量子关联及其动力学性质

郭志华 著

科学出版社

量子关联及其动力学性质

郭志华 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

量子关联是存在于复合量子系统之间的一种重要量子特性，是量子信息处理与量子通信的重要资源. 本书系统汇集了作者近年来应用算子理论与算子代数方法与思想，在量子关联理论方面取得的一系列最新研究成果. 主要内容包括量子力学的基本概念、两体量子系统中的量子关联、多体系统中的量子关联、量子关联的动力学性质以及量子关联鲁棒性.

本书可作为对量子信息理论感兴趣，并且具有相关数学基础的研究生及教师的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

量子关联及其动力学性质/郭志华著. —北京：科学出版社，2019. 2

ISBN 978-7-03-060412-5

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①量子论-研究 Ⅳ. ①O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 004156 号

责任编辑：周　涵　孙翠勤／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 2 月第 一 版　开本：720 × 1000 B5
2019 年 2 月第一次印刷　印张：9 1/4
字数：187 000

定价：69.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

量子信息是量子力学基本原理运用到信息论和计算机科学中所产生的交叉学科. 1935 年, 由 Schrödinger 阐述的量子纠缠显示出量子力学中基本而又最为奇特的现象. 随着研究的深入和理论及应用的需要, 人们发现量子纠缠仅仅是一种特殊的量子关联, 由于在某些量子信息处理任务中, 纠缠是不存在的, 但是存在着量子关联. 这时, 量子关联作为更广泛的一种量子特性就能够使处理速度加快. 近年来, 量子关联已经在理论上被用在许多量子计算模型中, 可以设计出使问题加速解决的一些计算方案, 并且在实验上得到实现.

本书以算子理论、算子代数、矩阵论为工具, 以量子信息理论为背景, 研究量子关联的动力学性质, 体现算子论与算子代数在量子信息理论中的新思想及应用. 本书层次分明、循序渐进、理论体系完整、逻辑推导严谨.

本书的读者对象为对量子信息理论感兴趣且具有泛函分析基础的研究生, 或者从事量子信息研究的科研工作者. 本书的出版不仅能够丰富量子信息学的基础理论, 而且能体现算子论与算子代数工具在研究量子理论中的作用, 对量子信息理论的发展具有重要理论意义与学术价值.

全书共 5 章: 第 1 章介绍量子力学的基本概念, 为后面的章节提供必要的理论基础; 第 2 章介绍两体量子系统中的量子关联, 包括两体量子态的关联性的定义、刻画、性质与度量以及与量子相干性的关系; 第 3 章介绍多体系统中的量子关联, 包括三体及多体量子态的关联性的定义、分类、刻画与度量; 第 4 章介绍量子关联的动力学性质, 包括两体量子信道对关联性的影响、具有某种特性的量子信道的存在性与刻画以及对角量子信道的纠错码空间的存在性与构造方法; 第 5 章介绍量子关联鲁棒性, 包括量子态的伪凸组合的正性、相对量子关联鲁棒性以及量子关联鲁棒性.

本书的大部分内容出自作者的博士学位论文和博士后出站报告, 因此, 特别感谢陕西师范大学曹怀信教授和屈世显教授的指导与帮助. 同时, 本书的出版得到了陕西师范大学一流学科建设经费的资助, 感谢陕西师范大学数学与信息科学学院领导与同事的大力支持.

由于作者能力和兴趣的局限, 本书内容难免有疏漏和不妥之处, 诚挚欢迎读者批评指正.

郭志华

2018 年 7 月

目　录

主要符号表

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathcal{H},\mathcal{K}$	Hilbert 空间
$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$	$\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{K}$ 的张量积空间
$B(\mathcal{H},\mathcal{K})$	从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 上的全体有界线性算子之集
$B(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上的全体有界线性算子之集
$D(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ 上的量子态之集
$\|\psi\rangle$	$\mathcal{H}$ 中的单位向量, 又称纯态
$\langle\psi_1\|\psi_2\rangle$	$\|\psi_1\rangle$ 与 $\|\psi_2\rangle$ 的内积
$\|\psi_1\rangle\|\psi_2\rangle$	$\|\psi_1\rangle$ 与 $\|\psi_2\rangle$ 的张量积
$\|\psi_1\rangle\langle\psi_2\|$	$\|\psi_1\rangle$ 与 $\|\psi_2\rangle$ 的外积
$\\|\cdot\\|$	范数
$T^\dagger$	算子 T 的共轭转置
$\dim(\mathcal{H})$	Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的维数
$\mathrm{Rank}(A)$	矩阵 A 的秩
A^{T}	矩阵 A 的转置
$\mathrm{ran}(A)$	A 的值域
$\mathrm{tr}(A)$	A 的迹
$\mathrm{tr}_X(A)$	A 在系统 X 上的偏迹

绪　　论

量子信息的研究对象是量子力学系统能够完成的信息处理任务, 是将量子力学基本原理运用到信息论和计算机科学中所产生的交叉学科. 量子信息可以实现诸多经典领域所不能完成的信息处理任务, 例如量子隐形传态[1]、量子密集编码[2]、绝对安全的量子密钥传输[3] 以及能够破解当前广泛使用的公开密钥体系 RSA 的大数因子分解的量子算法[4] 等.

