未来路英才教育丛书

HIGH SCHOOL MATHEMATICS

熊晓东 高中数学专题讲座20讲

熊晓东 编著

熊晓东是全国著名的中学数学教育专家。30多年的教育教学经历使他在国内中学数学教育界始终走在前列，并以不容置疑的学术水平赢得国内外广泛认同。熊晓东除了个人辉煌的教学成果和学术成就以外，他创办的上海未来路进修学院以研发与国内外一流大学招生相接轨的英才教育课程和教材，拥有雄厚的师资队伍和绝对出众的教学质量而著称沪上，获得学生、家长和社会的肯定和推崇。

中西書局

未来路英才教育丛书

HIGH SCHOOL MATHEMATICS

熊晓东高中数学专题讲座20讲

熊晓东 编著

中西書局

图书在版编目（CIP）数据

熊晓东高中数学专题讲座20讲 / 熊晓东编著.
—上海:中西书局,2016.6
ISBN978-7-5475-1108-4

Ⅰ.①熊… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第126602号

熊晓东高中数学专题讲座20讲

熊晓东　编著

责任编辑　伍珺涵
装帧设计　黄　骏
出　　版　上海世纪出版集团
　　　　　中西書局（www.zxpress.com.cn）
地　　址　上海市打浦路443号荣科大厦17F（200023）
发　　行　上海世纪出版股份有限公司发行中心
经　　销　各地新华书店
印　　刷　上海展强印刷有限公司
开　　本　787×1092毫米　1/16
印　　张　12.5
版　　次　2016年6月第1版　2016年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5475-1108-4 / G・344
定　　价　35.00元

恰似同学少年时

美国加州大学数学、计算机学博士　陈徽徽
美国卡耐基·梅隆大学数学、计算机学博士　周孟宁

我们是上海市南洋模范中学2000届的学生，高中毕业之后以理工科为各自的专业在自己所向往的大学获得了学士硕士学位，现在在海外攻读博士学位. 直到今天看来，我们依然要说高中三年在熊老师指导下的数学学习给我们打下了极为扎实的理性思维基础，而我们与老师的师生之谊也从高中时代一直延续到今日. 在我们的心目中，老师不仅仅是一位极其出色的数学园丁，也是一位富有激情和理想的学者，更是充满睿智而又和蔼的导师.

我们记忆犹新的是老师极具个人特色的数学课. 老师非常重视基本定理的讲解，他反复强调的就是定理乃是解答一切数学问题的根基，无论你面对的是当天讲完课要做的回家作业还是最终高考时那最后一道大题. 听老师的课，让你觉得定理中的每个字都有其意义，不会多也不会少，尽管不可否认，一开始时，你会觉得那些枯燥的文字并不那么吸引人，但是，你总会被老师讲述这些定理时的激情所感染.

记得在讲到复数运算中的棣美弗定理时，老师在课堂上对我们说：这个定理很重要，名字也要很顺溜的说出来. 说完就像老夫子一样，竟用上海话连说了三遍“棣美弗定理”，让人忍俊不禁. 老师也不仅仅注重于知识的掌握，更从形式美学的角度让我们来体会数学的理性美，例如使用“⇒”、“}”符号漂亮地连接证明过程，而不是用传统的“因为”、“所以”符号，以此来要求我们不但要解出题目，更要漂亮地得到结果. 老师同时又非常的高屋建瓴，不只局限于用一些初等数学的解题方法来解决一些高中数学问题，而是灌输我们以大学数学学习的眼光和角度，例如通过行列式的方式解一元二次方程组，等等，每每让人解题时有酣畅淋漓的感觉. 老师的数学课更是充满乐趣的，就像上面提到的，每个上过老师数学课的同学应该都对老师的谈笑风生印象深刻，一段段的小幽默贯穿于讲课之中，激发了我们对于数学课的兴趣和热情. 老师的数学课又不完全是数学的内容，常常将课堂之外的信息加添于教学之中，时事、经济、文化，不一而足，巨大的信息量让我们获益匪浅.

