	82
3.2.2 尺度坐标系中微分方程的求解	83
3.2.3 任意坐标系中点电荷电势的表达式	85
3.3 各向异性介质中的库仑定律	86

3.4	各向异性介质中的电偶极子	89
3.5	各向异性介质中的唯一性定理	90
3.5.1	各向异性介质中的唯一性定理	91
3.5.2	唯一性定理的证明	91
3.6	电像法在各向异性介质中的应用	93
3.6.1	各向异性介质与无限大导体板	93
3.6.2	各向异性介质中的接地导体球	95
3.7	各向异性介质中的分离变量法	98
3.7.1	直角坐标系的分离变量法	98
3.7.2	柱坐标系的分离变量法	104
3.7.3	球坐标系的分离变量法	111
3.8	有限差分法在各向异性电介质中的应用	118
3.8.1	电势的多尺度不变性	118
3.8.2	有限差分法的应用	119
3.8.3	有限差分法的数值解法	121
	参考文献	125
第 4 章	磁各向异性介质中的稳恒磁场	126
4.1	磁各向异性介质	126
4.2	磁各向异性介质矢量磁位所满足的微分方程	128
4.3	磁各向异性介质矢量磁位的表达式	131
4.3.1	尺度坐标系中的矢量磁位	131
4.3.2	特征坐标系中的矢量磁位	132
4.4	磁各向异性介质中无限长载流直导线的矢量磁位	134
4.5	磁各向异性介质中的毕奥-萨伐尔定律	138
4.6	磁各向异性介质中圆形载流环轴线上的磁场	141
4.7	磁各向异性介质填充时螺线管轴线上的磁场	143
4.8	各向异性介质中的磁多极矩	147
4.8.1	磁偶极子的矢量磁位	147
4.8.2	磁偶极子产生的磁感应强度	149
	参考文献	151
第 5 章	各向异性介质中的电磁波	152
5.1	平面电磁波的传播矢量	152
5.2	平面电磁波的相速度与极化	156
5.3	电磁波在各向异性介质界面上的反射和折射	159
5.3.1	各向异性介质分界面的边值关系	160
5.3.2	电磁波在各向异性介质分界面上的反射和折射	160

5.4 各向异性色散介质中的能量密度	168
参考文献	172
第6章 各向异性介质中的电磁辐射	173
6.1 电各向异性、磁各向同性介质中的达朗伯方程	173
6.2 标量电位和矢量磁位的时谐表达式	176
6.3 电各向同性、磁各向异性介质中 φ 和 A 的时谐表达式	182
6.4 电磁各向异性介质中 φ 和 A 的时谐表达式	187
6.4.1 基于介电常数张量的介质重构	188
6.4.2 电磁各向异性介质中的标量势和矢量磁位	188
6.4.3 标量势和矢量磁位的传输特性	190
6.5 各向异性介质中的辐射电磁场	192
6.6 电偶极子在各向异性介质中的辐射特性	194
6.7 磁偶极子在各向异性介质中的辐射特性	198
6.7.1 磁偶极子矢量磁位的一般表达式	198
6.7.2 位于 x - y 平面的磁偶极子的辐射场	199
参考文献	201
第7章 各向异性目标对平面电磁波的散射	203
7.1 目标的散射截面和散射振幅	203
7.2 目标散射振幅的计算	205
7.3 瑞利散射	207
7.3.1 无限长各向异性介质圆柱的瑞利散射	207
7.3.2 各向异性介质球的瑞利散射	211
7.4 各向异性椭球的瑞利散射	215
7.4.1 各向异性介质椭球的形状重整	216
7.4.2 各向异性介质椭球的内电场	216
7.5 电磁各向异性球的瑞利散射	220
7.5.1 电磁各向异性目标的散射场	221
7.5.2 电磁各向异性目标的瑞利散射特性	223
7.6 时谐场照射下各向异性目标散射的评注	228
7.6.1 各向异性目标散射研究的现状	228
7.6.2 各向异性目标散射研究面临的困难	229
参考文献	230
第8章 各向异性目标的波束散射特性	231
8.1 电磁波束简介	231
8.2 电磁波束照射下各向异性圆柱体内的电磁场	235

