



普通高等教育“十三五”规划教材

理论力学

(第二版)

张亚红 刘 睫 主编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

理论力学

(第二版)

张亚红 刘 睫 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十三五”规划教材，根据教育部制定的理论力学课程要求编写，初衷是为读者提供一本既适合课内学习，又便于课外深造的教学资料。本书内容包括静力学、运动学、动力学三部分，其中带“*”章节属于非基本要求的内容，为相关专业教学选用内容。章后给出了“思考空间”，对章节内容进行总结升华，将前后内容“承上启下”，为后续课程“牵线搭桥”；习题部分突出了题目的工程背景，增加了开放性的研究型题目，配合综合应用能力培养以及创新教育的需求。

本书可作为普通高等教育工科各专业的理论力学课程教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学 / 张亚红, 刘睫主编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2018.6

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-057914-0

I. ①理… II. ①张… ②刘… III. ①理论力学—高等学校—教材
IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 127298 号

责任编辑: 朱新颖/责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 吴兆东/封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 6 月第 二 版 印张: 19 3/4

2018 年 6 月第九次印刷 字数: 505 600

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书第一版为普通高等教育“十一五”规划教材，出版时间为2008年，使用10年以来受到了本校师生和广大读者的厚爱，在此深表谢意。

为了配合高等教育新工科育人要求和培养目标，结合西安交通大学近几年人才培养及课程教学改革的实践和经验，本书在第一版的基础上，主要进行了以下几个方面的修订。

(1) 重视基本理论的应用。在静力学部分增加了重心、质心与形心计算，在动力学部分增加了变质量质点运动微分方程的应用。

(2) 重视概念的严谨性。舍弃了传统的复合运动加速度合成法的几何证明，直接采用解析法定义几个速度和加速度，采用解析法证明速度合成定理和加速度合成定理，强调力学推导的严谨性和准确性。

(3) 重视思维启发，强调对概念的理解和深化。在叙述过程中，设置了大量的例题和思考题，加深读者对力学概念的理解和拓展。

(4) 重视学生力学建模能力的培养。在例题和习题修订过程中，强化了题目的工程背景。求解完成增补的题目，需要学生将物理现象与基本理论和方法相联系，完成力学建模。

(5) 重视学生创新能力和团队合作能力的培养。在每一章后面增设了开放性的研究、设计型题目，供不同层次的学生独立完成或者以小组合作的方式完成。

另外，本版修订还对部分章节内容进行了整合和删减：强化了摩擦的叙述及应用；对刚体动力学一章的内容进行了拆分，将平面运动部分合并到了动量矩的应用；删掉了运动学机构运动简图、动力学运动微分方程数值解法以及非线性系统混沌现象的介绍。总之，本次修订继承了原版教材体系完整、理论严谨、推演性强的特点，同时又注重和强化对学生综合应用能力的培养和创新能力的培养，适合不同层次读者使用。

本次修订工作由张亚红和刘睫负责完成，张亚红负责全部内容的修订和统稿，刘睫负责公式的校对。韩省亮通读了全稿，提出了许多宝贵的修改建议。张新华通读了第14章，给予了宝贵的修改建议。修订工作得到了第一版教材主编张克猛老师、张义忠老师以及第一版教材的参编同仁们的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢！

由于时间和水平有限，书中难免有不妥和疏忽之处，衷心希望读者批评指正。

编 者

2018年1月于西安交通大学

第一版前言

一段时间以来,随着本科教学计划的调整,基础力学课程的学时有较大幅度的削减。然而在载人航天、奔月工程、大型飞机研制等标志性工程的实施过程中,又将必然遇到大量的和一些前所未遇的力学问题。由此看来,扎实的力学功底,不仅需要课内的传授,更需要课外的不懈努力和走出校门后结合工程实际的不断探索。编写本书的初衷是为读者提供一本既适合课内学习,又便于课外深造的教科书。