老师对于学术事业的热忱感染着我们每一个学生.作为一个中学数学教师,老师的眼光不只局限于第一线的课堂教学,同时也着眼于数学教育以及优秀生培养的研究.一篇篇发表于国际教育学领域沉甸甸的学术论文,一场场关于老师教育学思想的研讨会,让我们看到了一个醉心于教育学研究学者的丰硕成果.也更让我们体会到富有激情的老师对于事业的追求和不懈的努力,因为只有发自内心的激情,才能支撑老师在完成繁重的教学任务、承担家庭责任的同时还挤出时间来追求自己的理念.

老师于我们而言,能让我们念念不忘的除了对我们知识上的教授之外,更是在我们人生观形成关键时期中作为我们亲切而睿智的长辈,在我们刚要扬起人生风帆的时候,为我们沉稳地掌舵,指明航向.老师的鼓励、提醒和关切至今仍是历历在目.

正是老师给我们打下的知识和品格上的基础,使我们在自己人生的道路上,如沧海之中的帆船,乘风破浪,勇往直前.今天得知凝聚老师多年教学心得的《高中数学复习讲义 100 讲》再版,我们感到由衷的高兴,企盼更多的学弟学妹可以有机会于此书中领略到老师数学教学的魅力,为今后的学习打下扎实的基础.

“未来路”圆我未来梦

香港大学06级数学系　孟晓春

一、我怎么来到“未来路”

当然不能说是唯一的出路，但对于大多数同学来说，高考毕竟是人生的一个重大机会.当高考的日子渐渐临近的时候，一种追求更加完美表现的心理也逐渐显现.同学们会采取各种适合自己的方式来减压，以增加最后高考的把握性.而针对自己的某些课程进行系统地复习和模拟训练是快速加强的一个重要方法.

因此，选择具有针对性的补习课程就成为一个不错的选择.正在这时，经同学介绍，我来到了“未来路”学校补习数学.因为“未来路”是新办的学校，以前从没听说过.虽然担心会收获不大，但想新办的学校总不至于拿自己的声誉开玩笑，一定会尽力为学生的成功而努力的.

二、“未来路”经历

怀着忐忑不安的心情，我来到了“未来路”.上了第一节数学课后，我就出乎意料地发现，课上得出奇得好.

首先是练习.当拿到练习题时，我发现上面题目类型各异，几乎涵盖了那一章节的所有类型.好比一个功能强大的梳理机，随着一题一题地推进，我脑中原本乱作一团的知识逐渐开始分类，变得清晰起来.一份习题做完，基本已经对这一章节的大体轮廓、解题思路有了深刻的理解.

然后是老师有针对性的试卷分析.通过试卷分析以及对《100讲》对应章节的讲解，一节课下来，基本就可将对应章节的内容归纳、整理得井井有条.

学习中的小组讨论让学生加深印象，每当小组讨论的时候，老师会让某个同学给大家讲解自己解答的过程.老师不会因为哪个同学的解答方法不合理或不正确而马上否定、马上给出正确答案，相反会鼓励说：“在考试的时候可以坚持自己的思路并最后解答出问题，能解到最后都合理，这样的学习精神是好的、是非常可贵的，创新往往就是这样而产生的.”

大约一年时间的学习，通过“未来路”学校高强度的高效训练，我走进高考考场

时镇定自若，考试过程中基本没有碰到任何障碍，提前 50 分钟便完成了试卷，并取得了 149 分(满分 150)的好成绩.

三、“未来路”印象

回顾我在“未来路”学校的经历，特别是数学学习，有如下印象.

第一，“未来路”学校的系统教学法令学生受益匪浅. 老师针对每一章节所设计的习题涵盖了所有应该熟悉的内容，并有机组成一份份试卷. 这样一来，通过学生解答一份试卷、老师讲解一个章节(包含试卷中的问题分析等)的方式，使得学生系统地掌握该章节的主要内容，而不会漏掉重要的知识点.

其次，“未来路”学校的实战模拟使学生游刃有余. 考试既是对学生知识能力的检验，又是对学生解题速度的测试；同时在某种程度上说，还是对学生心理素质的考验(比如考试中遇到困难时). 因此，接近考试氛围的真题演练对提高学生的应考能力是非常重要的. 比如，当《100 讲》这本书讲完时我已经将高中数学基础内容了然于胸，做题目的心态也从急急忙忙，变得不慌不忙、镇定自若了.

