

➤ 高等学校应用型本科“十三五”规划教材



理论力学

➤ 主 编 刘汉义

高等学校应用型本科“十三五”规划教材

理论力学

主编 刘汉义

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书以矢量算法、物理课程的力学知识为基础,介绍理论力学中静力学、运动学和动力学的基本内容,以较多、较详细的例题分析,通过一题多解,加深读者对基本概念、公式的理解和掌握,适用于高等院校中少学时理论力学课程教学。

全书分为7章,包括先修课程基本知识摘要、刚体的平面运动、点的复合运动、几何静力学、分析静力学、刚体的平动与转动定理以及刚体的动量和动能定理。

本书可作为高等院校机械、土建、水利和力学等专业的理论力学课程教材,也可作为有关技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/刘汉义主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2018.5

ISBN 978-7-5606-4879-8

I. ① 理… II. ① 刘… III. ① 理论力学 IV. ① O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 068390 号

策划编辑 秦志峰

责任编辑 张 玮

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2018年5月第1版 2018年5月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 19

字 数 450千字

印 数 1~2000

定 价 45.00元

ISBN 978-7-5606-4879-8/O

XDUP 5181001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

西安电子科技大学出版社
高等学校应用型本科“十三五”规划教材

编审专家委员会名单

主 任：鲍吉龙(宁波工程学院副院长、教授)

副主任：张国云(湖南理工学院副院长、教授)

张晓东(皖西学院机电学院院长/教授)

彭 军(重庆科技学院电气与信息工程学院院长、教授)

刘黎明(南阳理工学院软件学院院长、教授)

庞兴华(南阳理工学院机械与汽车工程学院副院长、教授)

机电组

组 长：庞兴华(兼)

成 员：(成员按姓氏笔画排列)

丁又青(重庆科技学院机械与动力工程学院副院长、教授)

王志奎(南阳理工学院机械与汽车工程学院副院长、教授)

刘振全(天津科技大学电子信息与自动化学院副院长、副教授)

何高法(重庆科技学院机械与动力工程学院院长助理、教授)

胡文金(重庆科技学院电气与信息工程学院系主任、教授)

电子与通信组

组 长：张国云(兼)

彭 军(兼)

成 员：(成员按姓氏笔画排列)

王天宝(成都信息工程学院通信学院院长、教授)

朱清慧(南阳理工学院电子与电气工程学院院长、教授)

安 鹏(宁波工程学院电子与信息工程学院副院长、副教授)

杨光松(集美大学信息工程学院副院长、教授)

苏世栋(山西运城学院物理与电子工程系副主任、副教授)

沈汉鑫(厦门理工学院光电与通信工程学院副院长、副教授)

钮王杰(运城学院机电工程系副主任、副教授)

唐德东(重庆科技学院电气与信息工程学院副院长、教授)

谢 东(重庆科技学院电气与信息工程学院自动化系主任、教授)

湛腾西(湖南理工学院信息与通信工程学院教授)

楼建明(宁波工程学院电子与信息工程学院副院长、副教授)

计算机大组

组 长: 刘黎明(兼)

成 员: (成员按姓氏笔画排列)

毕如田(山西农业大学资源环境学院副院长、教授)

向 毅(重庆科技学院电气与信息工程学院院长助理、教授)

刘克成(南阳理工学院计算机学院院长、教授)

李富忠(山西农业大学软件学院院长、教授)

何明星(西华大学数学与计算机学院院长、教授)

张晓民(南阳理工学院软件学院副院长、副教授)

范剑波(宁波工程学院理学院副院长、教授)

赵润林(山西运城学院计算机科学与技术系副主任、副教授)

黑新宏(西安理工大学计算机学院副院长、教授)

雷 亮(重庆科技学院电气与信息工程学院计算机系主任、副教授)

前言

本书是根据 2004 年厦门理工学院升本以来机械与汽车工程学院“理论力学”教学资料 and 教学实践编写的,其内容涵盖了静力学、运动学和动力学的主要内容,适用于高等院校中少学时理论力学课程教学。

根据我国高等教育改革的形势和实际教学需求,从 2002 年秋季学期开始,全国普通高等学校新一轮培养计划进入实施阶段,其特点是:加强素质教育、培养创新精神。在此背景下,“理论力学”课程教学时数大幅度减少,学生自主学习空间进一步增大,因此,怎样用较少的课时讲授“理论力学”的基本内容又不降低课程的基本要求,成为力学教学者共同关心的问题。