本书以课程任务为主线来组织内容、阐述理论、提供处理问题的方法思路,在一定程度上反映了西安交通大学理论力学教研室多年来的教学经验和课程体系改革的一些探讨、实践与体会。将静力学公理分别放在共点力系合成、刚体上力系的等效和平衡(特例)、变形体平衡(举例)等节中作为物理依据讲述和引用,是本书的一种尝试。二维运动以几何法为主,三维运动则采用矩阵形式的分析法,各取其所长。数值解法的成熟和推广应用,提高了运动微分方程和变分方法(即本课程中的分析力学方法)的应用价值。为此本书在动力学开头对运动微分方程(以质点为例)的建立、数值解法以及与此相关的混沌现象、原因做了适当介绍。提高了对分析力学方法的重视程度,在虚位移概念的引入上有自己的特色。全书布局为教学中对不同内容的选择、侧重提供了条件,同时也为有兴趣做深入一步研究的读者提供了方便。

理论力学是力学系列课程的第一门,为了给学生以整体印象,本书适当注意了与其他课程之间的过渡联系。第1章中,在讲述了“刚体上力系的等效与平衡”之后,专门安排了“变形体的平衡”一节,以提醒读者在以后研究变形体时如何把握其中的分寸;在第15章“虚位移原理”最后,提醒读者该原理也适用于无限自由度的弹性体,并可用有限自由度去逼近。

本书在张义忠教授主编的理论力学讲义的基础上修订而成,教研室集体编写,张克猛、张义忠任主编。其中刘捷编写第2章;赵玉成编写第3章;周进雄编写第4、5章;张亚红编写第6章;陈玲莉编写第7、8章;张克猛编写第11章和第12章的12.1、12.2、12.3节;王芳文编写第13、14章和第17章的17.2节;韩省亮编写第15、16章和第17章的17.1节;其余章节由张义忠编写。最后由张克猛统一定稿。

由于时间仓促,书中难免有不妥和疏忽之处,衷心希望读者提出批评和指正。

编者

2007年7月于西安交通大学

目 录

绪论	1
----	---

第一篇 静 力 学

第 1 章 静力学基础	3
1.1 力及其表示法	3
1.1.1 力	3
1.1.2 力的投影和分析表示法	4
1.2 刚体与变形体	4
1.3 力系平衡的几个公理	5
1.3.1 力的平行四边形公理	5
1.3.2 二力平衡公理	7
1.3.3 加减平衡力系公理	7
1.3.4 刚化公理	9
1.4 常见约束 约束反力	11
1.4.1 自由体 非自由体 约束	11
1.4.2 常见约束及其约束反力	11
1.5 分析受力 受力图	15
思考空间	18
习题	18
第 2 章 刚体上力系的等效与简化	21
2.1 力矩	21
2.1.1 力对点之矩	21
2.1.2 力对轴之矩	22
2.1.3 力对点之矩与力对轴之矩的关系	22
2.2 力偶	24
2.2.1 力偶、力偶的性质	24
2.2.2 力偶系的合成与平衡	25
2.3 力系的简化	28
2.3.1 力的平移定理	28
2.3.2 力系的主矢、主矩及力系简化	29
2.3.3 力系的合成结果	30
2.3.4 平行力系的简化、重心、质心与形心	32

思考空间	35
习题	35
第3章 力系的平衡	40
3.1 一般力系的平衡问题	40
3.1.1 一般力系的平衡条件	40
3.1.2 特殊力系的平衡条件	40
3.2 静定、静不定问题	44
3.3 刚体系统的平衡	46
3.4 平面桁架内力计算	49
3.4.1 理想桁架模型的建立	50
3.4.2 理想桁架的内力计算	50
思考空间	52
习题	52
第4章 考虑摩擦的平衡问题	59
4.1 摩擦	59
4.2 摩擦角 自锁现象	60
4.3 考虑摩擦的平衡问题	61
4.4 滚动摩阻	66
思考空间	67
习题	68