8.3 电磁波束照射下各向异性球体内的电磁场	240
8.4 各向异性物体的波束瑞利散射特性	246
8.4.1 各向异性圆柱体的波束散射特性	246
8.4.2 各向异性介质球的波束散射特性	248
8.5 电磁场波束的一般散射特性	249
8.5.1 波束中粒子散射场的一般表达式	249
8.5.2 粒子对椭圆高斯波束的散射	257
参考文献	259
附录	260
附录 1 RECOMMENDATION ITU-R P. 838-1 SPECIFIC ATTENUATION MODEL FOR RAIN FOR USE IN PREDICTION METHODS	260
附录 2 微分恒等式	261
附录 3 贝塞尔函数的表达式与渐进表达式	262
附录 4 柱坐标系中的微分关系	263
附录 5 球坐标系中的微分关系	263



第1章 介质中的电磁场方程

电介质可以分为各向同性介质和各向异性介质，要研究电磁波在各向异性介质中的传播与散射等问题，必须研究电磁场在介质中的基本方程，即介质中的麦克斯韦方程组。本章首先从实验和理论两个方面总结介质中的麦克斯韦方程组，接着讨论时谐电磁场所满足的方程，研究介质中电磁场所满足的边界条件及介质的极化强度矢量与磁化强度矢量，给出描述一般介质电磁特性的本构方程；同时，还研究各向异性介质电磁张量与坐标系的关系，深入研究各向异性介质无损耗的条件和对角化问题，具体给出各向异性介质电磁张量的特征值与特征矢量的表达式，研究电磁场在主坐标系与特征坐标系中的函数关系，得出几种典型各向异性混合体的介电常数张量。最后，研究在各向异性介质中有效的电磁位函数。

1.1 电磁场的实验定律及其特性

1.1.1 洛伦兹力

当带电粒子 q 位于电磁场中时，将受到电荷与电流的作用力；从场的观点来看，这种作用力是由于电荷在其周围激发了电场 $\mathbf{E}$ ，电流在其周围激发了磁场 $\mathbf{B}$ ，实验表明，电荷所受到的电磁力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1-1)$$

式 (1.1-1) 称为洛伦兹力方程， $\mathbf{F}$ 为洛伦兹力，单位为牛顿 (N)； q 为带电粒子的电量，单位为库仑 (C)； $\mathbf{v}$ 为粒子的运动速度。设 q 为试验电荷，电场强度 $\mathbf{E}$ 的定义为静止的试验电荷 q 所受到的作用力 $\mathbf{F}$ 与试验电荷的比值

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1.1-2)$$

由于式 (1.1-2) 定义的电场强度不涉及介质的电磁特性，因此式 (1.1-2) 对任何介质都成立。应注意的是， q 的体积应足够小，以至于从实验上或物理上可以把它当成一个点来看待。

实验表明，一个速度为 $\mathbf{v}$ 的带电粒子 q 在磁场中所受的力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.1-3)$$

式中， $\mathbf{B}$ 为磁感应强度。在磁场的研究中，各向同性介质中磁场强度 $\mathbf{H}$ 与磁感应强度的关系为

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.1-4)$$

式中, μ 为介质的磁导率。显然, 介质的电磁特性包含在式 (1.1-3) 中, 式 (1.1-3) 对介质也成立。

一般情况下, 电荷按体积分布, 电荷元 dq 与其密度 ρ 及体积元 dv' 的关系为 $dq = \rho dv'$, 当该电荷元以速度 $\mathbf{v}$ 运动时, 电流密度矢量 $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, 由式 (1.1-1) 可知, 单位体积带电体所受的洛伦兹力为

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.1-5)$$

式 (1.1-5) 中的电磁场应为空间任意点的总的电磁场, 包括带电体本身激发的电磁场, 其中电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 应包含介质磁化电流和极化电荷, 故式 (1.1-5) 对任何介质都成立。