2004 年秋季,厦门理工学院机械与汽车工程学院的第一届本科生开始学习“理论力学”,所用教材为哈尔滨工业大学理论力学教研室编写的《理论力学》。教学过程中,编者发现学生虽然了解理论力学的基本概念,但一开始做题,又不知如何下手。为了解决这一问题,编者本着“有所为、有所不为”的原则编写了本书,根据新教学大纲调整了部分内容,按教学进度进行了归整。希望本书有助于学生提高应用基本概念和基本方法分析和解决问题的能力,加深对基本内容的理解和掌握,帮助学生解决实际工程问题,并为学生今后向其他学科或其他工程领域拓展打好基础。

为了让学生尽快掌握力学的基本知识,本书第 1 章先复习矢量概念,接着介绍质点运动学、刚体的转动、牛顿定律和转动定律、动量(矩)和动能,并引用了大量的物理例题。学生可通过第 1 章的学习,复习并进一步理解此前学过的物理力学知识。

第 2 章刚体的平面运动,通过物理学的运动学知识,引出刚体平面运动的相关内容,由浅入深介绍刚体平面运动的解题技巧,通过大量例题加强学生的工程概念,提高其解决实际问题的能力。

第 3 章点的复合运动,在解决刚体平面运动问题的基础上,介绍点的复合运动的相关内容,用刚体平面运动的解题技巧求解点的复合运动问题,可收到事半功倍的效果。

第4章几何静力学,在物理学牛顿定律和转动定律的基础上,结合刚体平面运动,引入合力、力偶和等效力系的概念及受力分析方法,通过例题的一题多解等教学方法,巩固学生的力学知识。

第5章分析静力学,通过约束的定义及物理学功能原理,介绍分析静力学在工程上的应用。

第6章刚体的平动和转动定理,在物理学牛顿第二定律及转动定律的基础上,介绍了用牛顿第二定律和绕质心的转动定律研究刚体运动与其所受力之间的关系。

第7章刚体的动量和动能定理,应用动量定理、动量矩定理和动能定理,继续研究刚体平面运动与其所受力之间的关系,从不同侧面研究刚体运动与力系的关系,求解刚体平面运动及碰撞等动力学问题,通过例题引导学生运用上述概念和方法解决实际问题。

编 者

2017年10月

目 录

第 1 章 先修课程基本知识摘要	1
1.1 矢量算法	1
1.2 质点运动学	5
1.3 刚体的转动	20
1.4 牛顿定律	28
1.5 转动定律	33
1.6 动量	37
1.7 动能	40
1.8 动量矩	43
1.9 小结	54
习题	55
第 2 章 刚体的平面运动	64
2.1 刚体平面运动的运动方程	64
2.2 刚体平面运动的速度	65
2.3 刚体平面运动的加速度	68
习题	93
第 3 章 点的复合运动	103
3.1 点的复合运动的基本概念	103
3.2 点的速度合成定理	104
3.3 点的加速度合成定理	106
习题	123
第 4 章 几何静力学	132
4.1 静力学基本概念	132
4.2 力系的简化	136
4.3 受力分析与刚体平衡	142
4.4 平面力系的平衡方程	154
4.5 考虑摩擦的平衡问题	160
习题	174
第 5 章 分析静力学	192
5.1 约束及其分类	192

5.2 虚位移 193

5.3 虚功 195

5.4 广义坐标形式的虚功 197

5.5 势力场中的平衡方程 198

习题..... 215

第 6 章 刚体的平动与转动定理 218

6.1 刚体的运动微分方程 218

6.2 刚体的定轴转动微分方程 223

习题..... 231

第 7 章 刚体的动量和动能定理 236

7.1 质点与质点系的动量定理 236

7.2 质点和质点系的动量矩定理 238

7.3 刚体平面运动的动量和动量矩定理 240

7.4 功能原理 254

7.5 碰撞 272

习题..... 285

参考文献 296

第1章 先修课程基本知识摘要

为了后面章节的顺利学习，本章罗列了之前已经学过的基本知识，包括矢量算法、物理课程的力学知识，并引用了物理教材中的一些典型例题。

1.1 矢量算法

1.1.1 矢量概念

只有大小的量称为标量(也称为数量或纯量)。例如温度、时间、质量、面积、能量等都是标量。

具有大小和方向的量称为矢量(也称为向量)。例如力、速度、力矩、加速度、角速度、角加速度、动量等都是矢量。在图上用有向线段(或称为有向直线)表示矢量，在文本中用加黑字母表示(如图1-1所示 $\boldsymbol{P}$)。矢量按效能可分为下列三种类型：

