线性代数

练习与提高（一）

XIANXING DAISHU LIANXI YU TIGAO

陈兴荣　刘剑锋
刘智慧　李卫峰　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

线性代数练习与提高

XIANXING DAISHU LIANXI YU TIGAO

（一）

陈兴荣　刘剑锋　刘智慧　李卫峰　主编

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数练习与提高:全2册/陈兴荣等主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.7(2018.10重印)
ISBN 978-7-5625-4276-6

Ⅰ.①线…
Ⅱ.①陈…
Ⅲ.①线性代数-高等学校-习题集
Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第105211号

线性代数练习与提高 陈兴荣 刘剑锋 刘智慧 李卫峰 主编

责任编辑:谌福兴 郑济飞 责任校对:徐蕾蕾

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮政编码:430074
电 话:(027)67883511 传真:67883580 E-mail:cbb@cug.edu.cn
经 销:全国新华书店 http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:224千字 印张:8.75
版次:2018年7月第1版 印次:2018年10月第2次印刷
印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4276-6 定价:26.00元(全2册)

前　言

为方便教师批阅和学生使用，本书分为第一分册和第二分册。

第一分册包括行列式、矩阵的初等变换与线性方程组、相似矩阵与二次型，分别对应课本的第一、三、五章。

第二分册包括矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性空间与线性变换，分别对应课本的第二、四、六章。

每节包括知识要点、典型例题以及练习题三个部分。练习题分为A、B、C三个层次，A类题为基础题，B类题难度稍大，C类题为有一定难度的综合题，书末附有练习题的答案与提示，供读者核对正误。

本书编写工作安排如下：陈兴荣负责前言、行列式、矩阵及其运算的编写；刘剑锋负责矩阵的初等变换与线性方程组、线性空间与线性变换的编写；刘智慧负责向量组的线性相关性的编写；李卫峰负责相似矩阵及二次型的编写。

本书既可作为高等学校理工科专业线性代数课程的教学参考书，也可以作为报考硕士研究生的复习参考资料。

希望本书对提高教学质量有所裨益，并得到广大读者的喜爱。但限于编者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2018 年 5 月

目　录

第一章 行列式

行列式是从线性方程组的求解中产生的，是线性代数的一个基本概念，现已发展成为一种重要的数学工具，在许多领域都有广泛的应用.

第一节 二阶与三阶行列式 全排列和对换 n 阶行列式的定义

知识要点

1. 二阶与三阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

2. 排列与逆序

(1) 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列. n 元排列共有 $n!$ 个.

(2) n 元排列中，某一对元素的大小顺序与自然顺序相反，则称它们构成一个逆序.

(3) n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为该排列的逆序数，记作 $t(j_1j_2\cdots j_n)$.

(4) 如果 $t(j_1j_2\cdots j_n)$ 为奇(偶)数，则称 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇(偶)排列. n 元排列中奇、偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

(5) 在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中互换某两元素的位置而其余的保持不动，这一变换称为对换.

(6) 对换改变排列的奇偶性，即奇(偶)排列经过一次对换变成偶(奇)排列.

3. 行列式的定义

(1) n 阶行列式用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示,也可简单记作 $D=|a_{ij}|$.

(2) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,其中每项都是 D 中位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积;当各元素行标按自然顺序 $1\ 2 \cdots n$ 排列时,如果列标 $j_1\, j_2 \cdots j_n$ 为奇排列,该项的符号为负,否则符号为正,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{t(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

(3) 当各元素列标按自然顺序 $1\ 2\ \cdots\ n$ 排列时,如果行标 $i_1\ i_2 \cdots\ i_n$ 为奇排列,该项的符号为负,否则符号为正,即 $D=\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$.

典型例题

例 1 选择 i 和 k 使

(1) $1274i56k9$ 为偶排列;

(2) $1i25k4897$ 为奇排列.

解:(1) 在原排列中缺少 3 和 8,令 $i=3,k=8$ 可得排列 127435689,其逆序数为 5,故为奇排列,因此要使原排列成为偶排列,应选择 $i=8,k=3$;

(2) 类似(1),要使原排列为奇排列,应选择 $i=3,k=6$.

例 2 计算排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,并讨论其奇偶性.