第三，老师的讲解幽默风趣，使我在笑声中把知识点巩固得非常扎实. 记得在讲解向量的时候，对于不同起点的相同向量是否都指向同一个向量，我总是搞不清楚. 于是，熊老师幽默地说：“大家看，原点的这条向量是家里的熊老师，而换了一个起点的向量就好比学校的熊老师，再换一个起点那就是路上的熊老师，他们其实都是熊老师嘛！所以虽然起点不同，但本质上是同一个向量！”多么生动精彩的比喻啊，虽然我已经毕业了两年，但这个比喻仍然深深地刻在我脑海中.

我是上海市复旦大学附属中学 2006 年的毕业生，当年高考时，由于“未来路”的教育、由于熊老师热心细致的指导，打下了极为扎实的数学思维基础，也使我对数学产生了浓厚的兴趣，高考时毅然选择了数学专业.

四、“未来路”助我走好未来路

现在的我已经在香港大学就读数学系，虽然大学的学习与高中的学习不尽相同，但是在大学学习中，“未来路”的经历仍然给了我很大帮助. 相比高中，大学的知识面更广，难度也更大，于是对知识的整理归纳、建立前后联系的能力便显得尤为重要. 幸而在“未来路”的耳濡目染使我学会了如何对知识进行分类、归纳、总结，从而应用在大学的学习中.

未来的路会怎样，全靠我们自己去走. 然而，一路走来，也离不开身边老师、家长和朋友们的帮助. 而这之中，“未来路”无疑是我不能忘记的一段回忆.

充满阳光的天骄之路

北京大学教育经济与管理博士　王昕雄
北京大学教育信息与技术硕士　邢　磊

我们是熊晓东先生九七届的学生.先生的《高中数学复习讲义100讲》高考复习丛书是宝贵的教育资源,出版发行后受到广大师生和家长的热烈欢迎.2003年时我们曾为先生这套丛书的出版担任校对工作,今年又受先生邀请为丛书的再版做修订工作,我们感到万分荣幸.

我们上海南洋模范中学九七届高三(4)班是相当辉煌的一届.全班四十三位同学有4位同学以优异成绩考入上海交通大学本—硕—博联读班,5位同学考入上海交通大学试点班,3位同学以优异成绩考入由国家教委举办的上海复旦大学理科基地班,2位同学考入上海同济大学试点班,3位同学考入华东师范大学的文理科基地班,4位同学作为优秀生保送进华东师范大学教育系本—硕—博联读班;共21位同学提前进入大学联读班、基地班、试点班,占全班人数的49%.在那么多的优秀生分别进入大学以后,其余22位同学在高考中依旧取得了数学平均134分的惊人成绩,全部考入复旦、交大等一流大学.我们班还有一个由12位同学组队的数学竞赛小组,在国际、国家各级数学竞赛中获得23人次的一等、二等、三等奖的辉煌战绩……

先生在高一、高二基础知识教授时,尊重课本,尊重教学大纲,把书本上概念、例题讲明、讲透、讲活.书本上全部习题,以各种形式,做到每题必讲、必做,把我们基础知识、基本技能打得扎扎实实.

先生在高三复习时,不再用教材,而是完全使用他自己编写的复习讲义.讲义的内容编排有章有节,统括全部高中内容,每个知识点都不遗漏,但有轻重之分.例题的选配上紧扣所要体现数学知识,技能技巧上更是五彩缤纷.

先生讲题时,喜欢使用推出号“⇒”.即使是非常繁杂的习题,都被先生的推出号表达得清澈、透明,一目了然,逻辑性之强,技巧性之妙,经常令全班同学拍桌叫

绝，掌声四起.

先生的教学非常注意数学的应用，密切联系当前我国和世界的政治、经济、科技等各个方面的变化.什么是小康社会？如何买房购车？什么是信息社会？如何上网计费？什么是企业生产？如何计算成本利润？……学习了先生的高中数学，几乎成了当家理财、企业管理、科学研究等各个行业的多面手.

先生讲题不喜欢在解题技巧上故弄玄虚，而是强调水到渠成.学生学习数学不但不紧张、不恐惧，反而兴致勃勃，情趣浓浓，割舍不开.

