启思数学三编

QISI SHUXUE SANBIAN

胡皆汉 编著

辽宁师范大学出版社

启思数学 | 三编

QISI SHUXUE SANBIAN

胡皆汉 编著

辽宁师范大学出版社
·大 连·

图书在版编目(CIP)数据

启思数学三编 / 胡皆汉编著. —大连 : 辽宁师范大学出版社，2018.2
ISBN 978-7-5652-2579-6

Ⅰ. ①启…　Ⅱ. ①胡…　Ⅲ. ①初等数学　Ⅳ. ①012

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 032555 号

出 版 人:王　星
责任编辑:郝晓红
责任校对:孔德镇　苏洋洋
封面设计:陶　非
版式设计:李小曼

出 版 者:辽宁师范大学出版社
地　　址:大连市黄河路 850 号
网　　址:http://www.lnnup.net
　　　　　http://www.press.lnnu.edu.cn
邮　　编:116029
营销电话:(0411)84206854　84215261　82159915
印 刷 者:大连图腾彩色印刷有限公司
发 行 者:辽宁师范大学出版社

幅面尺寸:170mm×240mm
印　　张:14
字　　数:260 千字

出版时间:2018 年 2 月第 1 版
印刷时间:2018 年 2 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5652-2579-6

定　　价:36.00 元

内容简介

思维——人类探索大自然的强大武器。思维的锻炼从小学、中学时就应着重进行。数学除本身的学术价值外，与物理学一起成为现代自然科学体系的基础。数学由于它的抽象性与逻辑性，更成为锻炼多思、拓思、创思与严密推理、周密思维的最好工具。为了便于中小学生阅读，本书以初等数学的若干典型数学问题为例，着重介绍它们的各种不同创思、拓思与解法、证法，以开启读者的心智，使读者养成多思、创思与周密思维的习性。本书第二、三编的内容，多为笔者的拓思、多思与创思。

作者简介

胡皆汉，男，1928年7月出生于广东省罗定县(今罗定市)的一户中等农家，1950年肄业于国立广西大学物理系，肄业后先从事行政工作八年，后进入研究单位从事光谱、波谱与结构化学研究数十年，1997年底退休前为中国科学院大连化学物理研究所研究员，1986年被国务院学位委员会批准为博士研究生导师；自1992年起享受国务院特殊津贴；2016年被纳入根据国务院领导指示精神建立的“老科学家学术成长资料采集工程”项目中的采集对象名单，拟采集其一生的学术成果资料，放置于在北京建立的馆藏基地，永久保存，国家对他的科研贡献给予肯定。

前　言

数学是适合锻炼人思维、启迪人思维并促进人创新思维的学科。本书主要对初等数学中几个方面的内容，从启迪思维与促进创新思维的角度加以介绍，针对某些典型数学命题，介绍了多种创思与证法解法，目的是使年轻读者特别是中学生阅读后，能够养成开动脑筋，对问题能够多思的习惯，并加强读者的创新意识。

笔者写作本书时已是88岁的耄耋老人，退休前在中国科学院大连化学物理研究所从事光谱、波谱与结构化学研究，是该研究所的研究员与博士生导师，在《中国科学》《物理学报》等10多种国内外学术期刊上发表了240多篇科学论文，并出版了《分子振动》《核磁共振波谱学》等7本科学专著。笔者并不是一位数学研究者，不过从少年时起就喜爱数学，读大学一年级时，曾在香港出版的《新学生》期刊上发表过一篇数学文章。70岁退休后，我有了许多休闲的时间，不时地看些有关数学史及数学其他方面的书籍，深感我国历史上许多数学书籍缺乏逻辑性与规律性，这与那种注入式、少思维的教育及学习方式有关，所以才有了写这本《启思数学三编》的想法。

基于这样的想法，书中的第一编——揭开初等数学思维上的几面面纱，着重介绍数学的抽象性、逻辑性与对数学命题证法、解法的不同独想创思。第二编纵横图论，其中的九宫图等，是我国汉朝以来，就被一直研究的数学问题，最能反映我国古代数学家的某些思维思想。这一编涉及的数学知识较基础，所以特别希望小学老师、小学生和爱好思维的普通人，都能阅读此编；此编内容多为笔者所扩展，也是着重启发读者拓思、多思。第三编为方圆关系论，这是我国古人很关注的一个数学问题。我国第一本系统论述数学的《九章算术》，就萌发了这方面的最初做法，可惜的是，我国以后的数学家未能把它发扬光大，只是偶尔播下了种子，而没有把培育它成长，更没有使它结下饱满的禾穗。本书笔者站在我国古人的肩上加以拓展，也是着重在思维的拓展创新方面。

总之，本书是想借助初等数学的某些问题，介绍思维的逻辑性、多样性与创新性。本书与其说是一本介绍初等数学某些问题的书，毋宁说是一本借助某些典型数学问题，以开启思维的书，特别适合中学生与中学数学老师参考阅读。

