FILTER

滤子理论与可导映射研究

刘莉君◎著

Research on Filter Theory and Derivable Mapping

科学出版社

滤子理论与可导映射研究

Research on Filter Theory and Derivable Mapping

刘莉君　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书集中研究逻辑代数上滤子理论和算子代数上可导映射，主要是作者近年研究工作的总结，同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新成果. 全书共 7 章，涉及两大部分的内容：第一部分(第 1—4 章)逻辑代数上的滤子理论，主要研究剩余格上各种滤子的系统结构，获得这些滤子间相互等价的条件，建立逻辑代数上滤子的表示理论；第二部分(第 5—7 章)主要研究三角代数上的可导映射，并给出所得结果的若干应用.

本书适合作为数学和计算机等专业的本科生或研究生教材，还可作为相关专业读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

滤子理论与可导映射研究/刘莉君著. —北京：科学出版社，2018.6

ISBN 978-7-03-057257-8

Ⅰ. ①滤…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①滤子-理论研究②映射-研究　Ⅳ. ①O144 ②O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 083802 号

责任编辑：周　涵／责任校对：王　瑞
责任印制：张　伟／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 6 月第 一 版　开本：720 × 1000　B5
2018 年 6 月第一次印刷　印张：12
字数：250 000

定价：89.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

算子代数理论产生于 20 世纪 30 年代, 随着这一学科的迅速发展, 已成为现代数学中的一个热门分支, 与量子力学、非交换几何、线性系统、控制理论, 甚至数论以及其他一些重要数学分支都有着密切的联系. 非自伴算子代数又是算子代数的一个重要分支. 而在非自伴算子代数研究中, 三角代数是一个重要的研究方向, 三角代数的概念由 Cheung 引入后, 吸引了一大批数学家投身其中, 对这一概念的研究提出了许多新的问题, 极大地推动了三角代数的发展, 进而也推动了非自伴算子代数的研究. 导子是一类非常重要的变换, 在理论及应用上都有很重要的意义, 近年来, 关于三角代数上的导子的研究也一直受到国内外学者的广泛关注.

在信息科学、计算机科学、控制理论、人工智能等很多领域中, 逻辑代数是其推理机制的代数基础. 为给不确定信息处理理论提供可靠且合理的逻辑基础, 许多学者提出并研究了非经典逻辑系统. 同时, 作为非经典逻辑语义系统的各种逻辑代数也被广泛研究. 目前, 大多数学者都认同剩余格为一种最广泛的逻辑代数结构, 而滤子理论是非经典代数研究领域的一个重要概念, 它们对各种逻辑系统及与之匹配的逻辑代数的完备性问题的研究发挥着极其重要的作用.

由此可以看出, 出版一部集中讨论剩余格上的滤子理论和算子代数上的可导映射的书籍是十分必要的.

本书集中研究逻辑代数上滤子理论和算子代数上可导映射, 主要是作者近年研究工作的总结, 同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新成果. 全书共 7 章, 涉及两大部分的内容：第一部分 (第 1—4 章) 逻辑代数即滤子理论部分, 主要介绍格与剩余格的基本概念和性质, 利用区间模糊集的方法原理, 研究剩余格 (可交换剩余格与非交换剩余格) 上各种滤子的系统结构, 获得这些滤子间相互等价的条件, 建立逻辑代数上滤子的表示理论；第二部分 (第 5—7 章) 算子代数即可导映射部分, 主要介绍非自伴算子代数, 特别是三角代数的相关概念和性质特征, 并在三角代数上研究可导映射和与可导映射有关的函数方程的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性问题, 最后给出所得结果的若干应用. 本书可作为数学和计算机等专业的本科生或研究生教材, 对前述相关领域的科研人员具有一定的参考价值.

本书的相关研究工作得到了陕西省教育厅专项科学研究项目和陕西理工大学

科学研究项目的资助, 在编写的过程中得到了作者所在单位陕西理工大学的领导及同行的大力支持, 在此一并表示感谢.

虽经多次修改, 但由于作者的水平有限, 书中不当之处在所难免, 敬请专家和读者批评指正.

