

# 思想 数学

三编

QISI SHUXUE SANBIAN

胡皆汉

编著



辽宁师范大学出版社

# 启思数学 | 三编

QISI SHUXUE SANBIAN

胡皆汉 编著

辽宁师范大学出版社  
· 大连 ·

©胡皆汉 2018

图书在版编目(CIP)数据

启思数学三编 / 胡皆汉编著. —大连: 辽宁师范大学出版社, 2018. 2

ISBN 978-7-5652-2579-6

I. ①启… II. ①胡… III. ①初等数学 IV. ①012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 032555 号

---

出版人:王 星  
责任编辑:郝晓红  
责任校对:孔德镇 苏洋洋  
封面设计:陶 非  
版式设计:李小曼

---

出版者:辽宁师范大学出版社  
地 址:大连市黄河路 850 号  
网 址:<http://www.lnnup.net>  
<http://www.press.lnnu.edu.cn>  
邮 编:116029  
营销电话:(0411)84206854 84215261 82159915  
印刷者:大连图腾彩色印刷有限公司  
发 行 者:辽宁师范大学出版社

---

幅面尺寸:170mm×240mm  
印 张:14  
字 数:260 千字

---

出版时间:2018 年 2 月第 1 版  
印刷时间:2018 年 2 月第 1 次印刷  
书 号:ISBN 978-7-5652-2579-6

---

定 价:36.00 元



## 内容简介

思维——人类探索大自然的强大武器。思维的锻炼从小学、中学时就应着重进行。数学除本身的学术价值外，与物理学一起成为现代自然科学体系的基础。数学由于它的抽象性与逻辑性，更成为锻炼多思、拓思、创思与严密推理、周密思维的最好工具。为了便于中小学生学习阅读，本书以初等数学的若干典型数学问题为例，着重介绍它们的各种不同创思、拓思与解法、证法，以开启读者的心智，使读者养成多思、创思与周密思维的习性。本书第二、三编的内容，多为笔者的拓思、多思与创思。



## 作者简介

胡皆汉,男,1928年7月出生于广东省罗定县(今罗定市)的一户中等农家,1950年肄业于国立广西大学物理系,肄业后先从事行政工作八年,后进入研究单位从事光谱、波谱与结构化学研究数十年,1997年底退休前为中国科学院大连化学物理研究所研究员,1986年被国务院学位委员会批准为博士研究生导师;自1992年起享受国务院特殊津贴;2016年被纳入根据国务院领导指示精神建立的“老科学家学术成长资料采集工程”项目中的采集对象名单,拟采集其一生的学术成果资料,放置于在北京建立的馆藏基地,永久保存,国家对他的科研贡献给予肯定。

## 前 言

数学是适合锻炼人思维、启迪人思维并促进人创新思维的学科。本书主要对初等数学中几个方面的内容,从启迪思维与促进创新思维的角度加以介绍,针对某些典型数学命题,介绍了多种创思与证法解法,目的是使年轻读者特别是中学生阅读后,能够养成开动脑筋,对问题能够多思的习惯,并加强读者的创新意识。

笔者写作本书时已是 88 岁的耄耋老人,退休前在中国科学院大连化学物理研究所从事光谱、波谱与结构化学研究,是该研究所的研究员与博士生导师,在《中国科学》《物理学报》等 10 多种国内外学术期刊上发表了 240 多篇科学论文,并出版了《分子振动》《核磁共振波谱学》等 7 本科学专著。笔者并不是一位数学研究者,不过从少年时起就喜爱数学,读大学一年级时,曾在香港出版的《新学生》期刊上发表过一篇数学文章。70 岁退休后,我有了许多休闲的时间,不时地看些有关数学史及数学其他方面的书籍,深感我国历史上许多数学书籍缺乏逻辑性与规律性,这与那种注入式、少思维的教育及学习方式有关,所以才有了写这本《启思数学三编》的想法。

