俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Application of Functional Analysis in Mathematical Physics

泛函分析在数学物理中的应用

[苏] 索伯列夫 著　　王柔怀 等 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

泛函分析在数学物理中的应用

Application of Functional Analysis in Mathematical Physics

●[苏]索伯列夫 著

●王柔怀 等 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

这本书是索伯列夫院士的名著.他是第一个用广义函数与广义导数的概念,并利用泛函分析的方法,解决了许多数理方程中的问题的学者.此书共分三章:泛函分析中的特殊问题、数学物理中的变分方法、双曲型偏微分方程理论.书中对每一个概念都有所交代,所以读者只要具备实变函数、重积分、偏微分方程及变分法方面的基础知识,即可读懂本书而无困难.

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析在数学物理中的应用/(苏)索伯列夫著;王柔怀等译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5603-7221-1

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①索… ②王… Ⅲ.①泛函分析—应用—数学 ②泛函分析—应用—物理 Ⅳ.①O177.92

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 330259 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 张 佳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 257 千字
版　　次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7221-1
定　　价 68.00 元

目录

泛函分析中的特殊问题

第 1 章

§1 引　论

在阐述本书所讲的所有问题时，常常要引用在勒贝格(Lebesgue)意义下的可积函数的某些简单性质以及泛函分析中的某些简单概念与定理，这些概念与定理已经是大家所熟知的. 因此，我们不详述它们的证明，而仅仅列出定理的必要的陈述与定义.

欲了解下面的一切叙述，只需要熟悉实变函数中多重积分的理论，例如，《数学物理方程》[①] 第六讲或者斯米尔诺夫(В. И. Смирнов)的《高等数学教程》第五卷中所讲的内容即可.

现在我们讲多重积分与可和函数的某些性质.

1. 可和函数

对于任何一个在有界区域 Ω 内的 n 变量函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都可以找出这样的闭集 F，使得函数在 F 上是连续的.

所谓正值函数 f 的内积分，即为上确界

$$(\mathrm{BH})\int_\Omega f\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \sup_{F\subset\Omega}\int_F f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.1}$$

① С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М. -Л. , 1947.

若正值函数 f 的内积分存在,而且有如下的性质

$$(\mathrm{BH})\int_{\Omega}(f+1)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=(\mathrm{BH})\int_{\Omega}f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+(\mathrm{BH})\int_{\Omega}1\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.2}$$

则称函数 f 为可和的,积分 $(\mathrm{BH})\int_{\Omega}f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ 简写为

$$\int_{\Omega}f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.3}$$

并且叫作在勒贝格意义下的积分.

设 f 为兼有正负值的函数,若

$$f^{+}=\frac{1}{2}\{f+|f|\},f^{-}=\frac{1}{2}\{|f|-f\} \tag{1.4}$$

都是可和函数,则称 f 为可和的,此时函数 f 的积分由如下的公式定义

$$\int_{\Omega}f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{\Omega}f^{+}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n-\int_{\Omega}f^{-}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.5}$$

集合 E 的勒贝格测度,便是积分

$$mE=\int_{\Omega}\varphi_E\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.6}$$

其中 φ_E 在集合 E 中的点处等于 1,而在除集合 $(\Omega-E)$ 中的点处等于 0.

函数 f 在区域 Ω 内叫作可测的,如果 f 在闭集 $F\subset\Omega$ 上连续且 F 的测度可以任意接近于 Ω 的测度.

任何可和函数都是可测的.

勒贝格积分也有平常积分所具有的基本性质.以后我们将 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$ 简写为 $\mathrm{d}v$,即

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\Omega}(f_1+f_2)\mathrm{d}v=\int_{\Omega}f_1\mathrm{d}v+\int_{\Omega}f_2\mathrm{d}v\\ \displaystyle\int_{\Omega}af\mathrm{d}v=a\int_{\Omega}f\mathrm{d}v\quad(a=\text{常数})\end{cases} \tag{1.7}$$

倘若 $f_1+f_2+\cdots+f_k+\cdots=f_0$ 一致收敛,则

$$\int_{\Omega}(f_1+f_2+\cdots+f_k+\cdots)\mathrm{d}v$$

$$=\int_{\Omega}f_1\mathrm{d}v+\int_{\Omega}f_2\mathrm{d}v+\cdots+\int_{\Omega}f_k\mathrm{d}v+\cdots \tag{1.8}$$

此外,公式(1.8)在如下的条件下也成立:假设对于任何 N 而言,都有 $|f_1+f_2+\cdots+f_N|\leqslant\Psi$,而 Ψ 是可和函数.