第二篇 运 动 学

第5章 运动学基础	73
5.1 点的运动	73
5.1.1 矢径法	74
5.1.2 坐标法	74
5.2 刚体的基本运动	81
5.2.1 刚体的平动	81
5.2.2 刚体的定轴转动	82
思考空间	85
习题	85
第6章 点的复合运动	90
6.1 复合运动中的基本概念	90
6.1.1 工程中点的复合运动举例	90
6.1.2 一点、两系、三种运动	90
6.1.3 动点的运动方程、三种速度与加速度	91

6.2 点的速度合成定理与加速度合成定理	93
6.2.1 速度合成定理	93
6.2.2 加速度合成定理	93
6.2.3 几何特例证明加速度合成定理	94
6.3 点的速度、加速度合成定理的应用	95
思考空间	103
习题	103
第7章 刚体的平面运动	109
7.1 刚体平面运动方程及运动分解	109
7.1.1 平面运动方程	109
7.1.2 刚体平面运动分解为平动和转动	110
7.2 刚体平面运动的速度分析	110
7.2.1 速度合成法(基点法)	110
7.2.2 速度投影法	112
7.2.3 速度瞬心法	113
7.3 刚体平面运动的加速度分析	116
*7.4 刚体绕平行轴转动的合成	123
思考空间	126
习题	127
*第8章 刚体定点运动和刚体一般运动	134
8.1 定点运动刚体的位置描述 欧拉角 瞬时转轴	134
8.1.1 方向余弦矩阵	134
8.1.2 欧拉角	135
8.1.3 瞬时转轴	136
8.2 定点运动刚体的角速度 刚体上各点的速度	137
8.2.1 定点运动刚体的角速度	137
8.2.2 刚体上各点的速度	138
8.2.3 科里奥利公式	138
8.2.4 速度的矩阵表示法	139
8.3 定点运动刚体的角加速度 刚体上各点的加速度	139
8.3.1 定点运动刚体的角加速度	139
8.3.2 刚体上各点的加速度	140
8.4 刚体绕相交轴转动的合成	141
8.4.1 角速度合成公式	142
8.4.2 角加速度合成公式	142
8.5 刚体一般运动	146
8.5.1 广义坐标 运动方程	146
8.5.2 一般运动分解为平动与定点运动 刚体上一点的速度、加速度	147

思考空间·····	148
习题·····	149

第三篇 动 力 学

第 9 章 质点运动微分方程·····	151
9.1 研究质点动力学的意义和方法·····	151
9.2 质点运动微分方程·····	152
*9.3 质点在非惯性系中的运动·····	157
9.3.1 质点相对运动微分方程·····	157
9.3.2 考虑地球自转时地球表面附近物体的运动·····	158
思考空间·····	161
习题·····	161
第 10 章 质点系动量定理与动量矩定理·····	165
10.1 质点的动量定理与动量矩定理·····	165
10.1.1 质点动量定理·····	165
10.1.2 质点动量矩定理·····	166
10.2 质点系动量定理·····	166
10.2.1 质点系动量·····	166
10.2.2 质点系动量定理·····	168
10.2.3 质心运动定理·····	171
10.2.4 变质量系统的质心运动微分方程·····	174
10.3 质点系动量矩定理·····	176
10.3.1 质点系动量矩·····	176
10.3.2 质点系动量矩定理·····	177
10.3.3 质点系相对质心的动量矩定理·····	179
10.3.4 刚体平面运动微分方程·····	180
10.4 动量定理、动量矩定理综合应用·····	182
思考空间·····	186
习题·····	187
*第 11 章 刚体定点运动及一般运动动力学描述·····	194
11.1 刚体定点运动微分方程·····	194
11.1.1 惯量矩阵 惯性主轴·····	194
11.1.2 刚体定点运动微分方程·····	196
11.1.3 轴对称自转刚体的规则进动·····	196
11.1.4 三自由度陀螺的力学特性·····	199
*11.1.5 刚体绕惯性主轴自转的稳定性讨论·····	202
*11.2 刚体一般运动微分方程·····	203