- (1) 自由矢量：具有大小和方向而无特定位置的矢量，例如力偶。
- (2) 滑动矢量：沿直线作用的矢量，例如作用于刚体的力。
- (3) 束缚矢量：作用于一点的矢量，例如作用于质点的力。

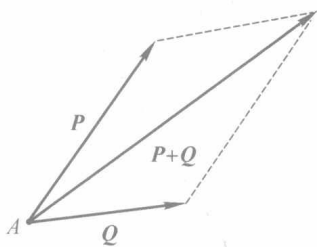


图1-1 矢量的加法

除特别说明外，这里所指的矢量都指的是自由矢量，也就是说，所有方向相同、长度相等的矢量，不管始点如何，都看做相同的矢量。

模等于1的矢量称为单位矢量。

1.1.2 矢量的加法

把矢量的始点移到点A，以 $\boldsymbol{P}$ 、 $\boldsymbol{Q}$ 为边作平行四边形，如图1-1所示，由A点画出的对角线就表示和矢量，即 $\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ (称为平行四边形法则)。

1.1.3 矢量的分解

在许多情况下，需将矢量分解成垂直的两个分量。如图1-2所示，力 $\boldsymbol{F}$ 被分解成沿 x

方向的分量 F_x 和沿 y 方向的分量 F_y 。分量 F_x 和分量 F_y 相互垂直，分别为水平方向和垂直方向，如图 1-2(a)所示。如果有特殊需要，也可选取如图 1-2(b)所示的其他方向。

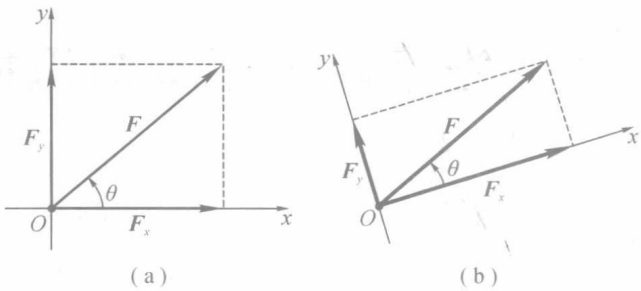


图 1-2 矢量的垂直分解

沿 x 、 y 和 z 方向的单位矢量用 i 、 j 和 k 表示，如图 1-3 所示。矢量 F 可以表示成

$$F = F_x i + F_y j + F_z k = F(\cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k) \tag{1.1}$$

而力 F 方向的单位矢量用 λ 表示，满足如下关系：

$$\lambda = \cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k \tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)的大小和方向如图 1-4 所示。

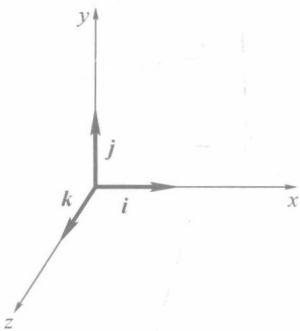


图 1-3 单位矢量

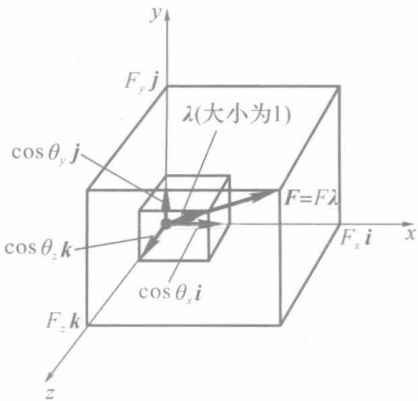


图 1-4 空间矢量的分解

1.1.4 矢量的标量积(数量积、点积、内积)

矢量的标量积(如图 1-5 所示)可记作

$$P \cdot Q = PQ \cos\theta \tag{1.3}$$

根据同样的定义，单位矢量的标量积为

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1 \\ i \cdot j &= 0, \quad j \cdot k = 0, \quad k \cdot i = 0 \end{aligned}$$