1.1.2 库仑定律

库仑定律是描述空间中两个点电荷之间相互作用的基本定律。设均匀空间中有两个静止点电荷 q_1 和 q_2 , 它们之间的距离矢量为 $\mathbf{R}$, 则它们之间的相互作用力 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 \mathbf{R}}{4\pi\epsilon R^3} \quad (1.1-6)$$

式中, ϵ 为媒质的介电常数或电容率。由式 (1.1-2) 和式 (1.1-6) 可得, 任意电荷 q 激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{R}}{4\pi\epsilon R^3} \quad (1.1-7)$$

一般情况下, 式 (1.1-7) 中的 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{r}'$ 为点电荷的位置矢量, $\mathbf{r}$ 为观察点或场点的位置矢量。因为在笛卡儿坐标系中

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

所以

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \frac{1}{R} \quad (1.1-8)$$

注: 式 (1.1-8) 是对场点位置矢量 $\mathbf{r}$ 进行微分的。于是, 式 (1.1-7) 可以改写为

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon} \nabla \frac{1}{R} \quad (1.1-9)$$

令

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon R} \quad (1.1-10)$$

式中, 标量函数 φ 称为标量势。联立式 (1.1-9) 和式 (1.1-10), 可得

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1.1-11)$$

由式(1.1-11)的推导可以看出:静电场是保守力场;该式成立的条件为电荷位于均匀介质中,对非均匀介质不成立。可以证明:式(1.1-11)不仅对点电荷激发的电势与电场强度成立,而且对电荷按体分布、面分布和线分布激发的电势与电场强度也成立。这是由于在式(1.1-8)的运算中,电荷所在位置被看作常量,不参与微分运算。数学上可以证明:任意初等标量函数取梯度后,再取旋度为零。物理上的函数一般为初等函数,故

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1-12)$$

式(1.1-12)也是静电场为保守力场的一种表述。

1.1.3 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律是稳恒磁场或静磁场中描述两个电流元之间磁相互作用的基本实验定律,其在稳恒磁场中的地位相当于库仑定律在静电场中的地位。设均匀无界空间中的两个电流元 $\mathbf{J}_1 d\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{J}_2 d\mathbf{v}_2$, 根据毕奥-萨伐尔定律,两个电流元 $\mathbf{J}_1 d\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{J}_2 d\mathbf{v}_2$ 之间的作用力为

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_1 \times (\mathbf{J}_2 \times \mathbf{R})}{R^3} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 \quad (1.1-13)$$

式中, $\mathbf{R}$ 为由电流元 $\mathbf{J}_2 d\mathbf{v}_2$ 指向电流元 $\mathbf{J}_1 d\mathbf{v}_1$ 的位置矢量; $d\mathbf{F}$ 为电流元 $\mathbf{J}_1 d\mathbf{v}_1$ 所受的安培力; μ 为介质的磁导率。式(1.1-13)还可以改写为

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J}_1 d\mathbf{v}_1 \times \frac{\mu}{4\pi} \frac{(\mathbf{J}_2 \times \mathbf{R})}{R^3} d\mathbf{v}_2 \quad (1.1-14)$$

由式(1.1-3)及式(1.1-14)可得

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' \quad (1.1-15)$$

联立式(1.1-8)及式(1.1-15)可得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{v}' \quad (1.1-16)$$

式(1.1-16)也称为安培定律。

1.1.4 法拉第电磁感应定律

静电场与稳恒磁场分别是由相对观察者静止的电荷和相对观察者匀速运动的电荷产生的,它们是互相独立的。但是,当磁场随时间变化时,电场和磁场将不再独立。1831年,英国科学家法拉第最先发现了变化磁场与电场之间的深刻联系:任意闭合回路的感应电动势等于与该闭合回路相交链的磁通量的变化率的负值,即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1-17)$$