作 者
2018 年 3 月

目　　录

第 1 章　格论的基本概念

19 世纪上半叶, 乔治 • 布尔试图形式化命题逻辑, 导致了布尔代数的产生. 19 世纪后期, 在研究布尔代数公理化的过程中, Charles Peirce 和 Ernst Schroder 发现引入格的概念是很有用的. 虽然已经有几个数学家, 特别是 Edward Huntington 等, 他们早期工作的一些结果已经非常漂亮, 但那些结果并没有引起数学界的重视. 而对许多数学科目来讲, 格论之所以能变得越来越重要并引起关注, 应归功于 Garrent Birkhoff 在 20 世纪上半叶所做的工作.

1.1　偏序集合

实数集 $\mathbf{R}$ 的算术性质可以用加法和乘法的术语来表述, 因而拓扑的性质即用序关系的术语来表达, 这种关系的基本性质是:

(1) 对于任意实数 $a \in \mathbf{R}$, 有 $a \leqslant a$ 成立, 即 $\leqslant$ 是自反的;

(2) 对于任意实数 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$, 则必有 $a = b$, 即 $\leqslant$ 是反对称性的;

(3) 对于任意实数 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$, 则必有 $a \leqslant c$, 即 $\leqslant$ 是传递的;

(4) 对于任意实数 $a, b \in \mathbf{R}$, 如果 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$, 即 $\leqslant$ 是完全的或线性的.

具有性质 (1)—(4) 的二元关系的例子有许多, 而具有性质 (1)—(3) 的例子则更多. 仅这一事实或许还提不出正当的理由去引入一个新的概念. 然而, 它却已显示出许多基本的概念和性质实际是依赖于 (1)—(3) 的. 这就使得不管在任何时候当具有一个满足 (1)—(3) 的关系时, 都有利于我们能够使用这些基本的概念和性质. 因此将满足 (1)—(3) 的关系, 称为偏序关系 (partial ordering relation). 将具有这种关系的集合, 称为偏序集合, 简称偏序集.

定义 1.1.1[1]　设 R 是非空集合 P 上的关系, 如果 R 满足自反性、反对称性和传递性, 则称 R 是 A 上的偏序关系, 把定义了偏序关系 $\leqslant$ 的集合 P 称为偏序集, 记作 $(P, \leqslant)$.

如果偏序集 $(P, \leqslant)$ 还满足条件 (4), 则称其为一条链或一个完全的 (或线性的) 序集. 其中如果 $a \leqslant b$, 则称 a 和 b 是可比较的; 否则, 称 a 和 b 是不可比的. 本节首先让我们回顾偏序集中一些特殊元素, 并且设 $(P, \leqslant)$ 是一偏序集, 其中 $A \subseteq P$ 且 $a \in P$.

定义 1.1.2[1]　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 集合 $A\subseteq P$, 对于 A 中的一个元素 a, 若 A 中不存在任何不等于 a 的元素 x, 使得 $a\leqslant x$, 则称 a 是 A 的一个极大元 (maximal element). 同理, 对于 $a\in A$, 若 A 中不存在任何不等于 a 的元素 x, 使得 $x\leqslant a$, 则称 a 是 A 的一个极小元 (minimal element).

例 1.1.1　若 $A=\{2,3,4,6,8\}$, 偏序关系是整除关系, 则 6 和 8 是 A 的极大元, 2 和 3 是 A 的极小元.

从本例中可知, 极大元和极小元不是唯一的.

定义 1.1.3　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 集合 $A\subseteq P$, 若存在 $a\in A$, 使得 A 中任意元素 x 都有 $x\leqslant a$, 则称 a 是 A 的最大元 (greatest element). 同理, 若存在 $a\in A$, 使得 A 中任意元素 x 都有 $x\geqslant a$, 则称 a 是 A 的最小元 (smallest element).

注　(1) 通俗地讲, 最大元是 "比其他元素都大的元素", 最小元是 "比其他元素都小的元素", 即最大 (小) 元必须与其他元素都有关系, 且比其他元素都 "大"("小"); 极大元是 "没有比它大的元素", 极小元是 "没有比它小的元素", 即极大 (小) 元要么与其他元素没关系, 要么比其他元素 "大"("小");

(2) 关于偏序关系 $(P,\leqslant)$, P 的非空子集 A 的最大元、最小元不一定存在, 如果存在, 则由反对称性, 它一定是唯一的. 如果 A 是有限集合, A 的极大元、极小元一定存在, 但却可以不唯一.