思考空间	206
习题	206
第 12 章 动能定理	208
12.1 力的功	208
12.1.1 功的定义	208
12.1.2 几种常见力的功	209
12.1.3 约束力的功	211
12.1.4 质点系内力的功	212
12.2 动能	212
12.2.1 质点的动能	212
12.2.2 质点系的动能 柯尼西定理	213
12.2.3 刚体的动能	213
12.3 质点系动能定理	215
12.4 动能定理应用举例	216
12.5 动力学综合问题举例	218
思考空间	222
习题	223
第 13 章 达朗贝尔原理	227
13.1 达朗贝尔原理	227
13.1.1 惯性力 质点达朗贝尔原理	227
13.1.2 质点系的达朗贝尔原理	228
13.2 惯性力系简化	229
13.2.1 惯性力系的主矢和主矩	229
13.2.2 刚体惯性力系的简化	230
13.2.3 动静法的应用	232
13.3 轴承动约束力	236
13.3.1 定轴转动刚体的惯性力系简化	236
13.3.2 定轴转动刚体轴承的动约束力	237
13.3.3 消除转子动约束力的途径	237
思考空间	238
习题	239
第 14 章 虚位移原理	243
14.1 对矢量力学方法的回顾	243
14.2 约束及其分类 约束方程 自由度	244
14.2.1 约束及其分类 约束方程	244
14.2.2 自由度	246
14.3 虚位移	247
14.4 理想约束	249

14.5 虚位移原理	250
14.5.1 虚位移原理的表述	250
14.5.2 虚位移原理的应用	251
14.6 多自由度情况下的虚位移原理	256
14.6.1 广义坐标 广义位移	256
14.6.2 广义力	257
14.6.3 虚位移原理在广义坐标中的表达形式	258
思考空间	259
习题	260
第 15 章 拉格朗日方程	263
15.1 动力学普遍方程	263
15.2 拉格朗日第二类方程	265
15.3 拉格朗日第二类方程的首次积分	271
15.3.1 广义能量积分	271
15.3.2 循环积分	272
思考空间	274
习题	274
第 16 章 动力学专题	277
16.1 振动的基本理论	277
16.1.1 单自由度系统的自由振动	277
16.1.2 阻尼对自由振动的影响	282
16.1.3 单自由度系统的受迫振动 共振	285
16.1.4 阻尼对受迫振动的影响	287
16.1.5 振动的消减和隔离	290
16.2 碰撞	293
16.2.1 碰撞现象的特殊性 恢复因数	293
16.2.2 用于碰撞过程的基本定理	295
16.2.3 两球的对心碰撞	297
16.2.4 碰撞冲量对定轴转动刚体的作用 撞击中心	301
习题	302
参考文献	306

中英文名词对照



绪 论

1. 理论力学的研究内容

理论力学研究物体机械运动的一般规律。所谓**机械运动**，是指所研究的物体相对另一参照物体，在空间位置随时间变化的一种运动形式，其中的参照物体称为**参考体**。与参照物相固连的坐标系称为**参考系**。绝大多数工程问题，参考系固连于地球表面足以满足要求，此时参考系又称为**惯性参考系**。如果地球运动对所研究物体机械运动的影响不可忽视，则惯性坐标系必须固连在地球以外的物体上。理论力学属于经典力学的范畴，研究宏观、低速、惯性系下物体的机械运动。相对于惯性参考系静止或者匀速直线运动的物体，称其处于**平衡状态**。平衡包含着两层含义：首先是指一种特定的运动形式；其次则意味着为了维持平衡状态，物体所受各力之间必然存在着的某种确定关系，通常称为平衡条件，表达成数学形式则称为平衡方程。与平衡状态相对应的是非平衡状态，如腾空而起的火箭，飞行的飞机，运转的转子，执行读、写任务的磁头等，在力学中把这类物体归结为运动学和动力学问题进行研究。

