



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

ALEXANDROV THEOREM—
PLANE CONVEX FIGURE AND CONVEX POLYHEDRON

Alexandrov 定理 ——平面凸图形与凸多面体

杨世明 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

ALEXANDROV THEOREM—
PLANE CONVEX FIGURE AND CONVEX POLYHEDRON

Alexandrov 定理 ——平面凸图形与凸多面体

杨世明 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书深入浅出地介绍了凸图形及凸多面体的理论,注重基本概念和基本方法的阐述,全部论证限制在初等数学范围之内. 阅读本书,不仅可使读者在中学阶段学习的几何知识大为充实和丰富起来,而且对读者以后学习高等数学,如多元函数微积分、微分几何、线性代数、拓扑学等,奠定空间想象能力和逻辑思维能力的坚实基础.

图书在版编目(CIP)数据

Alexandrov 定理:平面凸图形与凸多面体/ 杨世明
编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6983-9

I. ①A… II. ①杨… III. ①几何学-定理
IV. ①018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 239075 号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	张永芹 聂兆慈
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真	0451-86414749
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷	黑龙江艺德印刷有限责任公司
开 本	787mm×960mm 1/16 印张 14.5 字数 162 千字
版 次	2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-6983-9
定 价	58.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎ 编译者的话

几何学是数学的主要分支之一,平面几何和立体几何(包括平面及空间解析几何)是几何学的基本组成部分.凸图形和凸体的理论在现代数学中起着越来越重要的作用.

若干年来,国内外中学数学教育教学改革的经验教训,使越来越多的人认识到几何学的重大教育价值和实用价值,认识到几何学在初等数学教育中的不可或缺的地位.我国现行的中学数学教材中,平面图形中介绍了三角形、平行四边形、梯形、圆、椭圆和正多边形的一些知识;立体几何中介绍了柱、锥、台、球的概念和简单性质.至于凸图形、凸多边形、凸多面体、凸体及其表面的一般理论几乎没有涉及,

这就使学生升入高等学校以后,在学习多元函数微积分、微分几何、线性代数、拓扑学等基础数学和运筹学、计算方法等应用数学课程时,缺乏几何直观的能力和背景知识,对有关内容的理解也存在着障碍.因此,需要一些关于凸图形和凸体方面的课外读物,以填补这个空缺.

苏联著名几何学家柳斯杰尔尼克(Л. Люстерник)在著名数学家亚历山大洛夫的支持下编写的《凸图形与凸多面体》一书,正好适合了这方面的需要.浏览一下目录就会发现,该书是多么丰富有趣.它不仅深入浅出地介绍了凸图形及凸多面体理论的各个方面,而且十分注意这个领域的基本概念和基本方法的阐述,并把全部论证限制在初等数学的范围之内,以便使高中二、三年级的学生及大学低年级的学生可以领会全部内容.

但该书是为苏联青年数学爱好者编写的.为了尽可能同我国现行数学教学大纲和教材衔接,同我国学生的实际知识和能力相适应,我们采取了“编译”的方式,既保持原文生动、深入浅出的风格,又尽量使用我国教材的习惯用语和符号,以减少阅读时的困难.同时,对原书做了适当增删,在每章后面还配备了一定数量的习题,供读者练习之用.

最后还应指出,为了使读者了解费马问题研究的历史和现状,我们补写了“维维安尼定理与费马问题”(§38)一节,这是非常生动有趣的篇章,而且和中学教材联系得非常密切.

由于笔者的水平和资料来源等的限制,本书中疏误在所难免,请读者批评指正.

杨 之

2017年8月于天津

目 录

第 1 章	凸图形与凸体	//1
§ 1	平面凸图形	//1
§ 2	支撑线	//7
§ 3	凸多边形	//12
§ 4	凸体	//17
§ 5	凸锥	//24
§ 6	垂直于支撑线与支撑面的弦	//29
§ 7	恒宽卵形	//33
	习题	//38
第 2 章	中心对称凸图形	//40
§ 8	中心对称与平移	//40
§ 9	对称多边形和多面体的分划	//44
§ 10	格点最大中心对称凸图形和凸体	//46
§ 11	用凸图形填充平面和空间	//52
	习题	//58
第 3 章	凸多面体	//60
§ 12	欧拉定理	//60