先生的高中数学复习检测共三十套，不仅注意全套检测的系统性、功能性、新颖性，而且编写得一浪接一浪，高潮迭起，险象环生.所有的试题，或者是在向你提供某个重要的数学结论，或者是在向你述说一个数学思想，或者是在引导你通过习题的延伸、转化和扩展，走进一个丰富多彩的数学世界.我们从未有过面对数学题束手无策、望而生畏的感觉；我们总是完成了上一套试题，自然而然地期待着下一套试题；总是带着兴趣，带着期望，欲罢不能地追求一个又一个成功.经常为了迎接先生的测试，我们穷尽着手头的全部有关数学习题，挑灯夜战，直至第二天凌晨.

先生的高中数学教学，是充满阳光的教学.虽然已经毕业离校十年了，但是先生的高中数学教学至今历历在目，不能忘怀.每每在大学数学学习和平时接触和应用到数学时，总是要回想起先生课堂上严密的逻辑思维，生动活泼的解题方法，以及他的独特的谈笑风生.先生的高中数学真让我们受用一生，先生为我们铺设了一条充满阳光的天骄之路.

目 录

第一讲

函数、方程、不等式以及它们的图像

函数是中学数学的一个重要概念. 函数的思想，就是用运动变化的观点，分析和研究具体问题中的数量关系，建立函数关系，运用函数的知识，使问题得到解决.

和函数有必然联系的是方程. 方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标，函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$，通过方程进行研究.

不等式是函数与方程关系的一个更为广泛的补充. 函数 $y=f(x)$ 图像在 x 轴上方是 $f(x)>0$，在 x 轴下方则是 $f(x)<0$. 不等式的作用还可以使动态的 $y=f(x)$ 的图像上、下、左、右地移动.

函数思想在解题中的应用主要体现在两个方面：一是借助有关初等函数的性质，解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的.

方程、不等式思想在解题中的应用主要表现在：从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(方程、不等式，或方程与不等式的混合组)，然后通过解方程(组)或不等式(组)来使问题获解. 有时，还实现函数与方程的互相转化、接轨，达到解决问题的目的.

图像将使上述的思想具体化、形象化. 它从几何的角度描述问题的本质、变化的规律，使数学问题更具有生命力.

许多数学问题，不能简单地归结于函数、方程或是不等式，而是它们的综合. 通过解决这些数学问题，不仅是对我们数学知识掌握的考查，是对我们逻辑思维能力、形象思维能力、综合解题能力、探索创新能力的考查，更重要的是让我们体会到数学知识之间是如何相互联系、相互渗透的，又是联系渗透得那么惊人的深刻，那么意想不到的精彩.

典型例题

[例题 1]

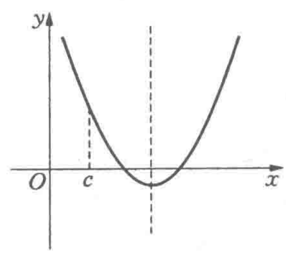
已知实数 $a>b>c$，$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=1$，求 $a+b$ 与 a^2+b^2 的范围.

解： $a+b+c=1\Rightarrow a+b=1-c$

$$\left.\begin{aligned}a^2+b^2+c^2=1&\Rightarrow(a+b)^2-2ab+c^2-1=0\\&\Rightarrow(1-c)^2-2ab+c^2-1=0\\&\Rightarrow ab=c^2-c\text{，且 }a+b=1-c\end{aligned}\right\}$$

构造一个一元二次方程 $x^2-(1-c)x+c^2-c=0$，a，b 是该方程的两个不相等的根，且两根都大于 c

令 $f(x)=x^2-(1-c)x+c^2-c$，(二次函数根的分布)则图像与 x 轴有两个交点且都在$(c,+\infty)$内的充分必要条件：



$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta=(c-1)^2-4(c^2-c)>0\\\dfrac{1-c}{2}>c\\f(c)=3c^2-2c>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{3}<c<0$$

$$\Rightarrow 1<1-c<\frac{4}{3}，\frac{8}{9}<1-c^2<1$$

$$\Rightarrow a+b\in\left(1,\frac{4}{3}\right)，a^2+b^2\in\left(\frac{8}{9},1\right)$$

[例题 2]

已知 $x^2+xy+y^2=1$，求函数 $u=x^2+y^2$ 的最大值和最小值.