本课程内容按照三部分进行组织。

静力学：研究力系的简化以及物体的受力及平衡条件。

运动学：从几何的角度研究物体运动的几何性质，包括位移、轨迹、速度、加速度，暂不涉及力。

动力学：研究物体运动与受力之间的关系，求解未知的运动量及力，涉及牛顿力学及分析力学。

解决好一个力学问题，通常包含以下四方面工作：

(1) 建立合理的力学模型。围绕所要解决的问题，考虑各主要影响因素，忽略一些次要因素，建立系统合理的力学模型(又称物理模型)。

(2) 建立数学模型。针对力学模型，运用相关的力学理论和数学工具，建立或推导所研究问题的基本方程，最后形成定解方程。此方程可能为线性代数方程、微分方程、非线性方程，或其他形式的方程。

(3) 理论求解。求得方程的解以及研究解的性质，简单问题可以求得解析解，复杂问题则需借助计算机进行数值求解。

(4) 结果验证及模型修正。验证力学、数学模型的合理性，检测所得结果的可信度，必要时对模型作出修正重新求解。

2. 研究对象的初步分类

自然界和工程界的物体千姿百态，各不相同。不同类型的研究对象在研究方法上差异很大。为了便于问题研究，对各类物体初步进行理想化的抽象，分类如下。

质点：没有大小但具有质量的点。这一概念最初来自对天体的运动研究，与天体之间的超远距离相比，其自身的大小影响甚微，可视为质点。由牛顿定律即可建立质点的定解方程。

离散质点系：分散但相互间有某种联系的一群质点。例如，太阳系中的各天体以万有引力相互联系，即组成一个离散质点系。至于具体的力学模型中需要考虑哪些质点，则由所研究的问题而定。

连续体：我们周围的物体多数为具有一定大小，且质量连续分布的物体，称为连续体(与流体合称为连续介质)。物体的几何形状可能比较简单，也可能相当复杂。从逻辑上，连续体可看成由无限多个质点组成的连续质点系，但并非通过逐一研究各质点就能达到解决问题的目的。因此，建立直接研究连续质点系的有效工具就显得十分必要。

离散质点系和连续体统称为质点系，它们之间既有共性也有差别。这种差别主要体现在所使用的数学工具不同。

3. 矢量力学方法和分析力学方法

力学的研究方法可分成矢量力学方法(又称牛顿-欧拉力学)和分析力学方法(又称拉格朗日力学)。矢量力学通过力的大小、方向及力矩表达力的作用。该方法相对比较直观，在历史上形成较早，因而人们比较熟悉；分析力学则通过力的功(确切说是虚功)表达力的作用，是牛顿定律与数学工具(特别是变分工具)相结合的产物。这种方法相对出现较晚，因而人们相对比较生疏。

4. 与相关课程的联系和分工

早期的力学是物理学的一个组成部分，随着研究的深入逐渐从物理学中分离出来而成为一门独立的学科。物理学侧重于物质世界基本规律的探讨，力学则架起了基本物理规律与复杂工程实际间的一座桥梁。两者的重要差别在于力学研究对象的多样化及运动形式的复杂性。物理课程中已有的一些力学概念在本课程中将有新的内涵，物理课程中已有的一些力学定理在本课程中也将有新的应用形式。此外，本课程还将对分析力学的基础部分进行讨论。课程中将涉及矢量、微分、矩阵、微分方程、变分等多种数学工具。

理论力学是一门技术基础课，是材料力学、振动力学、结构力学、流体力学、弹性力学、机械原理、机械设计等后续课程的基础；为后续课程在分析约束、分析受力、力系等效简化和描述平衡、运动及动力学分析等方面提供综合性的支持平台。

第一篇 静 力 学

静力学用矢量力学方法研究物体平衡问题(又称几何静力学), 包括刚体平衡和变形体平衡。力系的等效和简化为其理论基础, 该理论揭示了力系对物体作用的本质, 给出了平衡条件。本篇介绍的概念与结论在分析物体受力和建立物体平衡方程中有重要应用。