基于这样的想法,书中的第一编——揭开初等数学思维上的几面面纱,着重介绍数学的抽象性、逻辑性与对数学命题证法、解法的不同独想创思。第二编纵横图论,其中的九宫图等,是我国汉朝以来,就被一直研究的数学问题,最能反映我国古代数学家的某些思维思想。这一编涉及的数学知识较基础,所以特别希望小学老师、小学生和爱好思维的普通人,都能阅读此编;此编内容多为笔者所扩展,也是着重启发读者拓思、多思。第三编为方圆关系论,这是我国古人很关注的一个数学问题。我国第一本系统论述数学的《九章算术》,就萌发了这方面的最初做法,可惜的是,我国以后的数学家未能把它发扬光大,只是偶尔播下了种子,而没有把培育它成长,更没有使它结下饱满的禾穗。本书笔者站在我国古人的肩上加以拓展,也是着重在思维的拓展创新方面。

总之,本书是想借助初等数学的某些问题,介绍思维的逻辑性、多样性与创新性。本书与其说是一本介绍初等数学某些问题的书,毋宁说是一本借助某些典型数学问题,以开启思维的书,特别适合中学生与中学数学老师参考阅读。

本书叙述的若干数学问题相对独立。读者可以选择自己感兴趣的部分阅读;也不必把全书都看完,可以视自己的知识与兴趣而定。即使阅读其中的个别部分,读者的思维也能受到启发。

在本书的出版过程中,大连大学曹洪玉老师、辽宁师范大学许永廷老师、中国科学院大连化学物理研究所姜文洲老师给予了很大帮助,在此表示感谢。同时也感谢大连大学郑学仿老师、唐乾老师及史飞、金晓军、宫婷婷、高凌星、苏晋红、吴艳华、李如玉、张文琼等研究生为本书出版提供的帮助。

笔者年迈智衰,虽喜爱数学,但终归不是数学家,书中所论所述,若有不当之处,敬请读者批评指正。

胡皆汉

2016年6月于大连

 目 录

第一编 揭开初等数学思维上的几面面纱 .....	1
一、数学最突出的特征是抽象 .....	3
二、证明是数学论证命题的唯一手段 .....	8
2.1 $\sqrt{2}$ 是个不能用分数表达的无理数 .....	8
2.2 正多面体只有五种 .....	10
2.3 素数的个数是无穷的 .....	13
2.4 费马小定理的证明 .....	17
三、数学的公理公设逻辑体系 .....	20
四、公理演绎体系建立后的影响 .....	26
4.1 欧几里得的逻辑演绎体系,对以后数学的发展 产生了深远的影响 .....	26
4.2 欧几里得的逻辑演绎体系,对其他学科的影响 .....	27
五、数学是训练逻辑推理思维与开启创造创新思维的最好园地 .....	31
5.1 毕达哥拉斯定理的几种证明方法 .....	31
5.2 第五种证明方法及本书作者胡皆汉的拓展证法 .....	35
5.3 我国汉代人对此定理的证明 .....	37
5.4 我国清代数学家的证明方法 .....	38
5.5 毕达哥拉斯定理的整数解 .....	39
六、与时俱进的圆周率 $\pi$ 的研究简史 .....	43
6.1 $\pi$ 值的计算 .....	43
6.2 计算 $\pi$ 值的某些公式 .....	45
七、三角基本公式的多种证明方法 .....	50
7.1 单位圆证法 .....	51
7.2 第二种证法 .....	52
7.3 第三种证法 .....	53
7.4 第四种证法 .....	54



7.5 第五种证法 .....	56
八、我国古代《孙子算经》中“大衍求一术”的拓思 .....	57
8.1 问题的缘起 .....	57
8.2 孙子的算法 .....	58
8.3 本书作者胡皆汉对本类问题解法的一些拓展 .....	58
九、调和级数发散性的四种不同证法 .....	61
9.1 法国学者尼科尔·奥雷斯姆的证法 .....	62
9.2 意大利数学家皮耶特罗·门戈利的证法 .....	62
9.3 瑞士数学家约翰·伯努利的证法 .....	64
9.4 本书作者胡皆汉的证法 .....	67
十、几位天才人物年轻时的数学敏思 .....	69
10.1 天才高斯年少时的数学才华 .....	69
10.2 莱布尼茨的数学天才 .....	71
10.3 欧拉非凡的数学天赋 .....	75
10.4 天才牛顿的二项展开式 .....	79
十一、层出不穷的数学分支 .....	87