因此，矢量 P 、 Q 的标量积可以写成

$$P \cdot Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot (Q_x i + Q_y j + Q_z k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{1.4}$$

由式(1.3)和式(1.4)可得矢量的夹角为

$$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

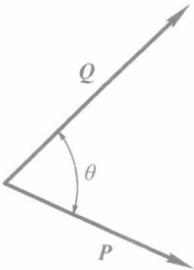


图 1-5 矢量的标量积

1.1.5 矢量积(叉积、外积)

矢量的矢量积定义为 $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, 其大小为 $V = PQ \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, 方向如图 1-6 所示。

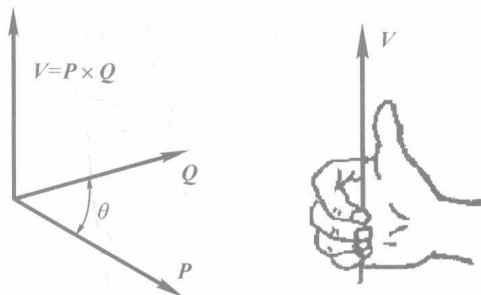


图 1-6 矢量的矢量积

因此, 如图 1-7 所示, 单位矢量的矢量积为

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

由此, 可得在直角坐标系下的矢量积为

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

根据图 1-8 所示, 易于求出 $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ 的上述结果。

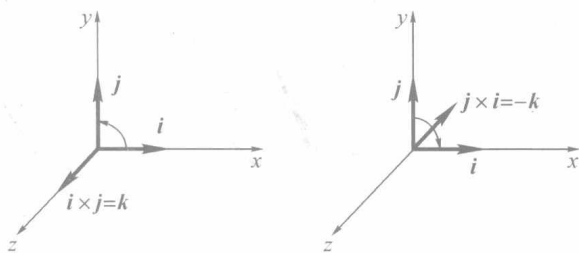


图 1-7 单位矢量的矢量积

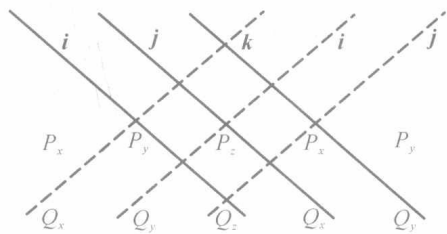


图 1-8 矢量积示意图

1.1.6 三个矢量的混合积

三个矢量的混合积定义为

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (1.6)$$

根据式(1.5), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z \\ &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

例 1-1 矢量如图 1-9 所示, 求 AB 和 BG 方向的单位矢量。

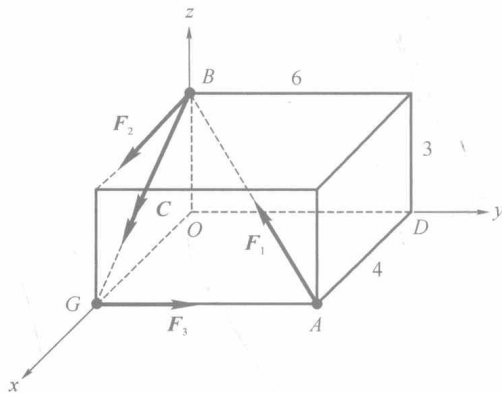


图 1-9 例 1-1 矢量图

解 根据单位矢量的定义, 有

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \frac{-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{61}}$$
$$\lambda_{BG} = \frac{\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BG}|} = \frac{4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}}{5}$$

例 1-2 如图 1-10(a)、(b)所示, 求力 P 对 A 点的力矩和对 AG 线的力矩。

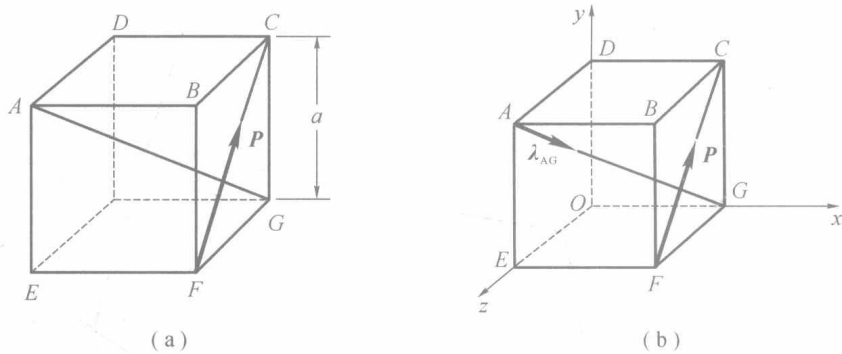


图 1-10 例 1-2 受力图

解 先写出 AF 的位置矢量式 $\mathbf{r}_{FA} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j}$ 和力 P 的分解式 $\mathbf{P} = \frac{P}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{P}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ 。