第 1 章 静力学基础

本章将讨论力学模型中的几个重要内容: 刚体的概念、常见约束的性质、物体受力和受力图。力系等效简化的依据是人们长期观察和实验总结出的几条结论, 经过严格的科学抽象和表述, 其正确性已被公认, 通常称为静力学公理。静力学公理在力学建模中具有重要的指导意义。

1.1 力及其表示法

1.1.1 力

力是物体之间相互的机械作用, 其作用效果是改变物体的运动状态(外效应)和使物体变形(内效应)。改变物体的运动状态, 在静力学中可理解为使静止的物体开始运动。在动力学中则依据牛顿定律对不同的力学模型和不同的运动形式给出更明确的表述。力使物体产生变形, 将在材料力学等课程中进行研究。力的作用效果取决于力的三要素: 大小、方向、作用点。任何一个要素的改变, 都将改变该力的作用效果。在国际单位制(SI)中力的单位是牛顿(N)或千牛顿(kN)等。

力是矢量, 在几何上可以用带有箭头的有向线段表示出力的全部要素: 线段长度依比例表示力的大小, 箭头方向表示力的方向, 线段的起点(或终点)表示力作用点的位置。此外, 还需标上代表该力的矢量名称, 常以黑体字符表示, 如图 1-1 所示。其中 $\mathbf{F}$ 表示力的大小和方向, 下标 A 表示力的作用点。多数情况下 $\mathbf{F}_A$ 代表作用于 A 点的一个力, 在运算表达式中等同于一般的数学矢量。力的几何表示法主要用于物体的受力分析(绘制受力图)。

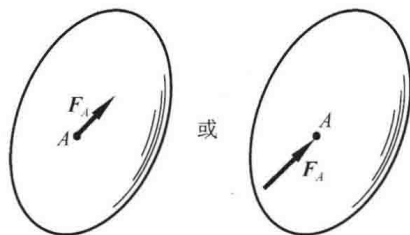


图 1-1

力是物体之间相互的机械作用，满足牛顿第三定律，即作用反作用公理。本课程中把它列为静力学公理之一。

作用反作用公理 当甲物体对乙物体有作用力的同时，甲物体也受到来自乙物体的反作用力；作用力与反作用力等值、反向、共线。

在对物体进行受力分析时必须遵循作用反作用公理。

1.1.2 力的投影和分析表示法

数学中已给出了矢量在给定轴或平面上的投影的定义。据此，建立直角坐标系，即可计算力在坐标轴上的投影。设 x 、 y 、 z 轴的单位矢量为 i 、 j 、 k ，力 F 与 x 、 y 、 z 轴正向的夹角分别为 α 、 β 、 γ (图 1-2)，则力在坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \cos \beta \\ F_z = F \cos \gamma \end{cases} \quad (1-1)$$

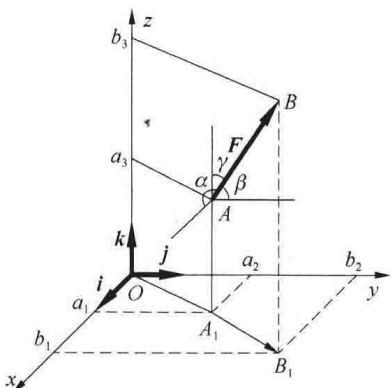


图 1-2

力在坐标轴上的投影为代数量。在具体计算力的投影时可以先依据力与坐标轴正向所成的夹角确定投影的正负(锐角为正、钝角为负)；再利用给定的几何数据计算投影的大小，其中包括了二次投影方法。

