普通高等院校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

杨禾花 黄笑娟 主编

中国工信出版集团 電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等院校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

杨禾花　黄笑娟　主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是根据高等院校概率论与数理统计课程的教学大纲以及考研大纲编写而成的，系统地介绍了概率论与数理统计的基本概念、理论及方法。

本书主要内容包括：随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验，共 8 章。每章均配有大量的典型例题、习题与总复习题，书后附有习题答案及常用资料，既便于教学，又有利于复习考试之用。

本书可作为高等院校经管类专业和理工类专业的教材或教学参考书，也可作为各类相关专业人员及爱好者阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 杨禾花，黄笑娟主编. —北京：电子工业出版社，2018.5
ISBN 978-7-121-34130-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①杨… ②黄… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 087099 号

策划编辑：祁玉芹
责任编辑：张瑞喜
印　　刷：中国电影出版社印刷厂
装　　订：中国电影出版社印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：15.5　字数：339 千字
版　　次：2018 年 5 月第 1 版
印　　次：2018 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）68253127。

前言

PREFACE

本书是高等院校理工类、经管类专业非常重要的一门必修基础课程。

概率论与数理统计是研究与探索不确定性现象的数量规律的一门数学学科，概率统计的理论与方法的应用十分广泛，几乎遍及所有科学技术领域和国民经济的各个方面。通过对本课程的学习，使读者掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本思想方法，初步掌握处理随机现象的基本思想与方法，培养读者运用这些思想方法去分析和解决实际问题的能力。本课程不仅是读者学习后续课程的基础，而且对读者综合能力的培养、提高数学素养和科研创新能力等方面都有着重要的作用。

本书内容主要分为概率论和数理统计两部分，其中概率论部分是从数量关系的角度研究随机现象的规律性，并为数理统计部分提供坚实的理论基础；数理统计部分是从理论与实际相结合的角度研究随机现象的统计规律性，它以概率论为理论基础，根据试验或观察得到的数据来研究随机现象，并对这些现象的客观规律性作出合理的估计与判断。

本书是根据课程教学大纲和考研大纲的要求编写而成的，在编写过程中，除了依据我们在长期教学和科研中积累的经验外，还参考了国内外许多相关资料，在此向相关资料的作者表示衷心的感谢！本书第 1～5 章由杨禾花编写，第 6～8 章由黄笑娟编写。全书最后由杨禾花负责统稿完成。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

2018 年 1 月

目录

CONTENTS

第 1 章　随机事件及其概率

在现实世界中，存在着各种各样的现象，但从概率的观点来看，大体可分为两种：确定性现象和随机现象。所谓确定性现象是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象。例如，向上抛一石头必然要下落；再如，在标准大气压下，水加热到100°C时必然会沸腾，等等。所谓随机现象是指在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且在试验或观察之前不能预知确切的结果。例如，在相同条件下，向上抛一枚硬币，其结果可能正面朝上，也可能反面朝上，且每次抛之前并不知道会出现哪个结果；再如，打靶射击时，每次弹着点的位置是不确定的，且事先不能预测的，等等。

概率论与数理统计就是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其规律性的一门应用数学学科。

1.1　随机事件

一、随机试验与样本空间

对随机现象进行一次观测，我们称为一个随机试验。它具有下列 3 个特点：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的结果不止一个，但所有结果在事先都明确可知；

（3）每次试验之前无法预料哪个结果会出现。

为研究方便，我们通常将随机试验用字母E表示，下面举例说明。

例 1.1　下列试验都是随机试验。

E_1:掷一枚骰子，观察朝上的那一面的点数；

E_2:将一枚硬币连抛两次，观察正面H、反面T出现的情况；

E_3:射击某一目标，直至击中为止，观察射击的次数；

E_4:在n件产品中，观察其正品的件数；

E_5:从一批同型号的灯泡中，任取一只，观测其寿命。

我们将随机试验中每一个可能的结果称为一个样本点（或基本事件），并用小写希腊字母ω表示。将样本点的全体称为样本空间，记为Ω，于是样本点ω就是样本空间Ω的一个元素，即有$\Omega=\{\omega\}$。

在例 1.1 中，这五个随机试验所对应的样本空间分别是：

$\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，其中 ω_i 分别表示“朝上那一面的点数为 i”，且 $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$；

$\Omega_2=\{HH, HT, TH, TT\}$；

$\Omega_3=\{1, 2, 3,\cdots\}$；

$\Omega_4=\{0,1, 2, 3,\cdots,n\}$；

$\Omega_5=\{t|t\geqslant 0\}$。

通常样本空间有如下 3 种类型：

（1）有限集合：样本空间中样本点的个数是有限的，如 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4$；

（2）无限可列集合：样本空间中样本点的个数是无限的，但可列出，如 Ω_3；

（3）无限不可列集合：样本空间中样本点的个数是无限的，且不可列出，如 Ω_5。

二、随机事件

一般地，我们将随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集，称为 E 的随机事件，简称事件，用大写字母 $A, B, C,\cdots$ 表示。