解： 建立方程组

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=1\\u=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow(u-1)x^2+uxy+(u-1)y^2=0\text{（两式相乘并相减）}$$

由题意 x，y 不能同时为零，不妨设 $y\neq0$

$\Rightarrow(u-1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+u\cdot\dfrac{x}{y}+(u-1)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=0$，即为关于 $\dfrac{x}{y}\in\mathbf{R}$ 的一元二次方程有实根

$$\Rightarrow\Delta=u^2-4(u-1)(u-1)\geqslant0\Rightarrow\frac{2}{3}\leqslant u\leqslant2$$

$$\therefore u_{\max}=2，u_{\min}=\frac{2}{3}$$

[例题 3]

设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图像关于 $x=1$ 对称，对任意的 x_1，$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$及 $f\left(\frac{1}{4}\right)$；

(2) 证明 $f(x)$ 是周期函数；

(3) 已知 $a_n=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n)$.

解:(1) 对任意的 x_1，$x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

$\Rightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=a\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{a}$

类似地，$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2=\sqrt{a}\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{a}$

(2) 证明:已知 $f(x)$图像关于 $x=1$ 对称($\forall x\in\mathbf{R}$，都有$\frac{2-x+x}{2}=1$)

$\Rightarrow\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(2-x)=f(x)$，

$$\left.\begin{array}{l}\text{又 } f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的偶函数}\Rightarrow f(x)=f(-x)\\ \Rightarrow f[2-(-x)]=f(-x)\Rightarrow f(2+x)=f(-x)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f(2+x)=f(x)$，即 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数

(3) 由(2)知 $2n$ 也是 $f(x)$的周期$\Rightarrow f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^{2n}$(把 1 分为 $2n$ 个$\frac{1}{2n}$ 的和)

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}\Rightarrow\ln(a_n)=\ln f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=\ln f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}\cdot\ln a$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln a=0$

[例题 4]

已知集合 M 是满足下列性质的 $f(x)$的全体:存在非零常数 T，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M?说明理由；

(2) 设函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的图像与 $y=x$ 的图像有公共点，证明：$f(x)=a^x\in M$；

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$，求实数 k 的取值范围.

解:(1) 对于非零常数 T，$f(x)=x\Rightarrow f(x+T)=x+T$，$Tf(x)=Tx$

由于对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x+T=Tx$ 不能恒成立，所以 $f(x)=x$ 不属于集合 M.

(2) 证明：由题意可知方程组$\begin{cases} y = a^x \\ y = x \end{cases}$有解$\Rightarrow a^x = x$

显然 $x = 0$ 不是方程 $a^x = x$ 的解，所以存在非零常数 T，使得 $a^T = T$

对于 $f(x) = a^x$，有 $f(x+T) = a^{x+T} = a^T \cdot a^x = T \cdot a^x = Tf(x) \Rightarrow f(x) = a^x \in M$

(3) 当 $k = 0$ 时，$f(x) = 0$，显然 $f(x) = 0 \in M$

当 $k \neq 0$ 时，已知 $f(x) = \sin kx \in M \Rightarrow$ 存在非零常数 T，对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x+T) = Tf(x)$ 成立，

即 $\sin k(x+T) = \sin(kx+kT) = T\sin kx$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立

由于 x 的任意性，则只有当 $T = \pm 1$ 的时候可能恒成立

① 当 $T = 1$ 时，$\sin k(x+1) = \sin(kx+k) = \sin kx$ 恒成立$\Rightarrow k = 2m\pi$，$m \in \mathbf{Z}$

② 当 $T = -1$ 时，$\sin k(x-1) = \sin(kx-k) = -\sin kx$ 恒成立

$\Rightarrow \sin(kx - k + \pi) = \sin kx \Rightarrow \pi - k = 2m\pi \Rightarrow k = -(2m-1)\pi$，$m \in \mathbf{Z}$

由①②可知，实数 k 的取值范围是 $\{k \mid k = m\pi, m \in \mathbf{Z}\}$

[例题 5]

函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有定义，$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ 且满足 $x, y \in (-1, 1)$ 时，有 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是奇函数

(2) 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+{x_n}^2}$，试求：$f(x_n)$；

(3) 求证：$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \cdots + \frac{1}{f(x_n)} > -\frac{2n+5}{n+2}$.