已知力的投影，就可以用代数方法(又称为分析方法)表示力、力的关系并完成具体计算。其中

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1-2)$$

称为力的分析表达式。

力的分析表示法只描述了力的方向及大小，力的作用点仍需通过受力图得以反映。

1.2 刚体与变形体

静力学中把研究对象区分为刚体和变形体两种力学模型。所谓刚体，指受到力作用后不会发生变形的物体，换言之，指受到力作用后，物体任意两点间距离都不会改变的物体。

物体受力后总会发生变形，有时变形还相当显著。图 1-3 中弹簧受力后的平衡位置(图 1-3(b))与初始位置(图 1-3(a))相比，弹簧的长度及方位都有了不可忽视的改变。在撑杆跳运动员起跳后的过程中，撑杆也会呈现明显的弯曲变形，其变形的形式及描述方法都比弹簧要复杂，且表现为一个动态过程。力学中把上述情况归结为大变形(或有限变形)问题。对大变形问题的研究涉及更深的力学知识和更复杂的数学工具，数值计算工作量也较大。

大多数工程问题中，物体受力后的变形都相当小。例如，一根受拉的钢杆，当载荷控制在允许范围内时，杆长的变化不超过

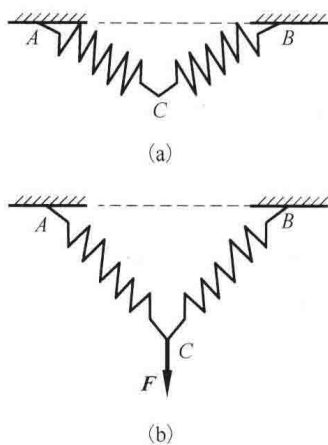


图 1-3

原长的千分之几；一般的公路桥梁，在自重及外载荷作用下铅垂方向的位移不超过桥梁跨度的 $\frac{1}{700} \sim \frac{1}{500}$ 。力学中把这类情况归入小变形(或无限小变形)问题。在这种背景下，可以把

研究工作分为两个阶段。第一阶段，忽略变形对物体形状和尺寸的影响，研究物体整体的平衡和运动，求得作用于物体的未知外力，这一阶段物体被抽象为刚体模型。这一阶段，忽略变形这一次要因素是一种简化，正是这种简化使我们找到了从物理角度研究力系等效的方法，并由此得到用矢量力学方法描述平衡问题的基本方程。第二阶段，研究物体的变形和内力分布随物体几何特征的不同，这一阶段物体被抽象为变形体，如细长的杆、薄的壳体以及三维块体，考虑其变形的力学特性将分别在后续的材料力学等课程中进行研究。

这里需要强调，刚体平衡是变形体平衡的基础，变形体平衡与刚体平衡两者之间既存在共性，也存在着不容忽视的差别，我们将随后详述这些内容。

1.3 力系平衡的几个公理

作用于同一研究对象上的一群力称为一个力系。地球对一物体的引力施加于该物体的每一点，是分布力，可看成一个力系。如果两个力系对物体作用效果相同，则称此两力系等效，这是静力学中要讨论的重点内容。如果一个力和一个力系等效，则称此力为该力系的合力。若力系中各力作用于物体的同一点，则称此力系为共点力系。需要明确的是，并非任何一个给定的力系都能够合成一个合力。

1.3.1 力的平行四边形公理

作用在物体上一点 A 的两个力 F_1 和 F_2 可以合成一个合力；合力的作用点仍为 A ，其大小和方向由以 F_1 和 F_2 为邻边所作平行四边形的对角线来确定(图 1-4)。

此公理是讨论力系合成与简化的物理基础。对它的全面理解包括：适用条件，合成结果，合力的大小、方向及作用点。从数学角度看，合力 F_R 的大小和方向是 F_1 、 F_2 的矢量和，即

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (1-3)$$

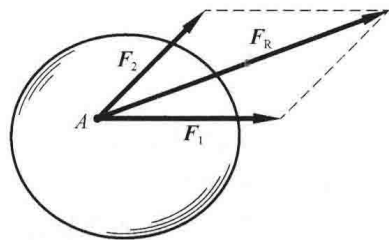


图 1-4

若先作出第一个矢量，再把第二个矢量的起点置于第一个矢量的终点，则从第一个矢量的起点指向第二个矢量终点的矢量即表示合力的大小和方向(图 1-5)，此法称为力的三角形方法。