例如，在例 1.1 的随机试验 E_1 中，设随机事件 A 表示“朝上那一面的点数为偶数”，则 $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$；设随机事件 B 表示“朝上那一面的点数不超过 3”，则 $B=\{1, 2, 3\}$。

再如，在例 1.1 的随机试验 E_2 中，设随机事件 A 表示“两次出现同一面”，则 $A=\{HH, TT\}$；设随机事件 B 表示“两次中至少出现一次正面”，则 $B=\{HH, HT, TH\}$。

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，另一个是空集 Φ。由于 Ω 包含了随机试验中的所有可能结果，因此在每次试验中它总是发生的，于是 Ω 称为必然事件。而空集 Φ 不包含任何样本点，因此每次试验中它都不发生，于是 Φ 称为不可能事件。

三、事件之间的关系及其运算

在一个样本空间中，显然可以有许多随机事件，而在实际问题中，我们往往希望通过了解简单随机事件来掌握复杂随机事件。为此，我们需要研究随机事件之间的关系及其运算。

由于随机事件是一个集合，因此随机事件之间的关系和运算，我们可以按照集合论中集合之间的关系和运算来处理。

1. 事件的包含与相等

若随机事件 A 发生，必然导致随机事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点均属于 B，则称随机事件 B 包含随机事件 A，记作 $A\subset B$。

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称随机事件 A 与随机事件 B 相等，记作 $A=B$。

2. 事件的和（或并）

设随机事件 A 和 B，若把 A 的样本点和 B 的样本点合在一起组成一个新的随机事件，则此新随机事件称为 A 与 B 的和事件（或并事件），记作 $A+B$（或 $A\cup B$）。

显然，随机事件 $A+B$ 的发生当且仅当 A 和 B 至少有一个发生。

一般地，n 个随机事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 的和事件记为

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 中至少一个发生；而可列个随机事件 $A_1, A_2, A_3,\cdots$ 的和事件记为

$$A_1+A_2+A_3+\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, A_3,\cdots$ 中至少一个发生。

3. 事件的积（或交）

设随机事件 A 和 B，若把 A 和 B 中共有的样本点组成一个新的随机事件，则此新随机事件称为 A 与 B 的积事件（或交事件），记作 AB（或 $A\cap B$）。

显然，随机事件 AB 发生当且仅当 A 与 B 都发生。

一般地，n 个随机事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 的积事件记为

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 同时发生；而可列个随机事件 $A_1, A_2, A_3,\cdots$ 的积事件记为

$$A_1\,A_2\,A_3\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, A_3,\cdots$ 都同时发生。

4. 事件的差

设随机事件 A 和 B，若从 A 的样本点中去除 B 的样本点后，余下的样本点组成的新随机事件称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$。

显然，随机事件 $A-B$ 表示随机事件 A 发生但随机事件 B 不发生。

5. 事件的互斥（或互不相容）

若随机事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件。

6. 事件的互逆（或对立）

对于随机事件 A 和 B，若 $AB=\Phi$，且 $A+B=\Omega$，则称 A 与 B 是互逆事件或对立事件，记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$。

显然有

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad A\overline{A}=\Phi,\quad A+\overline{A}=\Omega$$

若 A 与 B 是对立事件，则 A 与 B 一定是互斥事件；反之不一定。

7. 事件的运算律

与集合的运算相类似，随机事件之间的运算也满足下列的运算律。

（1）交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

（2）结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

（3）分配律：$A(B\pm C)=AB\pm AC$；

（4）对偶律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$。

这些运算律可以推广到任意多个随机事件的情形。

例 1.2 设 A,B,C 为三个随机事件，由事件之间的关系与运算，试用 A,B,C 表示下列事件：

① A 发生，B,C 都不发生；

② A 发生，B,C 至少有一个发生；

③ A,B,C 中恰有一个发生；

④ A,B,C 中至少有一个不发生；

⑤ A,B,C 中不多于一个事件发生。

解 ① $A\overline{B}\,\overline{C}$；② $A(B+C)$；③ $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；④ $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$；