## 第二编 纵横图论 .....

一、九宫图 .....	91
1.1 历史简述 .....	91
1.2 九宫图的求解方法 .....	92
1.3 九宫图的一些性质 .....	96
1.4 别开生面的问题 .....	100
二、若干正边形阵图的探讨 .....	105
2.1 三边阵图 .....	105
2.2 五边阵图 .....	106
2.3 六边阵图 .....	107
2.4 八边阵图 .....	108
三、四方阵 .....	114
3.1 简单的历史简述 .....	114
3.2 四方阵的求法 .....	115
3.3 对称变换 .....	116
3.4 四方阵的一般化 .....	118

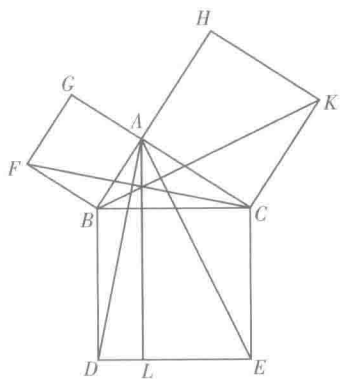
四、某些排列规律 .....	119
4.1 矩形排列 .....	119
4.2 方阵排列 .....	122
五、五方阵 .....	126
5.1 五方阵的一种构造法 .....	126
5.2 隔一类五方阵 .....	128
5.3 隔二类五方阵 .....	130
5.4 隔三类五方阵 .....	132
5.5 隔四类五方阵 .....	133
5.6 隔五类五方阵 .....	135
5.7 隔六类五方阵 .....	136
5.8 隔七类五方阵 .....	137
5.9 隔八类五方阵 .....	138
5.10 隔九类五方阵 .....	139
5.11 隔十类五方阵 .....	140
5.12 隔十一类五方阵 .....	140
5.13 有关五方阵的一点历史回顾 .....	142
六、七至十九方阵的奇方阵 .....	144
6.1 七方阵 .....	144
6.2 九方阵 .....	146
6.3 十一方阵 .....	148
6.4 十三方阵 .....	149
6.5 十五方阵 .....	150
6.6 十七方阵 .....	151
6.7 十九方阵 .....	152
七、四至二十方阵的偶方阵 .....	154
7.1 四方阵 .....	154
7.2 六方阵 .....	155
7.3 八方阵 .....	156
7.4 十方阵 .....	157
7.5 十二方阵 .....	159
7.6 十四方阵 .....	161
7.7 十六方阵 .....	163
7.8 十八方阵 .....	165

7.9	二十方阵	167
7.10	$4n$ 类方阵的简捷构造法	168
7.11	$(4n+2)$ 类方阵的简捷构造法	172
7.12	奇方阵的简捷构造法	178
八、余论		184
8.1	纵横(方阵)图的几种拓展形式	184
8.2	杨辉百子图简评	187

<b>第三编 方圆关系论</b>		191
一、圆周长与圆面积		193
1.1	圆周长	193
1.2	圆面积	193
二、球的面积与球的体积		198
2.1	球的面积	198
2.2	球的体积	199
三、椭圆、椭圆体与圆锥的有关计算公式		204
四、方圆关系		205
4.1	本书作者胡皆汉提出的方圆相关原理	205
4.2	圆面积计算公式的导出	205
4.3	球面积、球体积计算公式的导出	206
4.4	椭圆面积、椭圆体体积计算公式的导出	206
4.5	圆锥与圆台体积计算公式的导出	207
五、正多边形与其内切圆的相关关系		209
六、追思怀古		212

# 第一编

## 揭开初等数学思维上的几面面纱



本书的第一编先叙述数学的抽象性和逻辑性,再对许多人都比较熟识的数学问题,如勾股定理、 $\pi$ 值的计算、三角基本公式的推导等运用不同的证法或解法,给人以启迪,它们重点都是在思维层面,故把本编命名为“揭开初等数学思维上的几面面纱”。





