

孙艳波 田春红 沈仙华 编

高等数学(II)

跟踪习题册

(上)

清华大学出版社

艳波 田春红 沈仙华 编

高等数学(II)

跟踪习题册

(上)



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与沈仙华等编写的《高等数学》配套的教学用书. 体系和内容与教材一致, 用于教学同步练习. 主要内容包括: 函数与极限, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分, 定积分的应用, 微分方程六章的练习题、总复习题及答案. 本书在选材上, 力求具有代表性, 既保证内容的覆盖面, 又注意精选题目; 同时重视基本概念, 力求贴近实际应用.

本书可作为高等院校非数学专业大专、本科生学习高等数学课程的辅导用书, 也可供从事高等数学教学的教师参考.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(II)跟踪习题册. 上 / 孙艳波, 田春红, 沈仙华编. --北京: 清华大学出版社, 2014

ISBN 978-7-302-37004-8

I. ①高… II. ①孙… ②田… ③沈… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第.143141 号

责任编辑: 佟丽霞

封面设计: 常雪影

责任校对: 王淑云

责任印制: 刘海龙

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 北京国马印刷厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm 印 张: 7.25 字 数: 166 千字

版 次: 2014 年 8 月第 1 版 印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 1~2500

定 价: 15.00 元

产品编号: 060597-01

前 言

本书是根据工科类本科高等数学课程教学大纲的基本要求, 兼顾研究生入学考试数学(一)的考试大纲而编写的, 同时结合独立学院办学特色, 突出基本思想和基本方法的训练, 加强基本能力的培养. 供学生及时巩固高数课堂上所学基础知识, 及作为期末复习的参考用书.

内容覆盖函数与极限, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分, 定积分的应用, 微分方程等. 适合机电系, 信息工程系, 民用航空系, 土木工程系各专业类学生使用, 也可供成教、电大相关专业选用. 在使用本书时, 教师可根据教学大纲和教材的要求, 结合教学实际选用.

参编人员都是本校基础部数学教师, 从事高等数学教学达 7 年以上, 经过长期的教学积累, 对高等数学的知识掌握及运用比较熟练, 对本校学生的特点也比较了解. 在此基础上, 对以往的作业集进行修改, 整编. 本书题型多样、题量恰当、难易适中. 每节练习分为基础部分和提高部分. 每章附有总习题, 在练习中加入部分考研真题及数学竞赛题目. 书末对这些练习给出答案或提示. 本书由孙艳波、田春红、沈仙华编写, 由孙艳波统稿. 基础部主任张兴泰教授对本书的编写与出版给予了大力支持并提出了许多宝贵意见和建议, 在此表示感谢!

限于编者水平, 疏漏之处在所难免, 敬请使用者批评指正.

编者

2014.6.6

目 录

第1章 函数与极限	1
1.1 映射与函数	1
1.2 数列的极限	4
1.3 函数的极限	5
1.4 极限运算法则	7
1.5 两个重要极限与无穷小比较	8
1.6 函数的连续性与间断点	12
总习题1	16
第2章 导数与微分	18
2.1 导数概念	18
2.2 函数的求导法则	20
2.3 高阶导数	23
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	25
2.5 函数的微分	28
总习题2	30
第3章 中值定理与导数的应用	33
3.1 微分中值定理	33
3.2 洛必达法则	35
*泰勒公式	38
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	39
3.4 函数的极值与最大值最小值	42
3.5 函数图形的描绘	45
3.6 曲率	46
总习题3	47
第4章 不定积分	50
4.1 不定积分的概念与性质	50
4.2 换元积分法	53
4.3 分部积分法	56
*有理函数积分	58
总习题4	59
第5章 定积分	61
5.1 定积分概念	61
5.2 定积分的性质 中值定理	62
5.3 微积分基本公式	63

5.4 定积分的换元法	67
5.5 定积分的分部积分法	70
5.6 广义积分	72
总习题 5	73
第 6 章 定积分的应用	76
6.1 定积分的元素法	76
6.2 平面图形的面积	76
6.3 体积	78
6.4 平面曲线的弧长	80
6.5 功 水压力和引力	81
总习题 6	82
第 7 章 微分方程	83
7.1 微分方程的基本概念	83
7.2 一阶微分方程	84
7.3 可降阶的高阶微分方程	89
7.4 高阶线性微分方程	90
7.5 二阶常系数线性微分方程	91
总习题 7	96
答案	99

第1章 函数与极限

1.1 映射与函数

1. 画出下列函数的图形:

(1) $y = \arctan x$;

(2) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

2. 求函数 $y = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ 的反函数.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -3 < x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < 3, \end{cases}$ 求: $f(-2), f(0), f(2)$ 及 $f(x-1)$.

4. 证明: 设 $f(x)$ 为定义在区间 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

5. 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) > 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

6. 下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的?

(1) $y = \ln \sin \frac{x}{2}.$

(2) $y = e^{\sin \frac{1}{x}}.$

(3) $y = \left(\arctan \frac{x}{2} \right)^2.$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$. 求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

8. $f(x) = a^{x-\frac{1}{2}}$ ($a > 1$) 且 $f(\lg a) = \sqrt{10}$, 求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

*9. 证明: $y = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数.

1.2 数列的极限

1. 计算下列数列的极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{3n^2 - n - 1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-5)^n}{3^{n+1} + (-5)^{n+1}}.$$

1.3 函数的极限

1. 研究下列函数的左右极限:

$$(1) f(x) = \arctan \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(2) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(3) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(4) f(x) = \frac{\sqrt{2x(x-1)}}{|x-1|} \quad (x \rightarrow 1).$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{问 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ 是否存在, 并说明理由.}$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + x^2, & x < 0, \end{cases}$ 讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的存在性.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时下列函数哪些是无穷大量, 哪些是无穷小量?

(1) $y = x \sin \frac{1}{x}$.

(2) $\frac{2x+1}{x}$.

5. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{1-x}$.

1.4 极限运算法则

1. 计算下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3-x}}{x^2 - 1}.$$

2. 利用无穷小性质计算下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

1.5 两个重要极限与无穷小比较

1. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

2. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + \ln x)^{\frac{5}{\ln x}}.$$

3. 利用极限存在准则证明下列式子:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$$

(3) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 极限存在, 并求极限.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数都是无穷小, 试确定哪些是 x 的高阶无穷小? 同阶无穷小? 等价无穷小? 说明理由.

(1) $x^2 + x$;

(2) $x + \sin x$;

(3) $1 - \cos 2x$;

(4) $x \cos x$.

5. 利用等价无穷小性质求下列极限:

(1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t \sin \frac{x}{2^t}$;

(2) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta^2}{1 - \cos \theta}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+\alpha x^2)$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小量, 求 α 的值.

7. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$, 证明: 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小但不等价.