解：(1) 证明：令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) = f\left(\frac{0+0}{1+0}\right) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

令 $y = -x \Rightarrow f(x) + f(-x) = f\left(\frac{x-x}{1-x \cdot x}\right) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是奇函数

(2) $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f(x_{n+1}) = f\left(\frac{2x_n}{1+{x_n}^2}\right) = f\left(\frac{x_n + x_n}{1 + x_n \cdot x_n}\right) = f(x_n) + f(x_n) = 2f(x_n) \Rightarrow \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = 2$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ 是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列 $\Rightarrow f(x_n) = (-1) \cdot 2^{n-1}$

(3) 证明：由(2)$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r}-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=-\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}>-2\\ -\dfrac{2n+5}{n+2}=-2-\dfrac{1}{n+2}<-2\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(x_n)}>-\dfrac{2n+5}{n+2}$，证毕.

[例题 6]

已知 $c>0$，设 P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

解：P：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$

Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1

$y=x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c & x\geqslant 2c\\ 2c & x<2c\end{cases}$，又当 $x\geqslant 2c\Rightarrow 2x-2c\geqslant 2c$

$\Rightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值是 $2c$

令 $2c>1\Rightarrow c>\dfrac{1}{2}$，即 $Q\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$

若 P 正确且 Q 不正确 $\Rightarrow P\cap\overline{Q}=\left\{c\,\middle|\,0<c\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$；若 P 不正确且 Q 正确

$\Rightarrow\overline{P}\cap Q=\{c\,|\,c\geqslant 1\}$

$\therefore$ c 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

[例题 7]

已知函数 $f(x)=\log_m\dfrac{x-3}{x+3}$.

(1) 若 $f(x)$的定义域为$[\alpha,\beta](0<\alpha<\beta)$，判断 $f(x)$ 在定义域上的增减性，并用定义证明；

(2) 当 $0<m<1$ 时，使 $f(x)$ 的值域为$[\log_m m(\beta-1),\log_m m(\alpha-1)]$的定义区间$[\alpha,\beta](0<\alpha<\beta)$是否存在？请说明理由.

解：(1) $\dfrac{x-3}{x+3}>0\Rightarrow x<-3$ 或 $x>3$，又 $f(x)$ 的定义域为$[\alpha,\beta](0<\alpha<\beta)$，则 $\alpha>3$

$\forall\alpha<x_1<x_2<\beta$

$\dfrac{x_1-3}{x_1+3}-\dfrac{x_2-3}{x_2+3}=\dfrac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}<0$

$\therefore$ 当 $0 < m < 1$ 时，$f(x_1) - f(x_2) > 0$，函数在$[\alpha, \beta]$上是减函数

当 $m > 1$ 时，$f(x_1) - f(x_2) < 0$，函数在$[\alpha, \beta]$上是增函数

(2) 由(1)可知，当 $0 < m < 1$ 时，$f(x)$ 为减函数，

则由其值域为$[\log_m m(\beta-1), \log_m m(\alpha-1)]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\beta) = \log_m \dfrac{\beta-3}{\beta+3} = \log_m m(\beta-1) \\ f(\alpha) = \log_m \dfrac{\alpha-3}{\alpha+3} = \log_m m(\alpha-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\beta-3}{\beta+3} = m(\beta-1) \\ \dfrac{\alpha-3}{\alpha+3} = m(\alpha-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\beta^2 + (2m-1)\beta - 3(m-1) = 0 \\ m\alpha^2 + (2m-1)\alpha - 3(m-1) = 0 \end{cases}$$

则 α, β 为方程 $mx^2 + (2m-1)x - 3(m-1) = 0$ 的两个根

$\beta > \alpha > 3 \Rightarrow$ 方程有两个大于 3 的不等实根，

令 $g(x) = mx^2 + (2m-1)x - 3(m-1)$

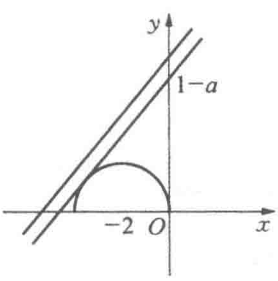
$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2m-1}{2m} > 3 \\ g(3) > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore$ 当 $0 < m < \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，存在这样的区间$[\alpha, \beta]$；

当 $1 > m \geqslant \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ 时，不存在这样的区间$[\alpha, \beta]$.