根据力矩的定义 $\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{FA} \times \mathbf{P}$, 可得

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{FA} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{aP}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{aP}{\sqrt{2}}\mathbf{k} + \frac{aP}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = \frac{aP}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

写出 AG 方向的单位矢量:

$$\lambda_{AG} = \frac{\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{AG}|} = \frac{ai - aj - ak}{a\sqrt{3}} = \frac{i - j - k}{\sqrt{3}}$$

根据式(1.6)混合积定义,有

$$\begin{aligned} M_{AG} &= \lambda_{AG} \cdot M_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(i - j - k) \cdot \frac{aP}{\sqrt{2}}(i + j + k) \\ &= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1) = \frac{-aP}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

1.2 质点运动学

1.2.1 直角坐标下的质点运动

参考系:自然界中没有不运动的物体,描述物体的运动总是要选取其他物体作为标准,选取的标准物不同,对物体运动情况的描述也不同。被选为描述物体运动的标准物叫做参考系。

质点:研究物体的运动时,可以忽略物体的大小和形状,或只考虑其平动,那么就可以把物体当作是一个有一定质量的点,这样的点通常叫做质点。

位置矢量(矢量法):在选定参考系后,为定量描述物体的位置和位置随时间的变化,必须在参考系上选择一个坐标系。在如图 1-11 所示的直角坐标系上, t 时刻 P 点的位置矢量用

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.7)$$

表示,简称矢径。其随时间变化的规律称为运动方程,如图 1-12 所示。

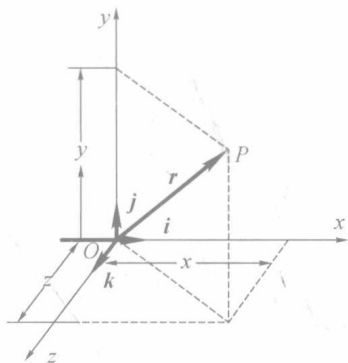


图 1-11 位置矢量

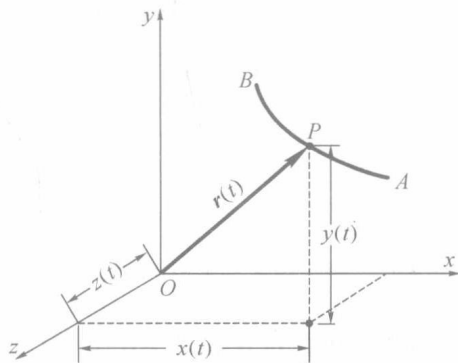


图 1-12 运动方程

速度:矢径对时间的一阶导数,也称速度矢,即

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1.8)$$

加速度:速度矢对时间的一阶导数,或矢径对时间的二阶导数,即

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad (1.9)$$

1.2.2 极坐标下的质点运动

如图 1-13 所示, 极坐标下 A 点的运动方程为

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t) \mathbf{e}_\rho(t) \quad (1.10)$$

图中, 矢量 $\mathbf{e}_\rho(t)$ 为沿矢量 $\mathbf{r}(t)$ 方向的单位矢量; 矢量 $\mathbf{e}_\varphi(t)$ 为垂直于 $\mathbf{e}_\rho(t)$ 且与转角 φ 方向相同的单位矢量。

由图 1-13 可得直角坐标下单位矢量的关系式:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j} \end{cases} \quad (1.11)$$

对式(1.11)微分, 可得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = -\dot{\varphi} \sin\varphi \mathbf{i} + \dot{\varphi} \cos\varphi \mathbf{j} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos\varphi \mathbf{i} - \dot{\varphi} \sin\varphi \mathbf{j} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho \end{cases} \quad (1.12)$$