反之，也可以把一个力按平行四边形法则进行分解，并用来表示待求的未知约束力或计算力的投影、力矩、功等。

平行四边形公理的应用(共点力系的合成及平衡)

给定作用于物体上的共点力系(F_1 , F_2 , F_3 , $\dots$, F_n)(图 1-6)，运用力的平行四边形公理求得 F_1 、 F_2 的合力，再求此合力与 F_3 的合力，以此类推，可得出以下结论：一个共点力

系可合成为一个合力；力系中各力的共同作用点为此合力的作用点，合力的大小、方向等于力系中各力矢量和，即

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i \quad (1-4)$$

力矢量求和可用几何方法完成，如图 1-7 所示，先作出代表 $\mathbf{F}_1$ 的矢量 $\overrightarrow{AA_1}$ ，再以 A_1 为起点作代表 $\mathbf{F}_2$ 的矢量 $\overrightarrow{A_1A_2}$ ，以此类推得到一组折线 $A_1A_2\cdots A_n$ ，称为力多边形，该方法称为力多边形方法。矢量 $\overrightarrow{AA_n}$ 称为力多边形的封闭边，代表了力系合力的大小及方向。

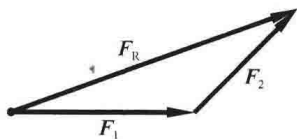


图 1-5

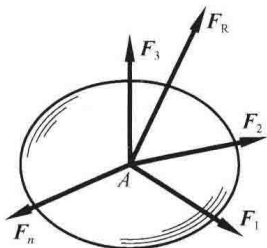


图 1-6

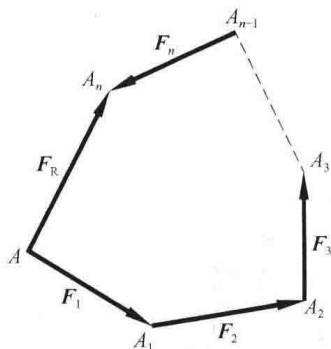


图 1-7

当力多边形为特殊的三角形、矩形、正方形、正多边形时，用几何法可方便地求得力系的合力大小和方向。若变动求和次序，则力多边形的形状也随之改变，但不影响最终的合成结果。

矢量求和也可用分析法，但需建立一个直角坐标系 $Oxyz$ ，将式 (1-4) 投影到 x 、 y 、 z 轴则得到

$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum F_x \\ F_{Ry} = \sum F_y \\ F_{Rz} = \sum F_z \end{cases} \quad (1-5)$$

即共点力系合力在某一轴上的投影等于力系中各力在同一轴上投影的代数和。为了简化，式中略去了下标 i 。

若一个力系施加在物体上不改变物体原有的运动状态，如使平衡的物体仍然保持平衡，则称此力系为平衡力系。共点力系平衡的充分必要条件是其合力为零，即

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (1-6)$$

以四个力为例，在几何方法中表现为力多边形的终点 A_4 与起点 A 重合，即共点力系平衡的几何条件是力多边形自行封闭 (图 1-8)。

把式 (1-6) 投影到 x 、 y 、 z 轴，即可得到共点力系平衡的分析条件为

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

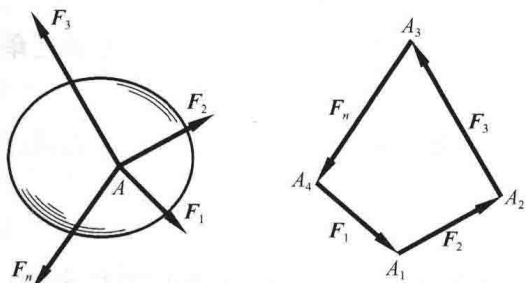


图 1-8