§ 13	欧拉定理及其推论的证明	//63
§ 14	柯西定理与基本引理	//67
§ 15	柯西定理的证明	//72
§ 16	史金尼茨定理	//81
§ 17	史金尼茨定理(续)	//87
§ 18	亚历山大洛夫定理	//95
	习题	//96
第4章 凸体的线性组合 //98		
§ 19	点的线性运算	//98
§ 20	图形的线性运算	//101
§ 21	凸多边形的线性组合	//108
§ 22	凸图形的混合面积	//112
§ 23	若干不等式	//118
§ 24	布鲁诺-闵可夫斯基不等式	//121
§ 25	凸体的截面	//126
§ 26	布-闵不等式的推论	//130
	习题	//132
第5章 闵可夫斯基-亚历山大洛夫定理 //134		
§ 27	定理的建立	//134
§ 28	关于凸多边形的一个定理	//137
§ 29	“平均”多面体的结构	//144
§ 30	闵-亚定理的证明	//149
	习题	//151
第6章 补充 //153		
§ 31	图形概念的精确定义	//153
§ 32	关于正多面体	//156
§ 33	等周问题	//169
§ 34	任意连续统的弦	//171

§ 35	布利克菲尔德定理	//176
§ 36	勒贝格及波尔-布劳维尔定理	//179
§ 37	凸图形与赋范空间	//190
§ 38	维维安尼定理与费马问题	//193
	习题	//212
	编辑手记	//215

凸图形与凸体

第 1 章

§ 1 平面凸图形

有界与无界凸图形 我们在初等几何的教科书中,已经见过了不少凸图形,如凸多边形、圆等.

如果一个图形包含联结它的任意两点的整个线段,那么这图形就叫作凸的(图 1). 圆、半圆、椭圆都是凸图形,所有三角形也都是凸图形. 四边形中有凸的(如平行四边形),也有凹的(图 2). 中心

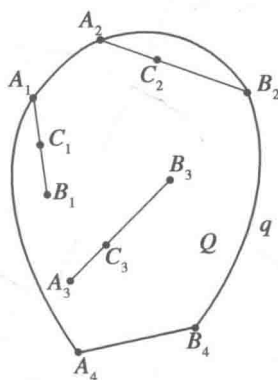


图 1

角小于(或等于) 180° 的扇形是凸的,否则是凹的.

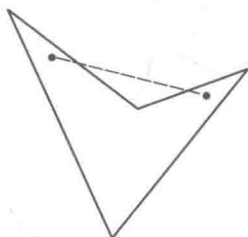


图 2

如果一个凸图形能被一个半径有限的圆所包含,就称为有界,反之即为无界.上面所举的都是有界凸图形,全平面是无界凸图形.一条直线把平面分成两个半平面,半平面、两条平行线之间的带形,也都是无界凸图形.由一点出发引不共线的两条射线分平面为两部分:两个角,其中小于 180° 的角是无界凸图形,另一个大于 180° 的角是无界凹图形.

关于图形和凸图形的严格定义,将在第 6 章给出.

零维、一维和二维凸图形 直线是凸图形,因为如果一条线段 AB 的端点 A, B 在直线上,那么整个线段在直线上.同样,任何射线、线段也都是凸图形,它们是直线上仅有的两种(异于本身的)凸部分.

直线、射线、线段叫作一维凸图形;其余的平面凸图形叫作二维的,即点不全在同一直线上的平面凸图形.

设 Q 是二维凸图形(图 3), A 和 B 是 Q 上两点, q 是过 A, B 两点的直线.因 Q 的点不全属于 q , 因此 Q 中有不共线的三点 A, B, C . 现在证明 Q 包含 $\triangle ABC$.

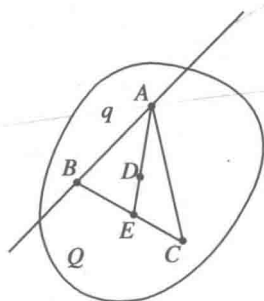


图 3

定理 1 如果凸图形 Q 包含不共线的三点 A, B 和 C , 那么 Q 包含整个 $\triangle ABC$.

事实上, 因 Q 是凸图形, 既然它包含了三点 A, B, C , 则必包含 $\triangle ABC$ 的三边 AB, BC, CA . 设 D 为 $\triangle ABC$ 内任一点, 连 AD 延长交 BC 于 E , 则 E 属于 Q , Q 包含 AE , 因此 D 属于 Q . 于是 Q 包含整个 $\triangle ABC$.

该定理对空间情形也是正确的.

推论 1 包含不共线的三点 A, B, C 的最小凸图形是 $\triangle ABC$.

推论 2 直线、射线和线段以外的任何线不可能是凸图形.

这是因为凸图形或为直线及直线的一部分, 或包含一个三角形而不再是线.

我们把一点也看作凸图形, 称为零维凸图形.

平面凸图形的内部和边界 按照二维凸图形 Q 可把平面上的点分为:

(1) Q 外部的点, 即不属于 Q 的点. 围绕任何外点可适当作出整个在 Q 外部的圆 (图 4 中的点 C).

(2) Q 本身的点, 这可分为: (a) Q 的内点, 围绕任