对式(1.10)微分并对比式(1.12), 得

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1.13)$$

图中, $v_\rho = \dot{\rho}$ 和 $v_\varphi = \rho \dot{\varphi}$ 分别为径向速度和横向速度。

对式(1.13)微分并对比式(1.12), 得

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \quad (1.14)$$

令 $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$ 和 $a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi})$ 分别为径向加速度和横向加速度。

极坐标下的速度和加速度如图 1-14 和图 1-15 所示。注意图示单位矢量方向均为正方向。

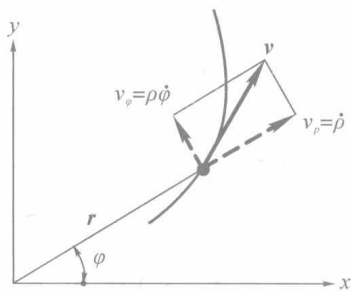


图 1-14 极坐标下的速度

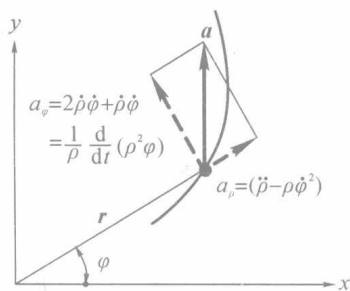


图 1-15 极坐标下的加速度

1.2.3 曲线坐标(自然法)下的质点运动

在实际运动中, 存在大量的曲线运动, 如抛体运动和圆周运动, 其运动轨迹均已知为 $s=s(t)$ 。曲线运动可用曲线坐标描述。

如图 1-16 所示, 运动方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[s(t)] \quad (1.15)$$

对式(1.15)进行微分得速度表达式:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \boldsymbol{\tau}(s) \quad (1.16)$$

式中, $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}(s)$ 为曲线的切向单位矢量, 用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示; $\frac{ds}{dt} = \dot{s}$ 为切向速度, 如图 1-17 所示。表明质点进行曲线运动时, 在某点的速度方向就是该点沿曲线的曲线方向。

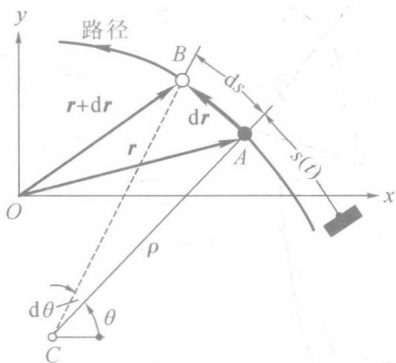


图 1-16 曲线坐标

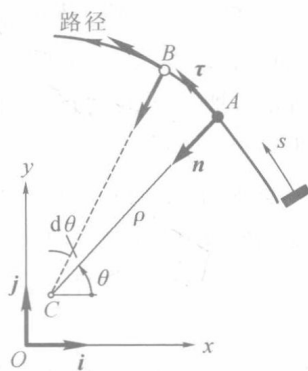


图 1-17 切向单位矢量

根据数学知识 $|dr| = ds = \rho d\theta$ (其中 ρ 为曲率半径), 则式(1.16)切向方向速度为

$$v = \dot{s} = \rho \dot{\theta} = \rho \omega$$

由数学知识可得曲率半径为

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

根据图 1-18 所示, 曲线的切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 及指向曲率中心的向心单位矢量 $\mathbf{n}$ 的关系式为

$$\boldsymbol{\tau} = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = -\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j} \quad (1.17)$$

因为直角坐标单位矢量方向不变, 所以 $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0$, 由式

(1.17)微分, 可得

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = (-\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j})\dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = (\sin\theta \mathbf{i} - \cos\theta \mathbf{j})\dot{\theta} = -\dot{\theta} \boldsymbol{\tau} \quad (1.18)$$

将式(1.16)微分并结合式(1.18), 得

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} + v\dot{\theta}\mathbf{n} = a_{\tau}\boldsymbol{\tau} + a_n\mathbf{n} \quad (1.19)$$

即质点进行曲线运动的加速度, 既反映了方向的变化, 又反映了速度大小的变化。式中:

$$a_n = v\dot{\theta} = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 = \rho\omega^2, \quad a_{\tau} = \dot{v} = \ddot{s} \quad (1.20)$$