## 一、数学最突出的特征是抽象

从思维的角度来说,与天文、物理、化学、生物等自然科学相比,数学是最抽象的。天文观测的日月星辰,形象具体;物理研究的声、光、电、磁、热、力也比较具体;化学探讨的物质变化,也都可观;生物描述的动植物更是形象鲜明,可观可触;唯有数学中的数字,无形可观,无物可触。整数、分数虽源于客观实际,但无理数是数学本身演算中推理得出的结果,并不是直接观察事物的反映。数1是算术中最原始的一个整数,其他的正整数都能在1的基础上再加上定义得出。例如:2可定义为1加上一个1得到,即 $2=1+1$ ;3可定义为2加上一个1得到,即 $3=2+1$ ;同理, $4=3+1$ , $5=4+1$ ……有了这样的定义,依靠逻辑,我们便可以得到 $5=3+2$ , $7=4+3$ 等加法运算。根据定义, $3+2=3+1+1=(3+1)+1=4+1=5$ , $4+3=4+2+1=(4+1)+1+1=(5+1)+1=6+1=7$ 。此外,因为 $2+3=2+2+1=(2+1)+1+1=(3+1)+1=4+1=5$ ,所以 $3+2=2+3$ ,这就是加法交换律的由来。另外, $3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$ ,即5可以表示为3与(1+1)结合,也可以表示为3与1结合后加上一个1,结果并不因组合的不同而不等,这便可得出整数的加法结合律。把这种思维推广开来,便可定义减法、乘法、除法,也可定义分数、小数、负数、无理数、虚数的运算规则。对探讨空间关系的几何学也是这样,先定义点、线、面、体等,再与规定的公理、公设进行逻辑推理即可得出各种命题,如三角形的内角和等于 $180^\circ$ ,直角三角形的两直角边边长的平方和等于斜边长的平方等。所以说数学是依靠定义与逻辑推理的科学,着重于最初定义、基本公理、基础公设与逻辑证明,依靠思维推理,而不需观察与实验,它最锻炼人的思维、推理和创新能力。

为什么会是这样?因为数学探讨的是最抽象的数量、空间概念及它们之间的关系,而不是具体的事物,且不需观察与实验。为什么说数学是最抽象的呢?譬如狗、牛、鸡的形象都很具体,看得见,摸得着;又如诗句中描写的“大漠孤烟直,长河落日圆”“枯藤老树昏鸦,小桥流水人家”“春眠不觉晓,处处闻啼鸟”“大江东去,浪淘尽,千古风流人物”等更是形象鲜明而富于想象。而数字1,你能看见吗?也许有人会说,一个人、一只狗、一棵树、一条河

等,不都有个“一”吗?诚然,在数量上它们都是一,但是这个一,都把各物的形象,如人、狗、树、河等抽去,而变为抽象的数量一了。这个抽象的一,既不是一人,也不等于一棵树,它变得毫无形象,但却可以装下各种数量为一的事物。正因为如此,它便大有好处,数学运算的结果便会适合各种事物的数量计算。例如,15棵树加21棵树,因为按算术计算  $15(\text{棵树})+21(\text{棵树})=36(\text{棵树})$ ,则15只狗加21只狗也一定等于36只狗。

1与其他正整数已经够抽象了,但是负数似乎比正整数还不可想象,而零也同样难于思拟。零(0)的引入(最初由印度人引进)在数学发展史上是一件了不起的事。零并不是“没有”那样简单:在十(10)的后面加个0,便是一百(100),再加个0,便是一千(1 000);在11的中间加个0,便是一百〇一(101);任何非零数( $x$ )的零次方,都等于1,即  $x^0=1$ (如  $2^0=1, 1.5^0=1$  等);有了零便可把方程的一边置于零,如  $ax^2+bx+1=0$  等;零又是正负数分开的地方……你看,“零”这个数的内容多么宽广!