由 Schrödinger[5, 6] 阐述的量子纠缠是量子力学中基本而又最为奇特的现象. 随后, Einstein, Podolsky 和 Rosen(EPR) 基于局域实在性 (指两个远距离粒子被视为是两个不同的系统) 假定, 发表了著名的质疑量子力学完备性的文章[7], 利用量子纠缠提出了一种想象实验, 涉及两个空间可分但纠缠的粒子, 认为量子力学预示着这两个粒子具有完全关联的位置和动量, 与所谓的局域实在性矛盾. 其最初目的是说明量子力学的不完备性, 用现在的观点来看, 是纠缠粒子中存在非局部关联[8], 激起了物理和哲学上关于关联和局域性的广泛研究. 从此, 量子纠缠就一直是量子力学中最热点讨论的基本问题之一, 它是量子力学区别于经典力学的一个本质特征, 也是量子通信和量子计算中的重要资源[9]. 1989 年, Werner[10] 将关联划分为纠缠与可分的方案, 虽然一直占据着量子信息的中心地位, 却并没有完全刻画经典关联与量子关联的本质区别, 随着研究的深入和理论及应用的需要, 人们发现量子纠缠仅仅是一种特殊的量子关联, 由于在某些量子信息处理任务中, 纠缠是不存在的, 例如单比特确定性量子计算[11] 以及缺少纠缠的量子搜索算法[12], 所以需要通过经典的方法得到什么能够使处理速度加快, 这就是量子关联. 于是, 量子关联这一比量子纠缠更一般的现象的研究变得迫切起来. 最近, 随着量子信息理论的发展, 很多工作已经指出, 包含经典和量子两部分的关联可能比纠缠更广泛、更基础. 最简单的例子: 在一个 Bell 态中, 经典关联和量子关联都为 1, 而在这种情况下, 纠缠就等于量子关联. 更进一步, 人们又发现了可分态中可能含有非经典关联. 这就意味着纠缠为零的可分态中可能含有非零的量子关联[13], 而且这种非纠缠的量子关联已经在理论上被用在非幺正的量子计算模型中, 以实现使问题加速解决的一些计算方案[14] , 并且这些方案[15] 已经在实验上得到实现.

在量子关联理论研究过程中, 关键的问题是量子态的关联性的刻画. 因为纠缠的定义是相对于可分给出的, 所以可分性的研究在量子信息论中起到了关键的作

用. 许多学者对于如何判定两体态的纠缠性和量化问题以及多体纠缠进行分类以及量化方面作出了很多的努力, 并获得了相当丰富的结果[16−20]. 目前, 纠缠态的量子关联的量化也是相对成熟的. 然而, 对于可分态的量子关联来说, 事情就不那么简单了. 因此, 大量的研究兴趣都集中在可分态的量子关联上. 与纠缠一样, 量子系统中的各种关联在周围环境噪声作用下都会不断衰减. 研究各种关联在不同噪声信道下的动力学过程, 将有助于我们进一步理解和应用它们. 而且相对于纠缠突然死亡的独特性质, 对其他各种关联独特演化方式的研究, 不仅有助于区分各种关联在量子信息方案优越性方面所起的作用, 而且对进一步利用它们也有着重要的实际意义.

关联是自然界中普遍存在的现象. 从信息论的角度来看, 经典领域的关联可以很好地在 Shannon 信息理论框架内进行刻画[21], 利用互信息量的概念来度量不同观测值之间的关联度的大小, 产生了 Shannon 熵, 其测量的不确定性与经典概率分布相联系. 推广到量子系统中定义的方式是类似的, 只是用密度算子代替了概率分布. 著名物理学家 Ollivier 和 Zurek 于 2001 年[13] 提出了量子失协 (quantum discord) 这个概念, 是指互信息与经典关联的差, 其思想是利用局部测量得到的最大信息来量化量子关联. 这是个物理意义明显而又有重要价值的量子关联度量, 但由于互信息无法推广到多体系统的原因一直阻碍着这一度量应用到多体系统中, 这就迫切需要寻找其他方法来弥补这一缺陷. 因此, 关于经典关联、量子关联以及量子非局域性的关系, 因其在量子物理中的基本意义和核心作用, 也引起人们的探索[22], 成为近年来国内外数学家、物理学家、信息论专家及计算机专家共同关注的前沿热点课题.