在式(1.20)中, a_n 为法向加速度, 是由速度方向变化而产生的加速度; a_{τ} 为切向加速度, 是由速度大小变化而产生的加速度。

式(1.18)中, 切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的微分还可根据图 1-19 所示, 得

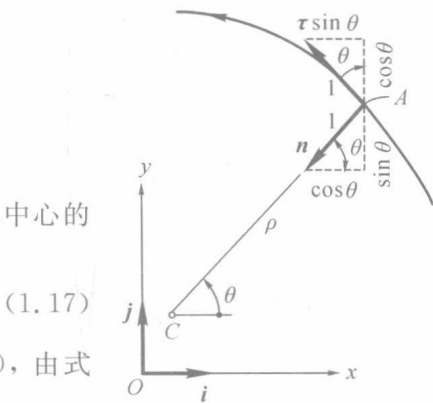
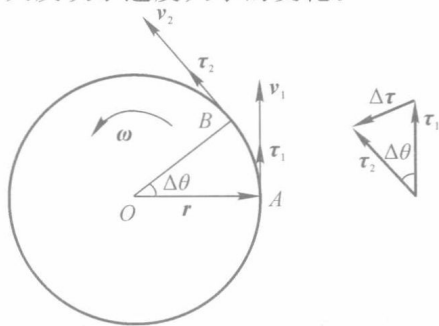


图 1-18 微分关系式

图 1-19 切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 的微分

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n} = \frac{v}{\rho} \mathbf{n}$$

角位移 $d\theta(t)$: 质点 P 在 dt 时间内转过的角度。

角速度 ω : 角坐标 $\theta(t)$ 随时间的变化率, 即 $\omega = d\theta(t)/dt$ 。
角速度的方向由角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 来表示, 可用右手法则确定: 如图 1-20 所示, 把右手的拇指伸直, 其余四指弯曲, 使弯曲的方向与角坐标 $\theta(t)$ 的转动方向一致, 这时拇指所指的方向就是角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向。因此, 在右手坐标系下, 平面角坐标 $\theta(t)$ 的正向转动方向为逆时针, 则其矢量方向垂直指向纸外。此时, 速度与角速度的关系为 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 如图 1-19 所示。

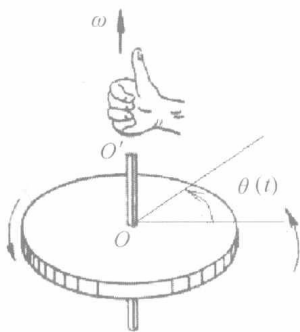


图 1-20 角速度矢量

角加速度 α : 角速度 $\omega(t)$ 随时间的变化率, 即 $\alpha = d\omega(t)/dt$ 。切向加速度与角加速度的关系为 $\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ 。

例 1-3 设质点的运动方程, 即位置矢量为 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, 其中 $x(t) = 1t + 2$, $y(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2$ 。(1) 求 $t = 3$ s 时的速度; (2) 作出质点的运动轨迹图。

解 (1) 对运动方程一阶求导, 得

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} = 1\mathbf{i} + \frac{1}{2}t\mathbf{j}$$

$t = 3$ s 时, 得

$$\mathbf{v}(3) = 1\mathbf{i} + \frac{1}{2} \times 3\mathbf{j} = 1\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j}$$

(2) 由运动方程

$$x(t) = 1t + 2, \quad y(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2$$

消去 t 可得轨迹方程

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$

质点运动轨迹图如图 1-21 所示。

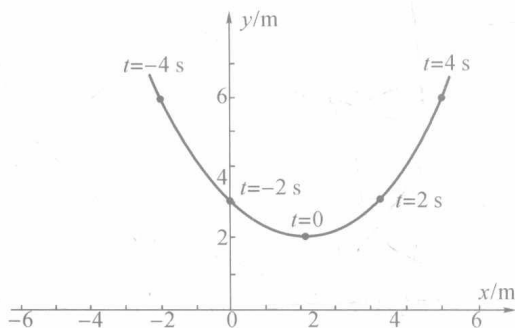


图 1-21 例 1-3 图

例 1-4 如图 1-22 所示, A 、 B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连, A 、 B 两物体可在光滑轨道上滑行。刚性细杆和垂直轨道的夹角 $\alpha(t)$ 是时间的已知函数, 求杆上 M 点的运