本书叙述的若干数学问题相对独立。读者可以选择自己感兴趣的部分阅读；也不必把全书都看完，可以视自己的知识与兴趣而定。即使阅读其中的个别部分，读者的思维也能受到启发。

在本书的出版过程中，大连大学曹洪玉老师、辽宁师范大学许永廷老师、中国科学院大连化学物理研究所姜文洲老师给予了很大帮助，在此表示感谢。同时也感谢大连大学郑学仿老师、唐乾老师及史飞、金晓军、宫婷婷、高凌星、苏晋红、吴艳华、李如玉、张文琼等研究生为本书出版提供的帮助。

笔者年迈智衰，虽喜爱数学，但终归不是数学家，书中所论所述，若有不当之处，敬请读者批评指正。

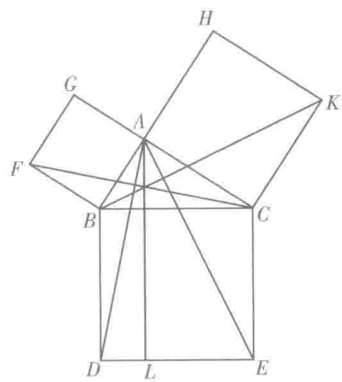
胡皆汉

2016 年 6 月于大连

目　录

第一编

揭开初等数学思维上的几面面纱



本书的第一编先叙述数学的抽象性和逻辑性，再对许多人都比较熟识的数学问题，如勾股定理、π值的计算、三角基本公式的推导等运用不同的证法或解法，给人以启迪，它们重点都是在思维层面，故把本编命名为“揭开初等数学思维上的几面面纱”。

一、数学最突出的特征是抽象

从思维的角度来说，与天文、物理、化学、生物等自然科学相比，数学是最抽象的。天文观测的日月星辰，形象具体；物理研究的声、光、电、磁、热、力也比较具体；化学探讨的物质变化，也都可观；生物描述的动植物更是形象鲜明，可观可触；唯有数学中的数字，无形可观，无物可触。整数、分数虽源于客观实际，但无理数是数学本身演算中推理得出的结果，并不是直接观察事物的反映。数1是算术中最原始的一个整数，其他的正整数都能在1的基础上再加上定义得出。例如：2可定义为1加上一个1得到，即$2=1+1$；3可定义为2加上一个1得到，即$3=2+1$；同理，$4=3+1$，$5=4+1$……有了这样的定义，依靠逻辑，我们便可以得到$5=3+2$，$7=4+3$等加法运算。根据定义，$3+2=3+1+1=(3+1)+1=4+1=5$，$4+3=4+2+1=(4+1)+1+1=(5+1)+1=6+1=7$。此外，因为$2+3=2+2+1=(2+1)+1+1=(3+1)+1=4+1=5$，所以$3+2=2+3$，这就是加法交换律的由来。另外，$3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$，即5可以表示为3与$(1+1)$结合，也可以表示为3与1结合后加上一个1，结果并不因组合的不同而不等，这便可得出整数的加法结合律。把这种思维推广开来，便可定义减法、乘法、除法，也可定义分数、小数、负数、无理数、虚数的运算规则。对探讨空间关系的几何学也是这样，先定义点、线、面、体等，再与规定的公理、公设进行逻辑推理即可得出各种命题，如三角形的内角和等于$180°$，直角三角形的两直角边边长的平方和等于斜边长的平方等。所以说数学是依靠定义与逻辑推理的科学，着重于最初定义、基本公理、基础公设与逻辑证明，依靠思维推理，而不需观察与实验，它最锻炼人的思维、推理和创新能力。

为什么会是这样？因为数学探讨的是最抽象的数量、空间概念及它们之间的关系，而不是具体的事物，且不需观察与实验。为什么说数学是最抽象的呢？譬如狗、牛、鸡的形象都很具体，看得见，摸得着；又如诗句中描写的“大漠孤烟直，长河落日圆”“枯藤老树昏鸦，小桥流水人家”“春眠不觉晓，处处闻啼鸟”“大江东去，浪淘尽，千古风流人物”等更是形象鲜明而富于想象。而数字1，你能看见吗？也许有人会说，一个人、一只狗、一棵树、一条河

等，不都有个“一”吗？诚然，在数量上它们都是一，但是这个一，都把各物的形象，如人、狗、树、河等抽去，而变为抽象的数量一了。这个抽象的一，既不是一个人，也不等于一棵树，它变得毫无形象，但却可以装下各种数量为一的事物。正因为如此，它便大有好处，数学运算的结果便会适合各种事物的数量计算。例如，15 棵树加 21 棵树，因为按算术计算 15(棵树)＋21(棵树)＝36(棵树)，则 15 只狗加 21 只狗也一定等于 36 只狗。