Maziero 等[23] 指出: 对于有限维系统, 在合适的条件下, 经典关联不受退相干影响, 并且给出任何极端化程序都无法计算关联性的一种度量. 骆顺龙则基于不被某个局部 von Neumann 测量扰动的思想[24], 给出了两体系统中量子关联与经典关联的分类与量化公式, 得到在一些可分态中仍然有量子关联性, 又印证了量子关联比纠缠更广泛, 并应用到 Werner 态以及迷向 (isotropic) 态, 优化了文献 [11] 中给出的量子计算模型. 随后, 李楠, 骆顺龙在文献 [25] 中得到可分态与高维系统上的经典关联态之间的关系, 即 $\mathcal{H}$ 上的可分态可以认为是 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上某个经典关联态对于系统 $\mathcal{K}$ 的约化, 进一步深化了关联与纠缠的关系. 由于文献 [24] 中的量化公式需要取遍所有的经典关联态才能得到, 所以很难计算. 另一方面, 基于 Barnum 等[26] 得到的结果: 一族量子态可以被广播当且仅当这些量子态两两可交换, 骆顺龙等在文献 [27–29] 中进行了猜想: 两体系统中的关联态可以被广播当且仅当其是经典–量子的当且仅当量子失协消失, 并给出了部分结果. 对于多体系统的情形, Piani 在文

献 [30] 中也得到了类似的结果. 吴玉椿, 郭光灿在文献 [31] 中通过谱算子来得到经典关联态的新刻画, 并用算子的极大范数来给出关联度量公式, 并证明了上述猜想的正确性. 但是, 对于双量子比特纯态 $|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ 来说, 其量子关联要大于由 von Neumann 熵定义的纠缠, 作者猜想是否能够通过选取合适的范数来解决这一问题. 鉴于这一问题的研究现状, 量子态关联性的刻画及其度量是本书所研究的重点内容之一. 郭志华等在文献 [32] 中利用算子论与算子代数方法得到了经典关联态的充分必要条件, 并给出了可计算的范数度量.

量子相干性起源于量子纯态的叠加原理, 是量子力学中最重要的基本性质之一. 在量子参考框架[33–35], 生物系统[36–38], 以及热力学[39, 40] 中都有着重要应用, 最近几年已经引起了许多学者的广泛关注[41, 42], 其中，如何测量量子相干性是一个重要的问题. Mondal 等[43] 利用局部隐藏态模型的存在性研究了局部量子相干性的可操控性, 文献 [44] 的作者使用正算子值测量研究了单方操控态的极大相干性, 并用量子操控椭球体形式研究了极大操控相干性. 文献 [45] 的作者研究了单方 Einstein-Podolsky-Rosen 可导引性. 受文献 [44, 45] 的启发, 郭志华等在文献 [46] 中定义了一个量子态的极大可操控相干性, 并给出任意量子态的极大操控量子相干性的上界, 证明了量子态的极大可操控相干性是 0 当且仅当它是经典关联态.

除此之外, 还存在着很多有趣的问题, 例如, 很多经典方法所不能实现的量子信息方案都可以通过量子纠缠来辅助实现. 然而我们所感兴趣的量子体系一般不是一个封闭系统, 它不可避免地要与环境发生相互作用, 从而发生退相干现象[47]. 骆顺龙[48] 首次从经典和量子的角度量化了由测量诱导的关联, 接着通过由测量诱导的经典关联量化了退相干. 利用三体系统中纠缠和经典关联的关系, 给出了量子比特系统中由测量诱导的关联与退相干度量的一般解析公式, 进一步揭示了信息扰动是保持平衡的. 另外, 关于多体系统量子关联的度量也是研究的热点问题之一. Bennett 等[49] 最近提出度量真正多体关联所必须具备的三个基本条件, 他们发现, Kaszlikowski 等[50] 提出的用以度量多体关联的协方差的概念并不满足他们所提出的其中两个条件, 因此, 协方差并不能作为一个度量方法. 合适的度量可以揭示纠缠与量子关联之间的大小关系. 因为关联是在不同的框架下进行定义的, 因此它们之间的大小关系并不是确定的. 一些学者利用纠缠相对熵的方法来度量纠缠, 这样, 各种关联就可以都在熵的框架下进行度量, 从而进行比较. 随着量子优越性的进一步发掘, 人们对其深层次原因也愈加感兴趣, 因此对各种关联的研究也将更加深入[51–56]. 即使对于最简单的两体量子体系, 各种关联的计算也并非易事, 而多体系高维度系统将呈现出更为奇特的现象[57–59]. 在多体量子系统中, 基于纠缠的量子态的分类要比两体系统中的丰富得多. 事实上, 在多体量子系统中, 除了完全可

分态和完全纠缠态以外, 还存在部分可分态[60−63]. 类似于量子失协, 文献 [64] 的作者提出了多重熵度量, 其中, 构成粒子的子集的平均 von Neumann 熵用来度量多体系统的量子纠缠. 这一度量应用在极端纠缠 4- 量子比特纯态[65] 以及线性聚类态的纠缠[66] 的讨论中.