如果 $f\geqslant 0$ 且 $\int_{\Omega}f\mathrm{d}v=0$,那么 $f\neq 0$ 的点的集合便有测度 $0(m\{f\neq 0\}=0)$.

如果 $\int_{\Omega}|f_1-f_2|\mathrm{d}\Omega=0$,那么两函数 f_1,f_2 是对等的.

倘若$\int_{\Omega} f\psi \mathrm{d}v = 0$，其中 ψ 是在 Ω 内连续且有连续导数的任何函数，则 f 便对等于零.

设 $k < f < K$，则

$$k \cdot m\Omega < \int_{\Omega} f \mathrm{d}v < K \cdot m\Omega \tag{1.9}$$

勒贝格积分是绝对连续的，换句话说，任给一数 $\varepsilon > 0$，对于在 Ω 内可和的任何函数 f，总可以找到这样的 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任何集 $E \subset \Omega$ 上的积分都满足条件$\int_{E} | f | \mathrm{d}v < \varepsilon$，只要 $mE < \delta(\varepsilon)$.

下面证两个重要的基本不等式.

2. 赫尔德(Hölder) 不等式和闵可夫斯基(Minkowski) 不等式

设 $p > 1$，则当 $p' = \dfrac{p}{p-1}$ 时，即有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, p' - 1 = \frac{1}{p-1} \tag{1.10}$$

考虑曲线 $y = x^{p-1}$(图 1). 在此曲线上

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{p'-1}$$

设 x, y 为任意两个正数. 如图 1 引直线 AD($x =$常数) 与 EC($y =$常数)，使它与曲线相交. 此时我们可以看到，不论 x, y 如何选择，图形 OEB 与 OAD 的面积之和总大于矩形 $OECD$ 的面积. 换言之

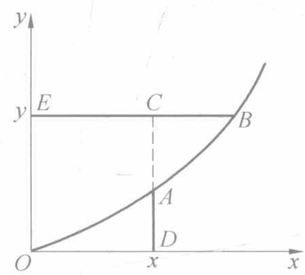

图 1

$$\int_0^x x^{p-1} \mathrm{d}x + \int_0^y y^{p'-1} \mathrm{d}y \geqslant xy \tag{1.11}$$

也就是

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \geqslant xy \tag{1.12}$$

此时等号仅在 $y = x^{p-1} = x^{\frac{1}{p'-1}}$ 或 $x^p = y^{p'}$ 时成立.

设 Q 为 n 维空间中的区域 Ω 内的点，而 $P(Q) > 0$ 是 Ω 内的某个有界函数；又设 $x(Q)$ 与 $y(Q)$ 为 Ω 内的两个正值函数，并且满足下列条件

$$\int_{\Omega} | x(Q) |^p P(Q) \mathrm{d}v = 1, \int_{\Omega} | y(Q) |^{p'} P(Q) \mathrm{d}v = 1 \tag{1.13}$$

此时将式(1.12) 乘以 $P(Q)$，再沿 Ω 上求积分，并利用式(1.10)，则得

$$\int_{\Omega} x(Q) y(Q) P(Q) \mathrm{d}v \leqslant 1 \tag{1.14}$$

现在假设 $X(Q), Y(Q)$ 是 Ω 内的两个任意函数，它们分别是 p 次方与 p' 次方可和的，那么对于下列函数

$$x(Q)=\frac{|X(Q)|}{\left[\int_{\Omega}|X|^{p}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}}$$

与

$$y(Q)=\frac{|Y(Q)|}{\left[\int_{\Omega}|Y|^{p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}}}$$

等式(1.13) 成立，从而不等式(1.14) 也成立；此式化简以后可以写成

$$\int_{\Omega}|X(Q)|\cdot|Y(Q)|\cdot P(Q)\mathrm{d}v\leqslant\left[\int_{\Omega}|X|^{p}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_{\Omega}|Y|^{p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}}$$