⑤ $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

（1）掷两枚均匀的骰子，观察出现的点数之和；

（2）5 件产品中有 2 件是次品，逐件进行检测直至将所有次品找到为止，记录测试的次数；

（3）从编号为1,2,3,4 的四个球中一次随机地取 2 个，记录取到的球的号码；

（4）记录某城市110 报警台在一小时内收到的报警次数；

（5）测量在 0 和1之间取值的两个物理量 x 和 y 的数值（不含 0 和1）。

2. 设 A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示：

（1）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（2）A,B,C 中至少有一个发生；

（3）A,B,C 都不发生；

（4）A,B,C 不都发生；

（5）A,B,C 中恰有两个发生；

（6）A,B 至少有一个发生，而 C 不发生。

3. 设某工人连续生产了 4 个零件，A_i 表示生产的第 i 个零件是正品（$i=1,2,3,4$），试用 A_i 表示下列各事件：

（1）没有一个是次品；

（2）至少有一个是次品；

（3）只有一个是次品；

（4）至少有三个不是次品；

（5）恰好有三个是次品。

4. 设 A 表示事件“甲产品畅销，乙产品滞销”，则对立事件 $\overline{A}$ 表示的意义是什么？

5. 设 A,B,C 是三个随机事件，请说明下列各关系式的意义：

（1）$ABC=A$；（2）$A+B+C=A$；（3）$AB\subset C$；（4）$A\subset\overline{BC}$。

1.2　随机事件的概率

除必然事件和不可能事件外，对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生。但我们只讨论某一随机事件是否发生是不够的，我们还希望知道它在一次试验中发生的可能性大小。例如，商业保险机构为获得较大利润，就必须研究个体意外事件发生的可能性大小，才由此去计算保险费和赔偿费的多少。为了找到一个合适的数量来表征随机事件在一次试验中发生的可能性大小，我们首先引入频率，用它来描述随机事件发生的频繁程度；进而再引出表征随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率。

一、频率

定义 1.1　设随机事件 A 在 n 次的重复试验中，出现了 r 次，则称 r 为随机事件 A 发生的频数；将比值 $\dfrac{r}{n}$ 称为随机事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{r}{n}$$

由定义 1.1 可知，频率具有以下性质：

（1）$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

（2）$f_n(\Omega)=1$；

（3）若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是一组两两互不相容的随机事件，则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

通过大量的试验，人们发现，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，即逐渐稳定于某个常数。例如在历史上，就有很多人做过重复上抛一枚硬币，记录正面朝上的次数的试验，如数学家德·摩根、蒲丰，等等；表 1-1 所示的就是他们试验的结果。

表 1-1　德·摩根等人的试验记录表

实验者	试验次数 n	正面朝上的次数 r	出现正面的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此表可以看出，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于常数 0.5 。

虽然由频率的稳定性可知 $f_n(A)$ 是一个常数，且用它来表征随机事件 A 发生可能性的大小是合适的，但是它是通过大量重复试验得到的结果。而在实际中，我们不可能对每个随机事件都做大量的试验，况且有些试验是不可重复进行的，这样就无法计算随机事件发生的频率。因此，我们需要引出另一个也能表征随机事件 A 发生可能性大小的数，即随机事件 A 的概率。

二、概率

定义 1.2　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 Ω 中的任一随机事件 A，都赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 同时满足下列三个条件：

（1）非负性：对任一随机事件 A，都有 $P(A) \geqslant 0$；

（2）规范性：$P(\Omega) = 1$；

（3）可列可加性：若 $A_1, A_2, \cdots$ 为可列无穷多个互不相容的随机事件，即对于 $i \neq j$，有 $A_i A_j = \Phi$（$i, j = 1, 2, \cdots$），则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率。

此定义称为概率的公理化定义，由它可推出概率的一些重要性质。

性质 1　$P(\Phi) = 0$；

证明　因为 $\Phi = \Phi + \Phi + \cdots$，所以由概率的可列可加性知

$$P(\Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) + \cdots$$

再由概率的非负性即可得出 $P(\Phi) = 0$ 。

性质 2　设随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证明　令随机事件 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \Phi$，则由概率的可列可加性，有

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) &= P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \Phi + \Phi + \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\Phi) + P(\Phi) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \end{aligned}$$

性质 3　对任一随机事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

证明　因为 $A+\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\Phi$，所以有

$$P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1\text{，且 }P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

即有
$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

于是有
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 4　对于任意随机事件 A,B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证明　因为 $A+B=A+B\overline{A}$，且 $A(B\overline{A})=\Phi$，所以有

$$P(A+B)=P(A+B\overline{A})=P(A)+P(B\overline{A})$$

而 $B=BA+B\overline{A}$，且 $(BA)(B\overline{A})=\Phi$，于是有

$$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$$

即有
$$P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)$$

因此有
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

此性质称为概率的加法公式，它可以推广到多个随机事件的情形。例如，设 A_1,A_2,A_3 是任意三个随机事件，则有

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

一般地，对于任意 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，则可用数学归纳法得到

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

性质 5　若随机事件 A,B 满足 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)\text{，且 }P(B)\geqslant P(A)$$

证明　因为 $A\subset B$，所以有

$$B=A+(B-A)\text{，且 }A(B-A)=\Phi$$

因此由性质 2 可知
$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即有
$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

又因为 $P(B-A)\geqslant 0$，所以有 $P(B)\geqslant P(A)$。

性质 6　对任一随机事件 A，都有 $P(A)\leqslant 1$。

证明　因为 $A\subset\Omega$，所以由性质 5 可知

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1$$

例 1.3　设 A,B 为两随机事件，有 $P(B)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，求 $P(A\overline{B})$。

解　因为
$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P\{A(\Omega-B)\}=P(A\Omega-AB)\\&=P(A-AB)=P(A)-P(AB)\end{aligned}$$

而
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

则有
$$P(A)-P(AB)=P(A+B)-P(B)=0.7-0.4=0.3$$

因此有
$$P(A\overline{B})=0.3$$