例 1.1.2　若 $A=\{2,3,4,6,8\}$, 偏序关系是整除关系, 因为对整除关系来说, A 中所有元素的 (最小) 公分母和 (最大) 公约数均不属于 A, 所以 A 中既没有最大元, 也没有最小元.

(3) 一般地, 极大 (小) 元不一定是最大 (小) 元, 但最大 (小) 元一定是极大 (小) 元.

定义 1.1.4　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 非空子集 $A\subseteq P$, 如果 P 中存在某个元素 a, 使得对于任意的 $x\in A$, 都有 $x\leqslant a$, 则称 a 是 A 的一个上界 (upper bound). 如果对于任意的 $x\in A$, 都有 $a\leqslant x$, 则称 a 是 A 的一个下界 (lower bound). 如果 a 是 A 的所有上界的最小元素, 则称 a 是 A 的上确界 (least upper bound), 记为 $a=\sup A$. 如果 a 是 A 的所有下界的最大元素, 则称 a 是 A 的下确界 (greatest lower bound), 记为 $b=\inf A$.

注　(1) A 的上界、下界、上确界和下确界都在 P 中, 但不一定在 A 中.

(2) A 的上界、下界不一定存在; 若存在, 不一定唯一.

(3) A 的上确界、下确界不一定存在; 若存在, 必定唯一.

定理 1.1.1　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集, 非空子集 $A\subseteq P$.

(1) 若 a 是 A 的最大元 (最小元), 则 a 必定是 A 的上确界 (下确界);

(2) 若 a 是 A 的上界 (下界), 且 $a\in A$, 则 a 必定是 A 的最大元 (最小元).

证明略, 感兴趣的读者可根据其定义自行证明.

定义 1.1.5 若偏序集 $(P,\leqslant)$ 的任一元素 a,b 之间必有关系, 即或者 $a\leqslant b$, 或者 $b\leqslant a$, 则称 $(P,\leqslant)$ 是一个全序集 (或线序集).

定义 1.1.6 若偏序集 $(P,\leqslant)$ 的任一非空子集都存在最小元素, 则称 $(P,\leqslant)$ 为良序集.

定理 1.1.2 每一个良序集一定是全序集.

证明 设 $(P,\leqslant)$ 为良序集, 则 P 中任一对 x,y 构成的子集 $\{x,y\}$ 必有最小元, 即必有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$, 从而得 $(P,\leqslant)$ 是一个全序集. 证毕.

定理 1.1.3 每一个有限的全序集一定是良序集.

证明 反证法 设 $P=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $(P,\leqslant)$ 是一个全序集, 假设 $(P,\leqslant)$ 不是良序集, 则存在 P 的子集 A, 使 A 中没有最小元. 由于 A 是有限的, 必然最少存在 A 中的元素 x 和 y, 使 x 和 y 没有关系 $\leqslant$, 这与 $(P,\leqslant)$ 是一个全序集矛盾. 因此可得 $(P,\leqslant)$ 是一个良序集. 证毕.

1.2 格

在 1.1 节中, 我们已经对偏序集的子集引入了上确界和下确界的概念, 但并非每个子集都有上确界或下确界. 然而, 当某子集的上确界、下确界存在时, 这个上确界、下确界是唯一确定的. 由此引入格的概念. 格是重要的代数学研究对象, 但它也是偏序结构的自然产物. 因此, 格的概念的引入经常有两种典型的方式, 即代数学的方式和序结构的方式. 本节我们将重点讨论格的概念及性质.

1.2.1 格的基本概念

定义 1.2.1[2] 设 L 是非空子集, 若对于任意的 $a,b\in L$, 如果 $\sup(a,b)$ 和 $\inf(a,b)$ 总存在, 则称偏序集 $(L,\leqslant)$ 为一个格 (lattice). 其中用 $a\wedge b=\inf(a,b)$ 表示 a 与 b 的最大下界; 用 $a\vee b=\sup(a,b)$ 表示 a 与 b 的最小上界.

例 1.2.1 设 S 是一个集合, 若 $P(S)$ 为 S 的一个幂集, 则称偏序集 $\langle P(S),\subseteq\rangle$ 是一个格. 因为对于任意的 $A,B\subseteq S$, 存在 A,B 的最小上界为 $A\bigcup B$ 和 A,B 的最大下界为 $A\bigcap B$.

容易验证格具有下列性质: 设偏序集 $(L,\leqslant)$ 是一个格, 当且仅当对于任意的 $A\subseteq L$, 满足 $A\neq\varnothing$(即集合 A 非空), 则 $\inf A$ 和 $\sup A$ 存在.