由此即得赫尔德不等式如下

$$\left|\int_{\Omega}X(Q)Y(Q)P(Q)\mathrm{d}v\right|\leqslant\left[\int_{\Omega}|X|^{p}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\Omega}|Y|^{p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}}\quad(1.15)$$

式(1.14) 中等号成立的条件显然是：对于几乎一切值 Q，等式 $x^{p}=y^{p'}$ 都成立.因此，欲使式(1.15) 中的等号成立，只有当

$$\frac{|X|^{p}}{\int_{\Omega}|X|^{p}P\,\mathrm{d}v}=\frac{|Y|^{p'}}{\int_{\Omega}|Y|^{p'}P\,\mathrm{d}v},\mathrm{sign}\,XY=\text{常数}$$

几乎处处成立时才行，也就是说，当函数 $|X|^{p}$ 与 $|Y|^{p'}$ 几乎处处只差一个常数因子，而 X,Y 几乎处处同号或异号时才行.

由式(1.15) 可以推出关于若干个函数的一般赫尔德不等式.

设 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1,\lambda_j>0$，并设函数 $\varphi_j(j=1,2,\cdots,k)$ 的绝对值的 $\frac{1}{\lambda_j}$ 次幂可积，也就是说

$$\int_{\Omega}|\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}}P\,\mathrm{d}v<\infty$$

此时乘积 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k$ 便是可和的，而且不等式

$$\left|\int_{\Omega}\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k P\,\mathrm{d}v\right|\leqslant\left[\int_{\Omega}|\varphi_1|^{\frac{1}{\lambda_1}}P\mathrm{d}v\right]^{\lambda_1}\cdot\left[\int_{\Omega}|\varphi_2|^{\frac{1}{\lambda_2}}P\mathrm{d}v\right]^{\lambda_2}\cdot\cdots\cdot\left[\int_{\Omega}|\varphi_k|^{\frac{1}{\lambda_k}}P\mathrm{d}v\right]^{\lambda_k}\quad(1.16)$$

成立，其中等号只有在如下的条件下成立：各个 $|\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}}$ 彼此只差常数因子(也就是说，$|\varphi_j|^{\frac{1}{\lambda_j}}=c_j\psi$) 和 $\mathrm{sign}\,[\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k]=$常数这两个条件都几乎处处成立，至多在测度为零的点集上例外.

现在我们用由 k 推到 $k+1$ 的方法来证明这个不等式.

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k,\varphi_{k+1}$ 均为正,并设已经证明不等式(1.16)对于 k 个函数是成立的. 则当 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1$ 时,令

$$p=\frac{1}{\lambda_{k+1}},p'=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}$$

即有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k\varphi_{k+1}P\mathrm{d}v\right|\\ &\leqslant\left[\int_\Omega[\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k]^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}P\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\cdot\\ &\left[\int_\Omega[\varphi_{k+1}]^{\frac{1}{\lambda_{k+1}}}P\mathrm{d}v\right]^{\lambda_{k+1}}\end{aligned}\tag{1.17}$$

但由归纳法的假设可知,不等式(1.16)对于 k 个函数成立,所以

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\varphi_2^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\cdots\varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}P\mathrm{d}v\\ &\leqslant\left[\int_\Omega\left(\varphi_1^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1}}P\mathrm{d}v\right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\cdot\cdots\cdot\\ &\left[\int_\Omega\left(\varphi_k^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\right)^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}{\lambda_k}}P\mathrm{d}v\right]^{\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k}}\end{aligned}\tag{1.18}$$

将此式代入式(1.17),便得到关于 $k+1$ 个函数的不等式(1.16). 这个不等式当 $k=2$ 时是成立的,这在式(1.15)中已经证明. 所以赫尔德不等式对于任何 k 都成立.

顺次利用以前所得的结果,便可以验证,当所有函数

$$|\varphi_1|^{\frac{1}{\lambda_1}},|\varphi_2|^{\frac{1}{\lambda_2}},\cdots,|\varphi_k|^{\frac{1}{\lambda_k}}$$

都只差一个常数因子时(至多在测度为零的点集上例外),等号才能成立.

