必刷题

高远 / 主编

考研数学真题录

（数学三）

- 在这里读懂真题
- 刷题就得刷真题

⊙ 从不变中总结规律

⊙ 在变化中把握趋势

⊙ 从真题中梳理重点

⊙ 在精练中突破难点

清华大学出版社

高 远 / 主编

宋东哲 金今姬 毛书欣 孙旭阳 / 编

考研数学真题录

（数学三）

清华大学出版社

北京

内容简介

《考研数学真题录(数学三)》由深谙命题原则和规律,每年参加阅卷的教师编写,全书内容分为两部分,第一部分对历年真题按章分类进行归纳总结;第二部分是对真题的详细解答,客观题解答主要采用简单易行的方法,解答题主要采用的是阅卷评分时的评分标准答案.

本书题量恰当,解答简洁规范,能够帮助考生复习数学大纲所要求的所有考点,并能够明确重点,突破难点,掌握解题的主要方法,提高解题能力.

本书是在编者原有资料基础上修订而成,在辅导实践中连续使用多年,曾帮助很多考生获得了较高的成绩,考生复习基础知识点后即可使用.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题录. 数学三/高远主编. —北京:清华大学出版社,2018
ISBN 978-7-302-47786-0

Ⅰ. ①考…　Ⅱ. ①高…　Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168525 号

责任编辑:佟丽霞
封面设计:傅瑞学
责任校对:赵丽敏
责任印制:董　瑾

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:三河市少明印务有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　张**:21.5　　**字　　数**:616 千字
版　　次:2018 年 6 月第 1 版　　**印　　次**:2018 年 6 月第 1 次印刷
印　　数:1～2000
定　　价:59.90 元

产品编号:072210-01

前　　言

《考研数学真题录(数学三)》是为准备参加全国硕士研究生招生考试的同学量身定做的学习资料,与《全国硕士研究生招生考试辅导教材——数学》(清华大学出版社)、《考研数学基础解析120讲》、《考研数学考试大纲解析》、《考研数学考试大纲配套600题》和《考研数学真题录(数学一、数学二)修订版》(清华大学出版社)构成了完整的教材辅导体系.

为什么真题是"必刷题",就是因为它能覆盖全部考点,又最能体现命题的角度,所以将1987年至今的考题按照大纲分章进行归类解析.

这本真题录与众不同,主要体现在以下几个方面:

1. 内容规范,形式统一

由于多方面的原因,不同年份的真题在叙述上、数学符号和字母的使用上存在差别,所以本书除了将历年真题分章归类外,按照目前命题的特点和习惯对数学符号和字母进行了统一,方便读者使用.

2. 考点覆盖全面,题量适中

在复习的过程中,要想掌握数学方法,就需要演练一定量的习题,刷什么题合适?刷多少题合适,30多年的真题完整地体现了考试大纲所规定的考试内容,诠释了考试的基本要求,所以能覆盖所有的考点并能够体现考试要求的必备资料,非真题莫属.与此同时,删减了反复考查的过多雷同的题型,尽量减少考生的负担.

3. 命题特点突出

模拟题是对真题的模仿,无法做到在难度、命题特点上与真题最贴切,所以练习真题会取得更好的复习效果.

4. 解答简洁明晰,实践检验效果好

书中真题多数解答过程采用的是阅卷评分时的标准解答过程,从而使读者在练习过程中养成规范解答的习惯,善于抓住采分点.同时通过对近几年经我们辅导的考生的情况来看,完成这本习题的同学多数都取得了较好的成绩.

编写本书的几位老师均具有多年的阅卷经验,熟悉采分点和考生易犯的错误,在成书过程中交叉互审稿件,反复讨论,方成此书,全书最后由高远教授审阅定稿.需要特别指出,在本书的成书过程中参考和引用了很多同类资料,向作者们借鉴成熟的经验,向专家们汲取宝贵的智慧,在此不一一列出,谨向他们表示诚挚的谢意.

感谢清华大学出版社的大力支持,感谢读者朋友的信任,选择了我们编写的这套资料,希望读者尽快进入书中真题的演练过程.

限于水平,书中的疏漏和不妥,恳请读者不吝赐教.

编　者

2018年3月

目 录

科目一 微 积 分

科目二 线性代数

科目三 概率论与数理统计

科目一微积分参考答案

科目二线性代数参考答案

科目三概率论与数理统计参考答案

科目一　微　积　分

第一章　函数、极限与连续

一、选择题

1.（1987 年）　函数在其定义域内连续的是（　　）.

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$　　(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

2.（1989 年）　设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，（　　）.

(A) $f(x)$与 x 是等价无穷小量　　(B) $f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$是比 x 较高阶的无穷小量　　(D) $f(x)$是比 x 较低阶的无穷小量

3.（1990 年）　设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$是（　　）.

(A) 偶函数　　(B) 无界函数　　(C) 周期函数　　(D) 单调函数

4.（1991 年）　下列各式中正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

5.（1991 年）　设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$时，x_n 是（　　）.

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量　　(C) 有界变量　　(D) 无界变量

6.（1992 年）　当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量（　　）.

(A) x^2　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

7.（1998 年）　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$的间断点，其结论为（　　）.

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

8.（2000 年）　设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（　　）.

(A) 存在且一定等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

9. (2004 年) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界( ).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

10. (2004 年) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,又设函数

$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则( ).

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

11. (2007 年) 当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是( ).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

12. (2008 年) 设 $0<a<b$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$( ).

(A) a　　(B) a^{-1}　　(C) b　　(D) b^{-1}

13. (2009 年) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为( ).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

14. (2009 年) 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则( ).