定义 1.2.2 设 $(L,\oplus,\otimes)$ 是一个代数系统, 如果 $\otimes,\oplus$ 满足

(1) 交换律: $a\otimes b=b\otimes a$, $a\oplus b=b\oplus a$;

(2) 结合律: $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$, $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$;

(3) 吸收律: $a\otimes(a\oplus b)=a$, $a\oplus(a\otimes b)=a$.

则称 $(L,\oplus,\otimes)$ 为代数格. 如果 $S\subseteq L$, 且 $(S,\oplus,\otimes)$ 是代数格, 则称 S 为 L 的子格.

定理 1.2.1　设 $(P(S), \bigcap, \bigcup)$ 是一个代数格, 定义格上的自然偏序 $\leqslant$ 如下: $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \otimes b = a$, 则 $(L, \leqslant)$ 是一个偏序格.

证明　(1) 由于幂等律 $a \otimes a = a$, 即 $a \leqslant a$, 故反身性成立;

设 $a \leqslant b, b \leqslant a$, 则 $a = a \otimes b = b \otimes a = b$, 即反对称性成立;

设 $a \leqslant b, b \leqslant c$, 则 $a \otimes c = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b = a$, 即传递性成立.

(2) 设任意的 $a, b \in L$, $a \otimes (a \otimes b) = (a \otimes a) \otimes b = a \otimes b$, 即 $a \otimes b \leqslant a$; 同理, $(a \otimes b) \otimes b = a \otimes (b \otimes b) = a \otimes b$, 即 $a \otimes b \leqslant b$, 所以 $a \otimes b$ 是 $\{a, b\}$ 的下界.

假设 c 是 $\{a, b\}$ 的另一下界, 则 $c \otimes (a \otimes b) = (c \otimes a) \otimes b = c \otimes b = c$, 从而 $\inf(a, b) = a \otimes b$.

(3) 在 (2) 的证明中把运算 $\otimes$ 换成 $\oplus$, $\leqslant$ 换成 $\geqslant$, 下界换成上界, inf 换成 sup, 即可得 $\sup(a, b) = a \oplus b$. 综上所述, 定理成立. 证毕.

定理 1.2.2　设 $(L, \leqslant)$ 是一个偏序格, 定义格上的自然运算 $\otimes$ 和 $\oplus$ 如下: $\inf(a, b) = a \otimes b$ 和 $\sup(a, b) = a \oplus b$, 则 $(L, \oplus, \otimes)$ 是一个代数格.

证明　运算 $\otimes$ 和 $\oplus$ 显然满足交换律和结合律. 因为 $\inf(a, b) \leqslant a \leqslant \sup(a, b)$, 而且有

$$a \otimes (a \oplus b) = \inf(a, \sup(a, b)) = a, \quad a \oplus (a \otimes b) = \sup(a, \inf(a, b)) = a.$$

综上可知, 定理得证. 证毕.

注　根据定理 1.2.1 和定理 1.2.2 可知: 偏序格和代数格是等价的. 今后只统称格而不再区分偏序格和代数格, 并根据需要选取方便的形式.

1.2.2　格的性质

性质 1.2.1[2]　设偏序集 $(L, \leqslant)$ 是一个格, 定义在 L 上的二元运算 $\wedge$ 和 $\vee$:$a \wedge b = \inf(a, b)$ 和 $a \vee b = \sup(a, b)$, 则对于任意的 $a, b \in L$, 格具有下列的基本性质:

(1) 幂等性: $a \wedge a = a$ 且 $a \vee a = a$;

(2) 交换性: $a \wedge b = b \wedge a$ 且 $a \vee b = b \vee a$;

(3) 结合性: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ 且 $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

(4) 吸收律: $a \wedge (a \vee b) = a$ 且 $a \vee (a \wedge b) = a$.

定理 1.2.3　设 $(L, \leqslant)$ 是一个格, 且满足 $a \wedge b = \inf(a, b)$ 和 $a \vee b = \sup(a, b)$, 则有

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

证明　(1) 若 $a \leqslant b$, 则 $a \leqslant a \wedge b$; 另一方面, 因为 $a \wedge b = \inf(a, b)$, 故 $a \wedge b \leqslant a$, 因此有 $a \wedge b = a$.