如果 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ 当中的每个函数都只取有限个值,那么积分便可用和来代替,而得

$$\sum_{i=1}^N a_1^{(i)}a_2^{(i)}\cdots a_k^{(i)}\leqslant\left[\sum_{i=1}^N(a_1^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_1}}\right]^{\lambda_1}\left[\sum_{i=1}^N(a_2^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_2}}\right]^{\lambda_2}\cdots\left[\sum_{i=1}^N(a_k^{(i)})^{\frac{1}{\lambda_k}}\right]^{\lambda_k}\tag{1.19}$$

这个不等式也叫作赫尔德不等式. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ 时,由式(1.19)可以得到一个有用的不等式如下

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^N a^{(i)}\right]&=\left[\sum_{i=1}^N 1\cdot a^{(i)}\right]\\ &\leqslant\left(\sum_{i=1}^N 1\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^N(a^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{N}\left[\sum_{i=1}^{N}(a^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.20}$$

假设在 Ω 内 $x(Q)\geqslant 0, y(Q)\geqslant 0$. 我们考虑

$$\int_\Omega (x+y)^p P\,\mathrm{d}v=\int_\Omega x(x+y)^{p-1}P\,\mathrm{d}v+\int_\Omega y(x+y)^{p-1}P\,\mathrm{d}v$$

将赫尔德不等式应用于上式右边的每一项，则得

$$\begin{aligned}\int_\Omega (x+y)^p P\,\mathrm{d}v \leqslant & \left[\int_\Omega x^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega (x+y)^{(p-1)p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}}+\\ & \left[\int_\Omega y^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega (x+y)^{(p-1)p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}}\\ = & \left[\int_\Omega (x+y)^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{p-1}{p}}\left\{\left[\int_\Omega x^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega y^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\end{aligned}$$

约去上式右边的第一个因子，则得闵可夫斯基不等式如下

$$\left[\int_\Omega (x+y)^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_\Omega x^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_\Omega y^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.21}$$

不等式(1.21)显然也可以推广到若干个在 Ω 内并有正负值的函数之和. 此时所得的闵可夫斯基不等式为

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |x_1+\cdots+x_k|^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant & \left[\int_\Omega |x_1|^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}+\cdots+\\ & \left[\int_\Omega |x_k|^p P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{1.22}$$

式中的等号只有当函数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 成比例时才能成立.

如果函数 x 和 y 都只取有限个值，则积分便可用和来代替，而我们就得到了数字级数的闵可夫斯基不等式. 由式(1.21)可得

$$\left[\sum a_i |x_i+y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\sum a_i |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum a_i |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.23}$$

或者有若干个数字级数时，便得

$$\left[\sum_i a_i\left|\sum_j x_{ij}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sum_j\left[\sum_i a_i |x_{ij}|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.24}$$

3. 赫尔德逆不等式和闵可夫斯基逆不等式

设 $0<p<1$，则 $p'=\dfrac{p}{p-1}<0$. 考虑曲线 $y=x^{p-1}$(图 2)，在此曲线上显然有

$$x=y^{p'-1}$$

假设 C 是以 x, y 为坐标的点，而且在曲线 $y=x^{p-1}$ 的上方，则图形 $OABDE$ 的面积 q 小于矩形 $OACE$ 的面积. 设 K 为 y 轴上的无穷远点，则面积 q 可以写成面积 $OAKBDE=\int_0^x y\,\mathrm{d}x$ 与面积 $AKB=\int_y^\infty x\,\mathrm{d}y$ 之差. 换言之

$$\int_0^x x^{p-1}\mathrm{d}x-\int_y^\infty y^{p'-1}\mathrm{d}y\leqslant xy$$

也就是

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'}\leqslant xy$$

现在取曲线 $y=x^{p-1}$ 的下方一点 C_1(图 3). 作面积 $KAOEC_1D=\int_0^x x^{p-1}\mathrm{d}x$ 与面积 $KAC_1BD=\int_y^\infty y^{p'-1}\mathrm{d}y$ 之差,这个差等于面积 OAC_1E 与面积 C_1DB 之差,所以小于面积 OAC_1E,也就是