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

15. (2010 年) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 a 等于( ).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

16. (2010 年) 设 $f(x)=(\ln x)^{10}$,$g(x)=x$,$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时,有( ).

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

17. (2011 年) 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则( ).

(A) $k=1,c=4$　　(B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$　　(D) $k=3,c=-4$

18. (2013 年) 当 $x\to 0$ 时,用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是( ).

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

19.（2013 年）　设函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\cdot\ln|x|}$，则 $f(x)$ 可去间断点的个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

20.（2014 年）　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq0$，则当 n 充分大时，有（　　）.

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

21.（2014 年）　设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则当 $x\to0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）.

(A) $a=0$　　(B) $b=1$　　(C) $c=0$　　(D) $d=\dfrac{1}{6}$

22.（2015 年）　设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是（　　）.

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$　　(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}{}_n=a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$　　(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

二、填空题

23.（1992 年）　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$__________，定义域为__________.

24.（1993 年）　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$__________.

25.（1993 年）　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$__________.

26.（1999 年）　设函数 $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$

__________.

27.（2000 年）　若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$__________.

28.（2002 年）　设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$__________.

29.（2003 年）　极限 $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$__________.

30.（2004 年）　若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$__________，$b=$__________.

31.（2005 年）　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$__________.

32.（2006 年）　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$__________.

33.（2007 年）　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$__________.

34.（2008 年）　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$

__________.

35.(2009 年) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$__________.

36.(2012 年) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$__________.

37.(2013 年) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点(1,0)处有公共切线,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$__________.

38.(2015 年) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$__________.

39.(2016 年) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$__________.

40.(2016 年) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$__________.

三、解答题

41.(1987 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$.

42.(1988 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

43.(1988 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

44.(1989 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

45.(1989 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

46.(1991 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数.

47.(1991 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

48.(1992 年) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & 若\ x\neq 1,\\ 1, & 若\ x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改函数在 $x=1$ 处的定义,使之连续.

49.(1994 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

50.(1997 年) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq 0)$.

51.(1998 年) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$($n$ 为自然数).

52.(2001 年) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

53. (2003 年)　设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$. 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

54. (2004 年)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

55. (2005 年)　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

56. (2008 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

57. (2010 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

58. (2011 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

59. (2012 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

60. (2013 年)　当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

61. (2014 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x\left(t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

62. (2015 年)　设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 求 a,b,k 的值.

63. (2016 年)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

第二章　导数与微分

一、选择题

1.（1987 年）　若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，x_1 和 x_2 是区间 (a,b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使（　　）.

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$

2.（1990 年）　设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导　　(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$　　(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

3.（1993 年）　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

4.（1996 年）　设 $f(x)$ 处处可导，则（　　）.

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

5.（2000 年）　设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是（　　）.

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

6.（2002 年）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则（　　）.

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

7.（2003 年）　设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）.

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x=0$

8. (2003 年)　设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

9. (2004 年)　设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,则下列结论中错误的是(　　).

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(a)$

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$

10. (2006 年)　设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　).

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

11. (2006 年)　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$,则(　　).

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

12. (2007 年)　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

13. (2011 年)　已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　　).

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$　　(C) $f'(0)$　　(D) 0

14. (2012 年)　设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　　).

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

15. (2014 年)　设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在 $[0,1]$ 上(　　).

(A) 当 $f'(x)\geqslant0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　　(B) 当 $f'(x)\geqslant0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

(C) 当 $f''(x)\geqslant0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$　　(D) 当 $f''(x)\geqslant0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$

二、填空题

16.(1990 年) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$______.

17.(1992 年) 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$______.

18.(1993 年) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______.

19.(1994 年) 已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$______.

20.(1994 年) 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

21.(1995 年) 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$______.

22.(1996 年) 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$______.

23.(1996 年) 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $y'''|_{x=\sqrt{3}}=$______.

24.(1997 年) 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y=$______.

25.(2003 年) 设 $f(x)=\begin{cases}x^\lambda\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是______.

26.(2004 年) 设 $y=\arctan \mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$______.

27.(2006 年) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$______.

28.(2007 年) 设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$______.

29.(2011 年) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$______.

30.(2012 年) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$______.

三、解答题

31.(1987 年) 设 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$，求 y'.

32.(1988 年) 确定常数 a 和 b，使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 处处可导.

33.(1990 年) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少，$f(0)=0$，试应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b),$$

其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

34.（1992 年）　求证：方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$.

35.（1993 年）　假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$，$B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

36.（1995 年）　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

37.（1996 年）　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$；(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

38.（1998 年）　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\cdot\mathrm{e}^{-\eta}$.

39.（1998 年）　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

40.（1999 年）　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$f(0)=f(1)=0,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

试证：(1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

41.（2003 年）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

42.（2007 年）　设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$. 证明：

(1) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$；(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

43.（2009 年）　(1) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

44.（2010 年）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

证明：(1) 存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；(2) 存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

45. (2013 年)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. 证明：

(1) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；(2) 对(1)中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$.

46. (2015 年)　(1) 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

(2) 设函数 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

第三章　导数的应用

一、选择题

1.（1994 年）　曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有(　　).

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

2.（1996 年）　设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是(　　).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3.（1997 年）　若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有(　　).

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$

4.（1998 年）　设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的斜率为(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

5.（2001 年）　设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则(　　).

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

6.（2003 年）　曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$(　　).

(A) 仅有水平渐近线　　(B) 仅有铅直渐近线

(C) 既有铅直又有水平渐近线　　(D) 既有铅直又有斜渐近线

7.（2004 年）　设 $f(x)=|x(1-x)|$，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

8.（2005 年）　当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.(　　)

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

9.（2005 年）　设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是(　　).

(A) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　(B) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值