[例题 8]

设函数 $f(x) = a + \sqrt{-x^2 - 4x}$ 和 $g(x) = \dfrac{4}{3}x + 1$，已知 $x \in [-4, 0]$ 时，恒有 $f(x) \leqslant g(x)$，求实数 a 的取值范围.



解：$f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow a + \sqrt{-x^2 - 4x} \leqslant \dfrac{4}{3}x + 1$

$\Rightarrow \sqrt{-x^2 - 4x} \leqslant \dfrac{4}{3}x + 1 - a$，对于 $x \in [-4, 0]$ 恒成立

令 $y_1 = \sqrt{-x^2 - 4x}$，$y_2 = \dfrac{4}{3}x + 1 - a$，$x \in [-4, 0]$

$y_1 = \sqrt{-x^2 - 4x} \Rightarrow (x+2)^2 + y_1^2 = 4\ (y_1 \geqslant 0)$ 表示以$(-2, 0)$为圆心，2 为半径的圆的上半部分；

$y_2 = \dfrac{4}{3}x + 1 - a$，$x \in [-4, 0]$ 表示斜率为$\dfrac{4}{3}$，截距为 $1-a$ 的平行直线系(a 为参变量)；

$x \in [-4, 0]$ 时，恒有 $y_1 \leqslant y_2$ 的几何意义为半圆恒在直线下方(如图)

直线与半圆相切时，有 $d = \dfrac{\left|\dfrac{4}{3} \times (-2) + 1 - a\right|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2}} = r = 2 \Rightarrow 1 - a = 6$(截距)

由图可知，当截距 $1-a \geqslant 6$，即 $a \leqslant -5$ 时，恒有 $y_1 \leqslant y_2$，即恒有 $f(x) \leqslant g(x)$.

[例题 9]

已知抛物线 C: $y^2 = 2x$ 和两点 $A(-2, 0)$，$B(0, 4)$，过点 A 作斜率为 k 的直线交曲线 C 于第一象限内的 M、N 两点，设点 P 是弦 MN 的中点，若直线 BP 与 x 轴交于点 Q，且点 Q 在 A 的左侧，求直线 MN 的斜率 k 的取值范围.

解：设直线 MN 的方程为 $y = k(x+2)(k > 0)$

由$\begin{cases} y = k(x+2) \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow k^2x^2 + 2(2k^2 - 1)x + 4k^2 = 0$ ①

$\Delta > 0 \Rightarrow 0 < k < \dfrac{1}{2}$

设 $P(x_1, y_1)$，$M(x_M, y_M)$，$N(x_N, y_N)$，$Q(x_2, 0)$

由 ① 式 $\Rightarrow x_1 = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{1}{k^2} - 2 \Rightarrow y_1 = k(x_1 + 2) = \dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow$ 直线方程为 $\dfrac{y-4}{x-0} = \dfrac{\dfrac{1}{k} - 4}{\left(\dfrac{1}{k^2} - 2\right) - 0}$，令 $y = 0$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{8k^2 - 4}{k(1-4k)}$，已知点 Q 在点 $A(-2, 0)$ 左侧

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8k^2 - 4}{k(1-4k)} < -2 \\ 0 < k < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow 0 < k < \dfrac{1}{4}$，即直线 MN 的斜率 k 的取值范围是 $k \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.

[例题 10]

已知 $y = (t^2 + t + 1)x^2 - 2(a+t)^2x + t^2 + 3at + b$，对于任意的 $t \in \mathbf{R}$，抛物线总过定点 $P(1, 0)$，求抛物线与 x 轴的交点的横坐标的取值范围.

解：已知抛物线总过定点 $P(1, 0)$

$\Rightarrow (t^2 + t + 1) - 2(t^2 + 2at + a^2) + t^2 + 3at + b = 0$

$\Rightarrow (1-a)t + (b + 1 - 2a^2) = 0$，该方程对于任意的 $t \in \mathbf{R}$ 均成立