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'}\leqslant xy \tag{1.25}$$

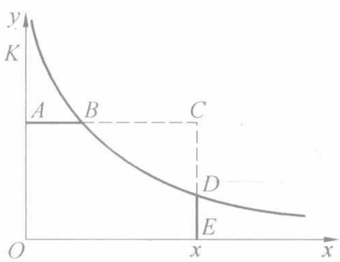

图 2

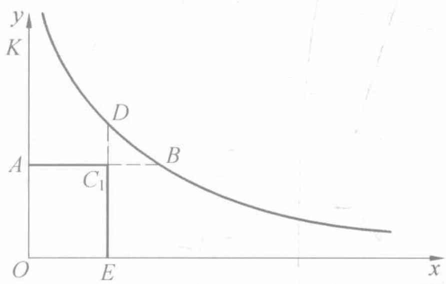

图 3

当 $y=x^{p-1}$ 时,也就是 $x^p=y^{p'}$ 时,不等式(1.25) 便成为等式.

如同导出式(1.15) 一样,由式(1.25) 可得正值函数 X,Y 的赫尔德逆不等式如下

$$\int_\Omega XYP\,\mathrm{d}v\geqslant\left[\int_\Omega X^pP\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega Y^{p'}P\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p'}} \tag{1.26}$$

又由赫尔德逆不等式(1.26) 可得闵可夫斯基逆不等式

$$\left[\int_\Omega(x_1+x_2+\cdots+x_k)^pP\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\geqslant\left[\int_\Omega x_1^pP\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}+\cdots+\left[\int_\Omega x_k^pP\,\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.27}$$

此式当 $0<p<1$ 时,对于取正值的函数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 成立.

和以前一样,等号只有当右边的所有函数成比例时才成立.

证明和前面的完全类似.

注 设 $x(Q)$ 是定义于 Ω 内的函数. 令

$y=x$ 在点集 $E\subset\Omega$ 上

$y=0$ 在点集 $\Omega-E$ 上

$z=x-y$ 在 Ω 内

再将闵可夫斯基不等式应用于 y,z,即得(当 $p\geqslant1$ 时)

$$\left[\int_\Omega|x|^p\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_E|x|^p\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{\Omega-E}|x|^p\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}$$

当 $p<1$ 时，不等式转化为逆不等式（如果 $x>0$）.

§2　L_p 空间的基本性质

1. 范数及相关定义

在平常的 n 维欧几里得空间中，收敛性与取极限的概念都是用两点之间的距离 $\rho=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$ 来定义的.

设矢量 $\vec{x}$ 的坐标为 ξ_i，则表示这个矢量 $\vec{x}$ 的长度的函数 $\rho=\sqrt{\sum\xi_i^2}$ 就是所谓矢量的范数的特殊情形. 因此，两点的距离便可表示为这两点的坐标矢量之差的范数. 利用矢量的欧几里得长度来引入矢量的范数，并不是唯一的方法. 我们说，非负实值函数 $\rho(\vec{x})$ 可作为范数，如果它满足下列三个条件：

A. ρ 是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的正值一次齐次函数，也就是说

$$\rho(k\xi_1,k\xi_2,\cdots,k\xi_n)=|k|\rho(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \tag{2.1}$$

B. $\rho(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是它的变量的凸函数. 换言之，如果定义 $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ 是以 $\lambda\xi_i+\mu\eta_i$ 为分量的矢量，其中 ξ_i,η_i 分别是矢量 $\vec{x},\vec{y}$ 的分量，则由等式 $\rho(\vec{x})=a$，$\rho(\vec{y})=a$ 可以推出

$$\rho(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\leqslant a \tag{2.2}$$

如果 $\lambda+\mu=1,0\leqslant\lambda\leqslant1$.

凸性的几何意义如下：如果两点 $\vec{x},\vec{y}$ 在同一个曲面 ρ(= 常数) 上，则此两点的连线上任一点必定在曲面本身上或者在它的内部.

C. 由等式 $\rho(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=0$ 可以推出

$$\xi_1=0,\xi_2=0,\cdots,\xi_n=0$$

三角形不等式　凸性常常可以用其他方式来陈述.