整数和分数虽然抽象但还可数,像 $\sqrt{2}$ 这样的无理数,化为用小数表达时,则变得无穷无尽( $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\dots$ ),用多少数字也表达不了,更改不了。而虚数更加抽象,它们的运算在某些方面也与实数不同,如 $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times 3=6, \sqrt{4}\times\sqrt{9}=\sqrt{36}=6$ ,即可以把分开的正数开方相乘写为正数相乘后的开方;但是 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-2}\neq\sqrt{(-1)\times(-2)}$ ,因为 $\sqrt{-1}=i, \sqrt{-2}=\sqrt{2}i, \sqrt{-1}\times\sqrt{-2}=i\times\sqrt{2}i=\sqrt{2}i^2=-\sqrt{2}(i^2=-1)$ ,而 $\sqrt{(-1)\times(-2)}=\sqrt{2}, -\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$ ,所以负数的开方相乘不等于负数相乘后的开方。虚数是按代数运算得到的数类(不是从客观事物抽象而来),但在数学中十分有用,以至不可一日无它。

代数符号的引入,进一步使数学更为抽象,如代数符号 $a$ ,既可以为1,2,3,……,又可以为 $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \dots$ ,譬如方程  $ax^2+bx+c=0$  中的 $a, b, c$ 都可以代表各种各样的数。不仅如此,数学计算的不仅是数,还可以是其他按一定定义的对象,如矩阵的计算便是如此。什么是矩阵呢?矩阵在广义上是一些数字或数字符号的矩形排列,它可以与其他矩阵排列按一定规则相结合,完整地写出一个矩阵,它有如下表达式:

$$\text{如 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 35 & 77 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 20 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \text{一般形式为 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}。$$

我们还可以用 $[a_{ij}]$ 表示一般化矩阵, 竖直方向的称为列, 水平方向的称为行,  $a_{ij}$ 表示矩阵的一个元素, 它位于第 $i$ 行第 $j$ 列。首先定义, 只有两个矩阵的每个元素都相等时, 它们才相等。即若矩阵 $A$ =矩阵 $B$ , 则对所有的 $i, j$ , 都有 $a_{ij}=b_{ij}$ 。再定义矩阵的乘法法则, 如 $A \cdot B=C$ , 则 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ 。如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix},$$

其中

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21},$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}, c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}, c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22},$$

$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}, c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}, c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23},$$

$$c_{14}=a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24}, c_{24}=a_{21}b_{14}+a_{22}b_{24}, c_{34}=a_{31}b_{14}+a_{32}b_{24}。$$

这样便有

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}。$$

显然

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

所以矩阵的乘法没有交换律。

但是可以证明结合律对矩阵乘法是适用的。如

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \right)。$$

我们定义矩阵和它们的运算法则, 有什么实际意义吗? 矩阵代数的一个重要的应用是用它来表示一个点, 或定义的点集合在空间的变换, 例如一个点在一个平面上的反映(反映符号用 $\sigma$ 表示), 反映平面被选择为与笛卡儿坐标平面(即 $xy, xz$ 或 $yz$ 平面)重合, 一个普通的点的反映便有如下效应: 垂直于平面的坐标改变符号, 由平面所定义的两个坐标不变。因此, 对于在三个主平面中的反映, 便可用如下矩阵方程的乘法写出来:

$$\sigma(xy): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \bar{Z} \end{bmatrix},$$

$$\sigma(xz): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \bar{Y} \\ Z \end{bmatrix},$$

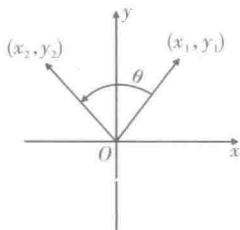


$$\sigma(yz): \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

如果一点的坐标先经  $\sigma(xy)$  反映,再经这个  $\sigma(xy)$  平面反映,显然该点恢复到它原来的坐标位置,用矩阵表达如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

又如,一点的坐标在  $xOy$  平面逆时针转动角度  $\theta$ ,如下图所示。



经简单的运算,显然有

$$x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta,$$

$$y_2 = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta,$$

写成矩阵形式便有

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

如果顺时针转动角度  $\theta$ (即逆时针转动角度  $-\theta$ ),由于  $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ,  $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ,则顺时针转动的矩阵便为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

如果一点的坐标逆时针转动角度  $\theta$ ,再顺时针转动角度  $\theta$ ,显然该点恢复到原来的坐标位置,用矩阵表示便为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \sin\theta & \cos\theta \cdot (-\sin\theta) + \sin\theta \cdot \cos\theta \\ -\sin\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta & -\sin\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos\theta \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$