1 与其他正整数已经够抽象了，但是负数似乎比正整数还不可想象，而零也同样难于思拟。零(0)的引入(最初由印度人引进)在数学发展史上是一件了不起的事。零并不是“没有”那样简单：在十(10)的后面加个 0，便是一百(100)，再加个 0，便是一千(1 000)；在 11 的中间加个 0，便是一百〇一(101)；任何非零数(x)的零次方，都等于 1，即 $x^0=1$(如 $2^0=1$，$1.5^0=1$ 等)；有了零便可把方程的一边置于零，如 $ax^2+bx+1=0$ 等；零又是正负数分开的地方……你看，“零”这个数的内容多么宽广！

整数和分数虽然抽象但还可数，像$\sqrt{2}$这样的无理数，化为用小数表达时，则变得无穷无尽($\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\cdots$)，用多少数字也表达不了，更改不了。而虚数更加抽象，它们的运算在某些方面也与实数不同，如$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6$，$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=\sqrt{36}=6$，即可以把分开的正数开方相乘写为正数相乘后的开方；但是$\sqrt{-1}\times\sqrt{-2}\neq\sqrt{(-1)\times(-2)}$，因为$\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\sqrt{-1}\times\sqrt{-2}=\mathrm{i}\times\sqrt{2}\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{i}^2=-\sqrt{2}$($\mathrm{i}^2=-1$)，而$\sqrt{(-1)\times(-2)}=\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$，所以负数的开方相乘不等于负数相乘后的开方。虚数是按代数运算得到的数类(不是从客观事物抽象而来)，但在数学中十分有用，以至不可一日无它。

代数符号的引入，进一步使数学更为抽象，如代数符号 a，既可以为 1，2，3，…，又可以为$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$，…，譬如方程 $ax^2+bx+c=0$ 中的 a，b，c 都可以代表各种各样的数。不仅如此，数学计算的不仅是数，还可以是其他按一定定义的对象，如矩阵的计算便是如此。什么是矩阵呢？矩阵在广义上是一些数字或数字符号的矩形排列，它可以与其他矩阵排列按一定规则相结合，完整地写出一个矩阵，它有如下表达形式：

如$\begin{bmatrix}1&3&5\\7&10&8\\6&35&77\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2&8&9&10\\3&7&20&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$，一般形式为$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$。

我们还可以用$[a_{ij}]$表示一般化矩阵，竖直方向的称为列，水平方向的称为行，a_{ij}表示矩阵的一个元素，它位于第i行第j列。首先定义，只有两个矩阵的每个元素都相等时，它们才相等。即若矩阵A=矩阵B，则对所有的i，j，都有$a_{ij}=b_{ij}$。再定义矩阵的乘法法则，如$A\cdot B=C$，则$c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$。如

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34}\end{bmatrix},$$

其中

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21},c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21},c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21},$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22},c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22},c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22},$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23},c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23},c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23},$$
$$c_{14}=a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24},c_{24}=a_{21}b_{14}+a_{22}b_{24},c_{34}=a_{31}b_{14}+a_{32}b_{24}。$$

这样便有

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 3 & 5\end{bmatrix}。$$

显然

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix},$$

所以矩阵的乘法没有交换律。

但是可以证明结合律对矩阵乘法是适用的。如

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}5 & 1\\ 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 4 & 9\end{bmatrix}\right)。$$

我们定义矩阵和它们的运算法则，有什么实际意义吗？矩阵代数的一个重要的应用是用它来表示一个点，或定义的点集合在空间的变换，例如一个点在一个平面上的反映（反映符号用σ表示），反映平面被选择为与笛卡儿坐标平面（即xy，xz或yz平面）重合，一个普通的点的反映便有如下效应：垂直于平面的坐标改变符号，由平面所定义的两个坐标不变。因此，对于在三个主平面中的反映，便可用如下矩阵方程的乘法写出来：

$$\sigma(xy):\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ Y\\ \overline{Z}\end{bmatrix},$$

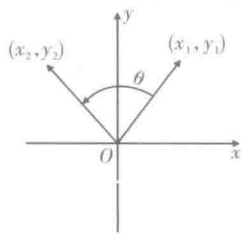
$$\sigma(xz):\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ \overline{Y}\\ Z\end{bmatrix},$$

$$\sigma(yz):\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{X}\\Y\\Z\end{bmatrix}。$$

如果一点的坐标先经 $\sigma(xy)$ 反映，再经这个 $\sigma(xy)$ 平面反映，显然该点恢复到它原来的坐标位置，用矩阵表达如下：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}。$$

又如，一点的坐标在 xOy 平面逆时针转动角度 θ，如下图所示。



经简单的运算，显然有

$$x_2=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,$$
$$y_2=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta,$$

写成矩阵形式便有

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}。$$

如果顺时针转动角度 θ（即逆时针转动角度 $-\theta$），由于 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，则顺时针转动的矩阵便为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}。$$

如果一点的坐标逆时针转动角度 θ，再顺时针转动角度 θ，显然该点恢复到原来的坐标位置，用矩阵表示便为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\sin\theta&\cos\theta\cdot(-\sin\theta)+\sin\theta\cdot\cos\theta\\-\sin\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\cos\theta&-\sin\theta\cdot(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta&0\\0&\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$$