设 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 为两个任意的矢量. 我们考虑 $\rho(\vec{\xi}+\vec{\eta})$ 并估计它的值. 此时有

$$\vec{\xi}+\vec{\eta}=\left[\frac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}\frac{\vec{\xi}}{\rho(\vec{\xi})}+\frac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}\frac{\vec{\eta}}{\rho(\vec{\eta})}\right][\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})]$$

倘若令

$$\frac{\vec{\xi}}{\rho(\vec{\xi})}=\vec{x},\frac{\vec{\eta}}{\rho(\vec{\eta})}=\vec{y}$$

那么显然有

$$\rho(\vec{x})=1,\rho(\vec{y})=1$$

此外，又令

$$\lambda=\frac{\rho(\vec{\xi})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})},\mu=\frac{\rho(\vec{\eta})}{\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})}$$

并利用范数的齐次性，则得

$$\rho(\vec{\xi}+\vec{\eta})=[\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})]\rho(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})$$

但由条件 B 可知，最后一个因子不大于 1，故有

$$\rho(\vec{\xi}+\vec{\eta})\leqslant\rho(\vec{\xi})+\rho(\vec{\eta})\tag{2.3}$$

这个不等式称为三角形不等式. 这样就由条件 B 引出了关于一次齐次函数的三角形不等式.

反之，易于看出，一次齐次函数 ρ 的凸性可由三角形不等式推出.

事实上，如果 $\rho(\vec{x})=a,\rho(\vec{y})=a$，那么

$$\rho(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\leqslant\rho(\lambda\vec{x})+\rho(\mu\vec{y})=(\lambda+\mu)a=a$$

这就是所要证明的.

如果对于任何 $\vec{\xi}$，在 $\rho_1(\vec{\xi})$ 与 $\rho_2(\vec{\xi})$ 之间存在着不等式

$$m\rho_1(\vec{\xi})\leqslant\rho_2(\vec{\xi})\leqslant M\rho_1(\vec{\xi})$$

其中 m,M 均与 $\vec{\xi}$ 无关，则称 $\rho_1(\vec{\xi})$ 与 $\rho_2(\vec{\xi})$ 这两个范数是等价的或对等的.

在 n 维欧几里得空间中，所有的范数都是等价的. 事实上，在曲面 $\rho_1(\vec{x})=1$ 上，函数 $\rho_2(\vec{x})$ 能取得最大值与最小值. 并且由条件 C 可知，它的最小值是正的. 用 M,m 分别代表 $\rho_2(\vec{x})$ 在此曲面上的最大值与最小值，则由

$$\rho_2(\vec{\xi})=\rho_2\left(\rho_1(\vec{\xi})\cdot\frac{\vec{\xi}}{\rho_1(\vec{\xi})}\right)=\rho_1(\vec{\xi})\rho_2(\vec{x})$$

立即推出所要的不等式.

n 维空间的任何放射变换，都保留曲面的凸性. 因此，如果 $\rho(y_1,\cdots,y_n)$ 是以 $y_1,\cdots,y_n$ 为坐标的空间中的可用范数，那么

$$\rho\left(\sum a_{1j}x_j,\sum a_{2j}x_j,\cdots,\sum a_{nj}x_j\right)$$

也是空间 $x_1,\cdots,x_n$ 中的可用范数，只要变换行列式 $|a_{ij}|$ 不等于零. 事实上，如果在空间 $x_1,\cdots,x_n$ 中，所有 $y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n(x_1,\cdots,x_n)$ 都等于零，那么所有的坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 也等于零. 这样，由 $\rho=0$ 便可推出 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. 又 ρ 的齐次性也是显然的.

设函数 φ 本身及 $|\varphi|^p$ 都在有界区域 Ω 内可积，我们称此种函数 φ 的集合为 L_p. 现在在函数集合 L_p 中引入范数的概念. 设

$$\|\varphi\|=\left[\int_\Omega|\varphi|^p\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}$$

则 $\|\varphi\|$ 便叫作范数. 函数空间中的范数是矢量长度这一几何概念的推广. 必

要时我们往往给予范数一种特别的标号，用以说明这个范数是在何种空间中规定的. 例如，我们可以写 $\|\varphi\|_{L_p}$.

对于范数，下列结论显然成立：

(a) $\|\varphi+\psi\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$（闵可夫斯基不等式）；

(b) $\|a\varphi\| = |a| \cdot \|\varphi\|$，$a=$常数；

(c) 若 $\|\varphi\|=0$，则 $\varphi=0$（至多在测度为零的点集上例外）.