(2) 若 $a = a \wedge b$, 则 $a \vee b = (a \wedge b) \vee b$, 即 $a \vee b = b$.

(3) 设 $b = a \vee b$, 那么由 $a \vee b = \sup(a, b)$, 故 $a \leqslant a \vee b$, 即 $a \leqslant b$.

综上可知, 定理得证. 证毕.

定理 1.2.4 设 $(L,\leqslant)$ 是一个格, 且满足 $a\wedge b=\inf(a,b)$ 和 $a\vee b=\sup(a,b)$, 则对于任意的 $a,b,c\in L$, 有

(1) 保序性: 若 $b\leqslant c$, 则 $a\wedge b\leqslant a\wedge c$, 且 $a\vee b\leqslant a\vee c$;

(2) 分配不等式: $a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, $a\vee(b\wedge c)\geqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

(3) 模不等式性: $a\leqslant c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$.

证明 (1) 若 $b\leqslant c$, 因为 $a\wedge b\leqslant b$, 所以 $a\wedge b\leqslant c$, 从而 $a\wedge b\leqslant a\wedge c$. 同理可证 $a\vee b\leqslant a\vee c$.

(2) 因为 $a\leqslant a\vee b$, $a\leqslant a\vee c$, 故 $a\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$; 又因为 $b\wedge c\leqslant b\leqslant a\vee b$ 和 $b\wedge c\leqslant c\leqslant a\vee c$, 从而有 $b\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$. 结合两方面可得

$$a\vee(b\wedge c)\geqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

(3) 设 $a\leqslant c$, 则 $a\vee c=c$, 代入 (2) 式可得 $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$.

反之, 设 $a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$, 由于 $a\leqslant a\vee(b\wedge c)$, $(a\vee b)\wedge c\leqslant c$, 因此可得 $a\leqslant c$. 证毕.

1.2.3 几类特殊的格

1. 分配格与模格

定义 1.2.3 设 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是格, 若对于任意的 $a,b,c\in L$, 满足下列条件:

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\quad 和\quad a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),$$

即运算满足分配律, 则称 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是分配格 (distributive lattice).

定义 1.2.4 设 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是格, 若对于任意的 $a,b,c\in L$, 当 $a\leqslant b$ 时必有

$$a\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee c),$$

则称 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是模格 (modular lattice).

定理 1.2.5 分配格一定是模格.

证明 设 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是分配格, 对于任意的 $a,b,c\in L$, 如果 $a\vee b=b$, 由分配律得

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)=b\wedge(a\vee c).$$

故 $(L,\leqslant,\wedge,\vee)$ 是一个模格. 证毕.

定理 1.2.6 在分配格中, 若元素 a 有补元, 则补元必唯一.

证明 反证法 设 b 和 c 都是 a 的补元, 则

$$b=b\wedge 1=b\wedge(a\vee c)=(b\wedge a)\vee(b\wedge c)=0\vee(b\wedge c)$$

$$= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c.$$

综上可知定理成立. 证毕.

定理 1.2.7 设 $(L, \wedge, \vee)$ 是一个具有两个代数运算的代数系统, 如果对于任意的 $a, b, c \in L$, 满足

(1) $a \wedge a = a$;

(2) 在 L 中存在一个元素 1, 使得 $a \vee 1 = 1 \vee a = 1$, $a \wedge 1 = 1 \wedge a = 1$;

(3) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a)$,

则 $(L, \wedge, \vee)$ 是一个具有单位元 1 的分配格.

证明留作练习, 读者自证.

2. 有界格、补格和布尔格

定义 1.2.5 设 $(L, \leqslant)$ 是一个格, 如果存在一个元素 $a \in L$, 对于任意的 $x \in L$, 均有 $x \leqslant a$, 则称 a 是格 L 的一个上界 (或全上界). 如果存在一个元素 $b \in L$, 对于任意的 $x \in L$, 均有 $b \leqslant x$, 则称 a 是格 L 的一个下界 (或全下界).

注 这里格 $(L, \leqslant)$ 的上界 (下界) 的概念即为偏序集合中的最大元 (最小元), 由最大元和最小元的唯一性, 可有下列定理.

定理 1.2.8 若格 $(L, \leqslant)$ 有下界, 则下界一定是唯一的; 若格 $(L, \leqslant)$ 有上界, 则上界一定是唯一的.

