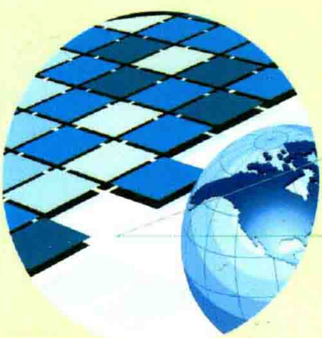
21世纪应用型本科院校规划教材

概率论与数理统计

主编　陈荣军　钱　峰

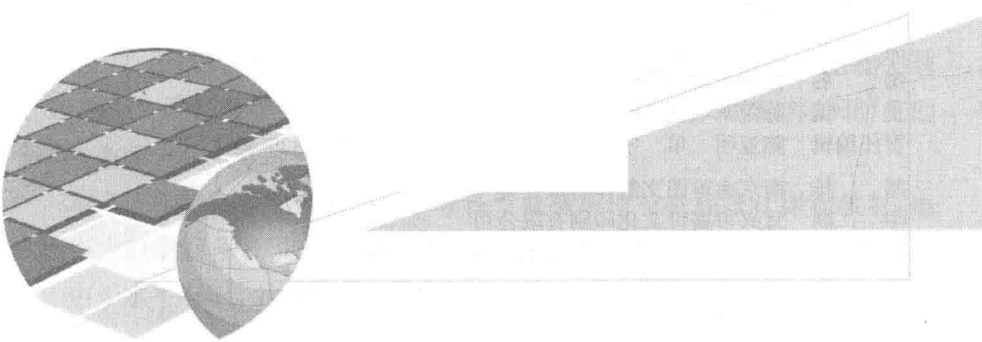


南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

概率论与数理统计

主　编　陈荣军　钱　峰



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 陈荣军，钱峰主编. — 南京 ：
南京大学出版社，2017.8

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-18904-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… ②钱… Ⅲ. ①概率论—高等
学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 159402 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 概率论与数理统计
主　　编 陈荣军　钱　峰
责任编辑 陈亚明　单　宁　　　编辑热线 025-83592401

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 宜兴市盛世文化印刷有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 15　字数 221 千
版　　次 2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-18904-3
定　　价 37.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

内容提要

概率论与数理统计是由概率论和数理统计两门课程组合而成，为理工、经管等专业提供随机数学理论、方法和计算技巧的支撑. 为有效实施多元化生源下应用型本科院校概率论与数理统计课程的教学，根据多年教学实践，课题组组织编写本教材，籍以满足培养高质量应用型本科人才的需要.

本书是在应用型本科院校大力推进公共数学改革的背景下推出的，内容包括随机事件与概率、一维随机变量、多维随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计基础知识、参数估计、假设检验、R 软件应用八个章节. 教材知识系统，层次分明，详略得当，举例丰富. 贴近应用型院校学生实际、突出相关理论的应用性、注重概率论与数理统计思想和计算机处理能力的培养，同时有助于学生数学文化素养的提升.

本书可作为高等学校理、工、管等各专业概率论与数理统计课程教材，也可用作为教学参考书和考研用书.

由于水平有限，书中错误难免，望读者批评指正.

目　录

第 1 章　随机事件与概率

实际案例：

某班 n 个战士各有 1 支归个人保管使用的枪，这些枪的外形完全一样. 在一次夜间紧急集合中，每人随机地取了 1 支枪，那么至少 1 人拿到自己的枪的概率是多少呢?

随机现象—随机试验—随机事件

- 定义
  - 语言叙述
  - 点集—样本空间、事件、基本事件、复合事件、必然事件、不可能事件
  - 关系—包含、相等、和事件、积事件、差事件、互不相容、对立事件
  - 运算法则—交换、结合、分配、对偶
- 概率
  - 定义—频率定义、公理化定义
  - 性质
    - 非负、有界、单调、有限可加
    - 加法、减法、求逆
  - 概型—等可能概型(古典概型)
  - 条件概率—乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式
  - 独立性
    - 定义
    - 伯努利试验

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.它以随机现象为研究对象,在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面都起到了非常重要的作用.

1.1 随机试验

1.1.1 随机现象

自然现象和社会现象大致可分为两类:一类是在一定条件下必然出现的现象,称为**确定性现象**.例如,在标准大气压下,100 ℃的水必然沸腾;在自然状态下,水从高处向低处流淌.另一类则是在一定条件下人们事先无法准确预知其结果的现象,称为**随机现象**.例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷前无法确定结果是什么.