以后我们要使用集合论里的一些记号. 如果 φ 是空间 L_p 中的元素，那么我们便写 $\varphi \in L_p$. 任何元素 φ_k 的序列用 $\{\varphi_k\}$ 表示. 若集合 E_1 是 E_2 的一部分，则视 E_2 中是否有不在 E_1 内的元素而写作 $E_1 \subset E_2$ 或 $E_1 \subseteq E_2$. 若元素 φ 不属于集合 E，则写作 $\varphi \notin E$.

如果 $\|\varphi_k-\varphi_0\| \to 0$，我们就说，函数列 $\{\varphi_k\}$ 在空间 L_p 中强收敛于函数 φ_0. 有时用如下的记号来表示强收敛

$$\varphi_k \Rightarrow \varphi_0$$

2. 黎兹 — 费歇耳(Riesz-Fisher) 定理

假设在 L_p 中有如此的函数列 $\{\varphi_k\}$：对于任给的 $\varepsilon>0$，都有 $N(\varepsilon)>0$ 存在，使当 $k,m>N(\varepsilon)$ 时即有 $\|\varphi_k-\varphi_m\|<\varepsilon$；那么便存在如此的函数 $\varphi_0 \in L_p$，使得 $\varphi_k \Rightarrow \varphi_0$.

注 这个定理肯定了函数空间 L_p 的完备性. 我们不拟作出它的证明. 它的证法与 $p=2$ 时的证法相仿①.

3. L_p 中函数的整体连续性

设 φ 是定义于整个空间内的函数，并且在 Ω 外 $\varphi\equiv 0$，而在 Ω 内 $\varphi \in L_p$.

设 $\vec{P}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维空间中的坐标矢量，$|\vec{P}|$ 是它的长度.

定义 设函数 $\varphi \in L_p$ 在 Ω 内，如果对于任何 $\varepsilon>0$，都可找到 $\delta(\varepsilon)>0$，只要 $|\vec{Q}|<\delta(\varepsilon)$，就有

$$\left[\int |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \tag{2.4}$$

则函数 φ 叫作在 L_p 内整体连续.

定理1 定义在有界区域 Ω 内的任何函数 $\varphi \in L_p$，在此区域内都是整体连续的.

证 为了使论证简单起见，我们将函数 φ 延拓于 Ω 外，并令它在 Ω 外等于零. 由勒贝格积分的绝对连续性可知，按照任给的 $\varepsilon>0$，即可找出 $\delta_1(\varepsilon)>0$，使得当 $m\Omega'<\delta_1(\varepsilon)$ 时有 $\int_{\Omega'}|\varphi|^p\mathrm{d}v<\varepsilon$. 又由可和函数的定义可知，能找出这

---

① С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 308 ～ 311 页.

样的闭集 $F_\delta \subset \Omega$,使 $mF_\delta > m\Omega - \dfrac{\delta_1}{2}$,而 φ 在 F_δ 上是连续的.

根据魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理可知,函数 φ 在闭集 F_δ 上是一致连续的.这就是说,如果点 $\vec{P}$ 与 $\vec{P}+\vec{Q}$ 都属于 F_δ,则选取 $|\vec{Q}|<\delta_2(\varepsilon)$,即有

$$|\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p < \frac{\varepsilon^p}{m\Omega}$$

设 $F_\delta^{\vec{Q}}$ 是由 F_δ 移动 $-\vec{Q}$ 而得的闭集. $F_\delta, F_\delta^{\vec{Q}}$ 与集合 Ω 包含于某个球 K 内,并作点集

$$F_\delta^{(1)}=(K-\Omega)+F_\delta, F_\delta^{\vec{Q}(1)}=(K-\Omega)+F_\delta^{\vec{Q}}$$

这两个集合的测度均与 K 的测度任意接近,即

$$\begin{cases} m[(K-\Omega)+F_\delta]=m[K-(\Omega-F_\delta)]>mK-\dfrac{\delta_1(\varepsilon)}{2} \\ m[(K-\Omega)+F_\delta^{\vec{Q}}]=m[K-(\Omega-F_\delta^{\vec{Q}})]>mK-\dfrac{\delta_1(\varepsilon)}{2} \end{cases} \tag{2.5}$$