式(1.1-17)中的闭合回路与其所围成的曲面符合右手螺旋定则,如图1-1所示。

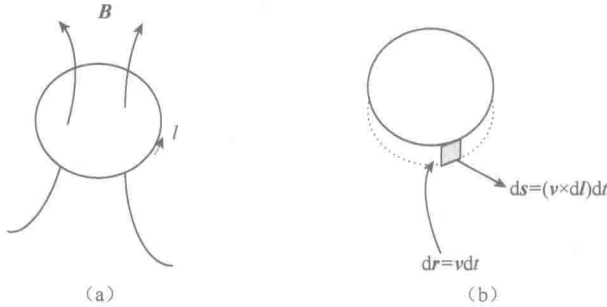


图 1-1 运动闭合回路

对于运动的闭合回路,式(1.1-17)变为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1-18)$$

在式(1.1-18)中,积分与微分交换可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \right) \quad (1.1-19)$$

因为在时变磁场中,磁感应强度既是位置的函数,又是时间的函数,即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, 所以

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

由于磁场的位置不随时间变化,因此

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1-20)$$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times d\mathbf{l} = \mathbf{v} \times d\mathbf{l} \quad (1.1-21)$$

将式(1.1-20)与式(1.1-21)代入式(1.1-19)得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} - \int_l \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$$

利用三矢量构成的体积不变特性可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.1-22)$$

式(1.1-22)的第一项为回路不动时激发的电场,也称感应电场,其本质为变化的磁场激发一个变化的电场;第二项为回路运动时激发的感应电动势,也称动生电动势。当回路不运动时,由式(1.1-22)可得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1-23)$$

利用斯托克斯定理可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1-24)$$

当磁场不随时间变化时, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$, 电场只有静电场, 由式(1.1-24)可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.1-25)$$

式(1.1-25)也可直接由式(1.1-9)得到。

1.1.5 电荷守恒定律

电荷守恒定律可以表述为:任意封闭系统的电荷总量保持不变。也就是说,任意一个体积 V' 内的电荷增量等于流入这个体积的电荷量。因此,在体电流密度矢量为 $\mathbf{J}$ 的空间内,任取一个闭合曲面 S , 通过 S 单位时间流出的电量等于单位时间体积内电荷的减少量,数学上可以表示为

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{V'} \rho dv' \quad (1.1-26)$$

式中, Q 为体积 V' 内的电荷; ρ 为电荷体密度。当把时间微分与体积分次序交换后得

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{V'} \frac{d\rho}{dt} dv' - \int_{V'} \rho d \frac{dv'}{dt} \quad (1.1-27)$$

由于体积变量 v' 不随时间变化, 所以式(1.1-27)右端第二项为零。一般情况下, 电荷密度是空间和时间的连续函数, 即

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$$

电荷密度的全微分为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

电荷所在的位置坐标不随时间变化, 故

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1-28)$$

将式(1.1-28)代入式(1.1-27)得

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv' \quad (1.1-29)$$

利用斯托克斯定理可将式 (1.1-29) 的左端化为体积分, 即

$$\int_{V'} \nabla \cdot \mathbf{J} dV' = - \int_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV' \quad (1.1-30)$$

积分区域相同, 积分结果又相等, 所以被积函数必须相等, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1-31)$$

式 (1.1-31) 为电荷守恒定律的微分形式。为了明了起见, 我们引入四维电流密度 $c\rho$, c 为电磁波在自由空间的传播速度, 式 (1.1-31) 可改写为

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial c\rho}{\partial ct} = 0 \quad (1.1-32)$$

式 (1.1-32) 表明, 四维电流密度 $(J_x, J_y, J_z, c\rho)$ 在四维空间 (x, y, z, ct) 变化, 在四维空间是“恒定的”。

1.1.6 高斯定理

在无界均匀空间中, 闭合曲面 S 所包围的体积为 V' , 其中的电荷体密度为 $\rho(\mathbf{r}')$ 。根据式 (1.1-9) 可得电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{-\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon} \nabla \frac{1}{R} dV' \quad (1.1-33)$$

电位移矢量 $\mathbf{D}$ 与电场强度 $\mathbf{E}$ 的关系为 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 电位移矢量的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{-\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} dV' = \int_{V'} \frac{-\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} dV' \quad (1.1-34)$$