虽然随机现象在一定的条件下可能出现这样或那样的结果,而且在每一次观测之前不能预知该次试验的确切结果,但经过长期实践并深入研究之后,人们逐渐发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结构呈现出某种规律性.例如,多次重复抛掷一枚硬币得到正面朝上的结果大致有一半.这就是统计规律性.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科.

1.1.2 随机试验

为了研究随机现象的统计规律,需要对随机现象进行重复观察,我们把对随机现象的观察称为试验.下面是一些试验的例子:

(1) 抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

(2) 将一枚硬币连续抛两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

(3) 掷一颗骰子,观察出现的点数;

(4) 对某一目标进行射击,直至击中为止,观察射击次数;

(5) 观测某种电视机的寿命.

以上试验具有下列共同特点:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

我们把具有上述性质的试验称为**随机试验**,简称试验,记作 E.

1.1.3　样本空间

随机试验的一切可能基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $S=\{e\}$,其中 e 表示基本结果,又称为样本点. 上述随机试验(1)～(5)所对应的样本空间 $S_1,\cdots,S_5$ 分别为

$$S_1=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\};$$
$$S_2=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\};$$
$$S_3=\{1,2,3,4,5,6\};$$
$$S_4=\{1,2,3,\cdots\};$$
$$S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

1.1.4　随机事件

样本空间 S 的子集称为随机试验 E 的**随机事件**,简称事件. 常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

设 A 是一个事件,当且仅当试验中出现的样本点 $e\in A$ 时,称事件 A 发生. 例如,在掷一颗骰子的试验中,事件 $A=$"出现奇数点",即 $A=\{1,3,5\}$. 若试验结果为 5 点,则事件 A 发生;若试验结果为 2 点,则事件 A 不发生.

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**;由两个或者两个以上基本事件复合而成的事件为**复合事件**;样本空间 S 是自身的子集,在每次试验中总是发生的,称为**必然事件**;空集$\varnothing$不包含任何样本点,它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

1.1.5　事件间的关系与运算

事件是一个集合,因而,事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,或称 A 是 B 的子事件,记为 $A\subset B$.

在掷一颗骰子的试验中,设事件 $A=$"出现 6 点",$B=$"出现偶数点"=

$\{2,4,6\}$,事件 A 发生必然导致事件 B 发生,所以 $A\subset B$.

2. 相等关系

若事件 A 包含事件 B,且事件 B 又包含事件 A,即 $B\subset A$ 且 $A\subset B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

在掷一颗骰子的试验中,设事件 $B=$"出现偶数点",$C=\{2,4,6\}$,显然,$B\subset C$ 且 $C\subset B$,所以 $B=C$.

3. 和事件

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的和事件,即 A 与 B 中至少有一个发生. 当且仅当 A 与 B 中至少有一个事件发生时,事件 $A\cup B$ 发生.

在掷一颗骰子的试验中,设 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{5,6\}$,则 $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

4. 积事件

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的积事件. 当且仅当 A 与 B 同时发生,事件 $A\cap B$ 发生,简记为 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的积事件.

在掷一颗骰子的试验中,$A=\{5,6\}$,$B=\{1,3,5\}$,则 $A\cap B=\{5\}$.

5. 差事件

$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$,称为 A 与 B 的差事件. 当且仅当 A 发生而 B 不发生,事件 $A-B$ 发生,所以 $A-B=A-AB$. 显然,

$$A-A=\varnothing,A-\varnothing=A,A-S=A-AS=A-A=\varnothing.$$

在掷一颗骰子的试验中,$A=\{5,6\}$,$B=\{1,3,5\}$,则 $A-B=\{6\}$.

6. 互不相容(互斥)

若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容或互斥,即 A 与 B 不能同时发生.

在掷一颗骰子的试验中,$A=\{6\}$,$B=\{1,3,5\}$,$AB=\varnothing$,即事件 A 与 B 不可能同时发生,因此事件 A 与 B 是两个互不相容的事件.

设有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$若满足 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j$ 且 $i,j=1,2,\cdots$则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$两两互不相容.