作交集 $F_\delta^* = F_\delta^{(1)} \cdot F_\delta^{\vec{Q}(1)}$,显然有

$$mF_\delta^* > mF_\delta^{(1)} + mF_\delta^{\vec{Q}(1)} - mK > mK - \delta_1(\varepsilon)$$

因此

$$m(K-F_\delta^*) < \delta_1(\varepsilon)$$

于是

$$\begin{aligned}\left[\iint_K |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p \mathrm{d}v\right] \leqslant & \left[\iint_{F_\delta^*} |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})-\varphi(\vec{P})|^p \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}} + \\ & \left[\iint_{K-F_\delta^*} |\varphi(\vec{P}+\vec{Q})|^p \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}} + \\ & \left[\iint_{K-F_\delta^*} |\varphi(\vec{P})|^p \mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

上式右边第一个积分里的被积函数小于 $\dfrac{\varepsilon^p}{m\Omega}$,因为其中的两点 $\vec{P}$ 与 $\vec{P}+\vec{Q}$ 都属于 F_δ. 又由 $\int_\Omega |\varphi|^p \mathrm{d}v$ 的绝对连续性可知,上式右边的后两个积分也很小.由此定理得证.

4. 可列稠密网

定理 2 对于任何函数 $\varphi \in L_p$,都存在着一列有各阶连续导数的函数 $\{\varphi_k\}$ 强收敛于 φ.

证 假设在基本区域 Ω 外 $\varphi \equiv 0$.

我们考虑核函数

$$\omega(\vec{Q},h)=\begin{cases}e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}, \text{当 } r<h \\ 0, \text{当 } r\geqslant h\end{cases} \quad (r=|\vec{P}-\vec{Q}|) \tag{2.7}$$

它有下列明显的性质：

(1) $\omega(\vec{Q},h)$ 和它的所有导数在整个空间内连续.

(2) 在半径为 h 的球的边界上，函数 $\omega(\vec{Q},h)$ 及其各阶导数都等于零（第二个性质可由 $e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}$ 及其任何导数当 $r<h$ 且 $r\to h$ 时，都趋于 0 这一事实得出）.

事实上，用完全归纳法可以证明，任何导数

$$\frac{\partial^{\alpha} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

都有如下的形式

$$\frac{P_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)}{(r^2-h^2)^{2\alpha}}e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} \tag{2.8}$$

其中分子是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的多项式.

(3) 设 $\kappa=\int_{r<1} e^{\frac{r^2}{r^2-1}}\mathrm{d}v$，则

$$\int\omega(\vec{Q},h)\mathrm{d}v=\kappa h^n$$

其中 n 是空间的维数.

于是

$$\frac{1}{\kappa h^n}\int\omega(\vec{Q},h)\mathrm{d}v=1$$

注 我们只利用核函数的上述三个性质，而不考虑由等式(2.7)所定义出的核的具体形式. 这个注以后是有用的.

对于以 $\vec{P}$ 为中心，以 h 为半径的球，作函数 φ 的平均函数

$$\varphi_h(\vec{P})=\frac{1}{\kappa h^n}\int\omega(\vec{P}-\vec{P}_1,h)\varphi(\vec{P}_1)\mathrm{d}v_{\vec{P}_1} \tag{2.9}$$

平均函数有下列性质：

(1) 函数 $\varphi_h(\vec{P})$ 有任何阶的一切导数.

证 设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_n)$ 为两点 $\vec{P},\vec{P}_1$ 的坐标. 考虑表达式

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{k}\{\varphi_h(x_1+k,x_2,\cdots,x_n)-\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\\&=\frac{1}{\kappa h^n}\int\frac{1}{k}\{\omega(x_1+k-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)-\\&\qquad\omega(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)\}\cdot\varphi(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}v_{\vec{P}_1}\\&\to\frac{1}{\kappa h^n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_1}[\omega(\vec{P}-\vec{P}_1,h)]\varphi(\vec{P}_1)\mathrm{d}v_{\vec{P}_1}\quad(\text{当 } k\to 0 \text{ 时})\end{aligned} \tag{2.10}$$