定义 1.2.6 若格 $(L, \leqslant)$ 是有界的, 则称 L 是有界格 (bounded lattice). 下界记为 0, 上界记为 1.

定义 1.2.7 若格 $(L, \leqslant, \wedge, \vee)$ 是有界格, 对于 L 中的元素 a, 若存在元素 b, 使得 $a \wedge b = 0$ 和 $a \vee b = 1$, 则称 b 是 a 的补元, 记作 $b = a^*$; 在有界格中, 若每个元素都有补元, 则称此格为有补格 (complemented lattice).

一个格既是分配格又是有补格, 则此格称为有补分配格 (complemented distributive lattice).

定义 1.2.8 若 $(L, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有补分配格, 则称其为布尔格 (Boolean lattice).

定理 1.2.9 设 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界分配格, 若 $a \in L$, 且 a 存在补元 b, 则 b 是 a 的唯一补元.

证明 设 $c \in L$ 也是 a 的补元, 则有 $a \vee c = 1$, $a \wedge c = 0$. 又因 b 是 a 的补元, 故 $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. 于是 $a \vee c = a \vee b$, $a \wedge c = a \wedge b$. 由于 L 是分配格, 故可得 $b = c$. 证毕.

显然, 在有界格中, 0 是 1 的唯一补元, 1 是 0 的唯一补元.

定理 1.2.10 设偏序集 $(L, \leqslant)$ 是一个有界分配格, 如果对于任意的 $a, b \in L$,

元素 a 有补, 记为 a^*, 元素 b 有补, 记为 b^*, 则 $a\wedge b$ 和 $a\vee b$ 分别有补, 并记为 $a^*\vee b^*$ 和 $a^*\wedge b^*$.

证明 设偏序集 $(L,\leqslant)$ 是一个有界分配格, 且对于任意的 $a,b\in L$, 有

$$\begin{aligned}(a\wedge b)\vee(a^*\vee b^*)&=(a\vee(a^*\vee b^*))\wedge(b\vee(a^*\vee b^*))\\&=((a\vee a^*)\vee b^*)\wedge((b\vee b^*)\vee a^*)\\&=(1\vee b^*)\wedge(1\vee a^*)\\&=1\wedge 1=1.\end{aligned}$$

推论 1.2.1 对于任意的 $a,b\in L$, 一个有补的分配格满足德・摩根公式的下列等式:

$$(a\wedge b)^*=a^*\vee b^* \quad 且 \quad (a\vee b)^*=a^*\wedge b^*.$$

1.3 布尔代数

1.3.1 基本概念

布尔代数是人们利用数学方法研究人类思维规律所得到的一个重要成果, 它与数理逻辑有着极其密切的联系. 1904 年, Huntington 就已经给出了布尔代数的良好性质, 一个布尔代数 $(B,\vee,\wedge,*)$ 由一个非空集 B, B 上的两个二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$, 以及 B 上的一个一元运算 $*$ 和两个零元运算 0 和 1 组成, 满足下列独立的定义.

定义 1.3.1[2] 若集合 B 至少包含两个元素 (分别记为 0 和 1), 且对 B 中的任意元素 a,b 和 c, 代数系统 $(B,\vee,\wedge,*,0,1)$ 上的三种运算 (其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 都是二元运算, $*$ 是一元运算) 具有下列性质:

(B1) 交换律: $a\vee b=b\vee a, a\wedge b=b\wedge a$;

(B2) 分配律: $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$, $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

(B3) 同一律: $a\vee 0=a$, $a\wedge 1=a$;

(B4) 补余律: $a\vee a^*=1$, $a\wedge a^*=0$,

则称 $(B,\vee,\wedge,*,0,1)$ 为布尔代数 (Boolean algebra), 其中 0 和 1 分别称为 B 的最小元和最大元.

布尔代数 $(B,\vee,\wedge,*,0,1)$ 有时也记为 $(B,\vee,\wedge,*)$. 或当 B 为有限集时, 称布尔代数 B 为有限布尔代数. 在分配格中, 若元素存在补元, 则补元是唯一的, 因此在布尔代数中每个元都有唯一的补元.

容易验证, 一个布尔代数 $(B,\vee,\wedge,*)$ 满足下列性质.