7. 对立事件

事件 A 不发生称为事件 A 的对立事件(或逆事件),记作$\overline{A}$. 显然,

$$\overline{A}=S-A,\overline{\overline{A}}=A.$$

在掷一颗骰子的试验中,若 $A=\{6\}$,则$\overline{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

在一次试验中,若 A 发生,则$\overline{A}$一定不发生;若 A 不发生,则$\overline{A}$一定发生. 因此,

$$A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=S.$$

在概率论中,常用一个矩形表示样本空间 S,用其中一个圆或其他几何图形表示事件,这类图形称为维恩图. 以下使用图示法来表示事件之间的各种关系.

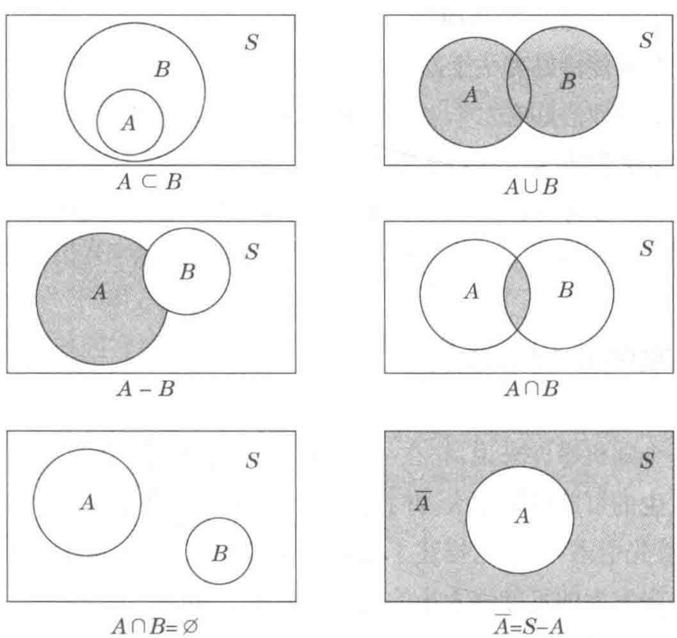


图 1.1　事件关系图

1.1.6 事件间的运算律

由集合的运算律，不难给出事件间的运算律. 设 A,B,C 为同一随机试验 E 的事件，则有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1.1 设 A,B,C 为随机事件，则下列事件可表示为：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) A 与 B 发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) 三个事件都发生：ABC；

(4) 三个事件恰好有一个发生：$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) 三个事件恰好有二个发生：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(6) 三个事件中至少有一个发生：

$A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(7) 三个事件中至少有一个不发生：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

1.2 概率的定义

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 如何确定事件发生的可能性有多大，并找到一个合适的数来度量这个可能性的大小？为此，首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出度量事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 概率的公理化定义

定义 1.2.1 若在相同条件下进行 n 次试验，记事件 A 发生的次数为

n_A，则称$\frac{n_A}{n}$为事件A发生的频率，记为$f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

对于必然事件S，有$n_A=n$，从而必然事件S发生的频率为1；对于不可能事件$\varnothing$，有$n_A=0$，从而不可能事件$\varnothing$发生的频率为0.一般事件发生的频率在0与1之间.

频率的大小反映了事件A发生的频繁程度，频率越大，事件A发生越频繁，在一次试验中发生的可能性就越大，反之亦然.因此，直观的想法是用频率来表示A在一次试验中发生的可能性大小.大量试验证实，当重复试验的次数n逐渐增大时，频率会逐渐稳定于某个常数.用频率的稳定值来度量事件A发生的可能性大小是合适的.

但是，实际生活中并不是所有试验都可以大量重复进行.有些试验由于耗费的成本太高而不能进行太多次试验，有些试验具有破坏性而不能大量重复进行，还有些试验根本不能重复进行.这些情形便无法利用频率来估计概率.

历史上还曾有过概率的古典定义、概率的几何定义及概率的主观定义，这些定义各自适合某一类随机现象.1900年数学家希尔伯特(1862—1943)在巴黎第二届国际数学家大会上公开提出要建立概率的公理化体系，即从概率的少数几条性质出发来刻画概率的概念.直到1933年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(1903—1987)首次提出概率的公理化定义.这个定义概括了历史上几种概率定义中的共同特性，又避免了各自的局限性和含混之处.

下面，给出建立在严密的逻辑基础上的概率的公理化定义.

定义1.2.2　设S是随机试验E的样本空间，对于E的每一个事件A，将其对应于一个实数，记作$P(A)$，若$P(A)$满足下列三个条件：

(1) **非负性**：对任意事件A，有$P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**：$P(S)=1$；

(3) **可列可加性**：设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$