由于

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(R)$$

因此将上式代入式 (1.1-34) 可得高斯定理

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1-35)$$

在式 (1.1-35) 中, 电荷体密度为自由电荷体密度。该式表明, 只有在自由电荷不为零的地方, 电位移矢量的散度才不为零。式 (1.1-35) 为高斯定理的微分形式, 应用数学上的高斯定理可得积分形式的高斯定理为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{V'} \rho dV' \quad (1.1-36)$$

式 (1.1-36) 的积分面元的方向为外法线矢量方向。该式表明, 闭合曲面上电位移矢量的通量等于闭合曲面内所包围自由电荷的代数和。微分形式的高斯定理在研究电磁波传播等解析问题中经常用到, 积分形式的高斯定理在研究电磁波的

边界行为时十分重要。虽然高斯定理是从静电场推出的,但实验表明,式(1.1-35)和式(1.1-36)对时变电磁场也适用。

1.1.7 磁感应强度的散度

由式(1.1-16)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

利用

$$\nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right) = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J} + \frac{1}{R} \nabla \times \mathbf{J}$$

因为微分算符作用在场点 $\mathbf{r}$, 电流密度矢量位于 $\mathbf{r}'$ 上, 所以

$$\nabla \times \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{R} \right) = -\mathbf{J} \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right)$$

将上式代入式(1.1-16)可得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = \nabla \times \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1.1-37)$$

引入矢量磁位

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1.1-38)$$

代入式(1.1-37)可得

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.1-39)$$

数学上已证明: 任何初等矢量取旋度后再取散度为零, 故磁感应强度的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1-40)$$

由高斯定理可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.1-41)$$

式(1.1-41)表明, 磁感应强度沿任意闭合曲面的积分为零, 与静电场的高斯定理相比可以看出, 自然界中不存在像电荷那样的“磁荷”。

1.1.8 磁场的环路定理

对于任意连续可微的矢量 $\mathbf{F}$, 由于 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$, 因此磁感应强度的旋度为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' \\ &= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV' + \frac{\mu}{4\pi} \nabla \int_{V'} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) dV' \end{aligned} \quad (1.1-42)$$

由于 $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(R)$, 因此式 (1.1-42) 的第一项积分为

$$-\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \mu \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(R) dv' = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.1-43)$$

根据数学上的高斯定理可得, 式 (1.1-42) 的第二项积分为

$$\int_{V'} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{R} \right) dv' = \oint_S \frac{\mathbf{J}}{R} \cdot d\mathbf{s}$$

上式中的积分区域为任意的闭合曲面 S 所包围的区域, 当将闭合曲面取为无限大时, 在该闭合曲面上电流密度矢量为零, 所以式 (1.1-42) 的第二项积分为零。由此可得磁感应强度的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (1.1-44)$$

式 (1.1-44) 描述了介质空间中任一点磁感应强度矢量的旋度与该点电流密度矢量的大小关系; 引入磁场强度矢量 $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$, 由式 (1.1-44) 可得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.1-45)$$

式 (1.1-45) 与介质的电磁特性无关, 因此对任何介质都适应。应用斯托克斯定理及式 (1.1-45) 可得积分形式的环路定理为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1-46)$$

式 (1.1-46) 中的积分曲面 S 是以 l 为边界的曲面, 符合右手螺旋定则。由于任何矢量取旋度后再取散度为零, 因此式 (1.1-45) 仅在稳恒条件下成立; 在时变场的条件下, 对该式需要进行修改, 设式 (1.1-45) 的右端为 $\mathbf{J} + \mathbf{J}_d$, $\mathbf{J}_d$ 为待定项, 即

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \quad (1.1-47)$$

两边取散度可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}_d) = 0 \quad (1.1-48)$$

电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 在任何情况下都成立, 所以, 由电荷守恒定律和式 (1.1-48) 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

再将式 (1.1-35) 代入上式可得

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_d = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

由上式可得