性质 1.3.1[2] 设 $(B,\vee,\wedge,*,0,1)$ 为布尔代数, 对于 B 中的任意元素 a,b 和 c, 则 B 上的三种运算具有下列性质:

(1) 结合律: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$;

(2) 幂等律: $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$;

(3) 吸收律: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$;

(4) 复原律: $(a^*)^* = a$;

(5) $0^* = 1$, $1^* = 0$;

(6) 德 • 摩根对偶律: $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$, $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$;

(7) 补运算是逆序的, 即 $a \leqslant b \Leftrightarrow b^* \leqslant a^*$, 其中此处的序关系相应地可以定义为 $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$;

(8) $a \leqslant b \Leftrightarrow a^* \vee b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^* = 0$;

(9) $a \leqslant b$ 且 $c \leqslant d \Leftrightarrow a \wedge c \leqslant b \wedge d$ 且 $a \vee c \leqslant b \vee d$.

将代数系统间的同态与同构的概念应用于布尔代数就有布尔同态与布尔同构的概念.

定义 1.3.2　若 $(A, \otimes, \oplus, *, 0, 1)$ 和 $(B, \wedge, \vee, ', \alpha, \beta)$ 是两个布尔代数, 且从 A 到 B 存在函数 f, 如果在 f 的作用下能够保持所有的运算, 且常数相对应, 以及对于任意的 $a, b \in A$, 有

$$f(a \oplus b) = f(a) \wedge f(b), \quad f(a \oplus b) = f(a) \vee f(b), \quad f(a^*) = (f(a))',$$

$$f(0) = \alpha, \quad f(1) = \beta,$$

则称 f 是一个布尔同态. 当布尔同态是双射时, 称之为布尔同构.

定理 1.3.1　对于每个正整数 n, 必存在含有 2^n 个元素的布尔代数; 反之, 任一有限元素的布尔代数, 它的元素个数必为 2 的幂次.

定理 1.3.2　任何一个具有 2^n 个元素的有限布尔代数都是同构的.

1.3.2　几类特殊的布尔代数

例 1.3.1　设 $B = \{0, 1\}$, B 上的运算 $\wedge, \vee$ 分别是 0,1 之间的布尔乘和布尔加, 并且规定 $0^* = 1$, $1^* = 0$, 不难验证 $(B, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ 是布尔代数, 习惯上称为开关 (电路) 代数. 其运算表如表 1.3.1 所示.

例 1.3.2　对于任意非空集合 A, 设 $P(A)$ 为 A 的幂集, $\wedge, \vee, *$ 分别表示集合的交、并和补运算. 因为 $(P(A), \bigcap, \bigcup, *, \varnothing, A)$ 是有补分配格, 所以 $(P(A), \bigcap, \bigcup, *, \varnothing, A)$ 是布尔代数, 称为集合代数. 特别地, 当 $A = \{a\}$ 时, $P(A) = \{\varnothing, A\}$, 运算表如表 1.3.2 所示.

构造 $\{\varnothing, A\} \to \{0, 1\}$ 的双射函数: $f(\varnothing) = 0, f(A) = 1$, 则三种运算是保持的, 所以集合代数 $(\{\varnothing, A\}, \bigcap, \bigcup, *, \varnothing, A)$ 与开关代数 $(\{0, 1\}, \bigcap, \bigcup, *, 0, 1)$ 同构.

表 1.3.1 开关代数运算表

x	y	$\wedge$	$\vee$	$*$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

表 1.3.2 集合代数运算表

X	Y	$X\cap Y$	$X\cup Y$	$*$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	A
$\varnothing$	A	$\varnothing$	A	A
A	$\varnothing$	$\varnothing$	A	$\varnothing$
A	A	A	A	$\varnothing$

例 1.3.3 二值逻辑代数.

设 A 为命题集合, 一个命题是指一个陈述句, 它不是真 (T) 就是假 (F). 二值逻辑可作为命题集合的一个分类，它是从 A 到集合 $\{T,F\}$ 的一个映射. 这一映射由每一个 A 中的命题 P 自身的真值来规定. 元命题可以用逻辑联结 ($\neg$: 否定; $\vee$: 逻辑和; $\wedge$: 逻辑积) 形成组合命题, 这种组合命题的真值由下列的所谓真值来定义, 如表 1.3.3—表 1.3.5 所示.

表 1.3.3 $\neg$ 运算

P	$\neg P$
T	F
F	T

表 1.3.4 $\vee$ 运算

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.3.5 $\wedge$ 运算

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F