解:该排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 均为偶数,故原排列为偶排列;

当 $n=4k+2,4k+3$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 均为奇数,故原排列为奇排列.

例 3 写出 4 阶行列式中所有带负号并且包含 a_{23} 的项.

解:设 4 阶行列式中带负号并且包含 a_{23} 的项行标按自然顺序记为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$,其列标构成的排列为 $i3jk$,由于 i,j,k 只能取值 1,2 或 4,当 $i=1,j=2,k=4$ 时,排列为 1324,

逆序数为 1,是奇排列。另外还可得奇排列 4312 和 2341,因此在 4 阶行列式中带有负号并且包含 a_{23} 的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$.

例 4 由行列式定义确定

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数,并说明理由.

解: 由行列式的定义,x^4 只能由主对角线上的元素 a_{11},a_{22},a_{33},a_{44} 相乘得到,而 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$,且带正号,故 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 2;

同理,x^3 只能由 a_{12},a_{21},a_{33},a_{44} 相乘得到,而 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=x^3$,且带负号,故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

例 5 由行列式定义计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解: 由行列式的定义知,此行列式的非零项只有两项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$,故 $D_n=(-1)^{t(12\cdots n)}aa\cdots a+(-1)^{t(23\cdots n1)}bb\cdots b=a^n+(-1)^{n-1}b^n$.

练习题

A 类题

1. 判断题

(1) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是由 n^2 个数构成的 n 行 n 列的数表. ( )

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_6$. ( )

2. 选择题

(1) 线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 3x_1+7x_2=4 \end{cases}$,则方程组的解$(x_1,x_2)$是(　　).

(A)(13,5)　　(B)(−13,5)　　(C)(13,−5)　　(D)(−13,−5)

(2) 方程$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=0$的根的个数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

3. 填空题

(1)按自然数从小到大为标准顺序,排列 4132 的逆序数为________.

(2)当 i 是________,k 是________时,排列 $3184i56k7$ 为偶排列.

(3)四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 且带负号的项为________.

(4)在五阶行列式中项 $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}a_{55}$ 前面应为________号(填正或负).

(5)排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数为________.

4. 计算题

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

B 类题

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 用行列式定义证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

C 类题

1. 设 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数为 k，求 n 元排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

2. 用行列式定义确定 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 4x & 3 & x \\ 1 & x & 2x & -1 \\ 3x & 2 & 5 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数,并说明理由.

第二节　行列式的性质

知识要点

1. 行列式的性质

(1)记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则称 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为 D 的转置行列式.行列式与它的转置行列式相等.

(2)行列式中某行(列)的公因子可以提到行列式符号外面,即用一个数乘这个行列式等于用这个数乘这个行列式的任意一行(列).

若行列式中某行全为零,则行列式的值等于零.

(3)交换行列式中两行(列)的位置,则行列式的值反号.

若行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值等于零.

若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则行列式的值等于零.

(4)若行列式中某行(列)是两组数的和,那么这个行列式等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行(列)以外,其余各行(列)与原来行列式的对应行(列)相同.

(5)将行列式某行(列)的倍数加到另一行(列),行列式的值不变.

2. 几个常见的行列式

(1) 上(下)三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对角行列式的值等于主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) 次三角形行列式的值由次对角线上的元素乘积添加适当的正、负号得到,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

典型例题

例 1 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证明： 左边 $= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \text{右边}.$$

例 2 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

解：
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ -b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix} + (-b_1)\begin{vmatrix} 1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

$$= (-b_2)(-b_3)\cdots(-b_n)\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-b_1)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

例 3　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解: $D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 4　计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$.

解: $D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - m & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$

$$
=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}
$$

$$
=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)m^{n-1}.
$$

练习题

A 类题

1. 填空题

(1) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=$____________.

(2) $\begin{vmatrix} 10x+10y & x & x+y \\ 10x+10y & x+y & x \\ 10x+10y & x & y \end{vmatrix}=$____________.

(3) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 2014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}=$____________.

(4) 已知 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 2t \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1$，则 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & -2 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$____________.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 10 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 11 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 10 & 11 & 12 & \cdots & 19 \end{vmatrix}$ 的值为____________.

2. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

(4) $D_n = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$.

B 类题

1. 设行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,试求方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 证明题

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;