而且, 多体量子系统中的量子关联的度量也引起了很多的注意[67−71]. 明确地说, Rulli 和 Sarandy[67] 引入了多体量子系统中的量子关联的全局度量, 其中, 就相对熵和局部 von Neumann 测量得到了合适的量子失协. Xu 在文献 [68] 中给出了两类多个量子比特系统中态的全局量子失协的解析表达式. Ma 等在文献 [69] 中提出了多体量子系统中量子关联的度量, 定义为所有可能分割的部分关联的总和. Bai 等在文献 [70] 中利用了量子失协的平方来探究多体量子关联. 这些已有的结果只是考虑了多体量子态的全局关联, 并且已经应用在了多种情形. 然而, 多体系统中的形势是更为复杂的, 因为在多体系统中存在不仅仅是全局经典关联态, 而且存在许多部分经典关联[71] , 就像存在关于某个固定部分的 2-可分态但非完全可分的. 受此启发, 郭志华等在文献 [72, 73] 中对多体量子系统中的量子关联进行完全分类, 给出各种关联态的定义, 并提出相应的关联度量函数.

考虑到量子系统与环境之间不可避免的相互作用, 各种关联的演化规律引起了人们的高度关注. 量子体系中不同关联的演化呈现出独特的演化特征, 这不仅有助于设计更为有效的量子信息方案, 而且能够促进对一些基本物理现象的理解. 目前对于双量子比特系统的量子纠缠在噪声环境下的演化已经有了一般的描述方式[74, 75], 人们期望其他各种关联的演化的研究也能有类似的规律. 最近, 人们发现经典关联和量子关联在马尔可夫噪声下一些特殊的演化规律, 比如关联的衰减率有突变的现象[76], 量子关联在消相干环境下会保持不变, 并且出现从经典消相干到量子消相干的突然变化[77], 以及量子关联突然消失但却没有流失到环境中的现象[78].

这些文献都是基于物理实验所得到的关联的演化规律. 从理论的观点来看, 量子关联动力学的研究可以使我们更好地理解在复合量子系统中的量子关联的产生、破坏以及保持的规律. 为此, 我们需要来研究量子关联在噪声信道下的行为, 等价地说, 我们需要讨论哪些量子信道能够保持、创造以及破坏量子关联. 进一步, 从数学的角度讲, 怎样刻画算子空间上保持某种性质的线性映射引起了许多学者的广泛关注[79−87]. 根据量子力学法则, 系统的演化称为量子信道 (也称量子运算), 在封闭系统中是指酉算子, 在开放系统中是指保迹的完全正映射[81]. 显然, 局部酉算子 (复合 Hilbert 空间的每个子系统上的酉算子的张量积) 可以将可分纯态作用为可分纯态. 另外, 交换 (swap) 算子也可以保持可分纯态, 例如, $S(|a\rangle\otimes|b\rangle)=|b\rangle\otimes|a\rangle$. 事实上, 对于两体态的情形, 在文献 [86, 87] 中作者已经得到: 保持可分纯态之集的

算子或者是局部酉算子, 或者是交换算子. 文献 [88] 和 [89] 的作者讨论了破坏纠缠的量子信道, 得到了其具体结构. 在这一类问题中, Streltsov 等在文献 [90] 中证明了一个作用在单个量子比特系统上的量子信道 Λ 能够从一个经典关联态产生量子关联当且仅当 Λ 既不是半经典的 (即测量映射) 也不是保单位的. 换句话说, 存在某个 2-量子比特系统中的经典关联态可以由 $\Lambda \otimes 1$ 变为量子关联态当且仅当 Λ 既不是半经典的也不是保单位的. 因此, 对于量子比特系统, $\Lambda \otimes 1$ 是经典关联保持的当且仅当 Λ 要么是半经典的要么是保单位的. 进一步, 对于高维情形, 他们证明了即使是保单位量子信道, 也可能增加量子关联, 例如, 一个局部退相干信道能够产生量子关联. Gessner 等在文献 [91] 中证明了非零量子失协的量子态能够由一个局部量子信道作用在 0 量子失协的量子态上得到. 在文献 [92] 中, 作者证明了一个局部量子信道 $1 \otimes \Lambda$ 能够产生量子关联当且仅当 Λ 不是保持交换性的量子信道, 并且给出了局部量子信道能够生成量子关联当且仅当它不是保交换信道, 特别地, 对于双量子比特系统, 保交换信道或者是完全退相干 (decohering) 信道, 或者是混合信道, 对于三维系统的情形, 保交换信道要么是完全退相干信道, 要么是迷向信道. 郭钰, 侯晋川[93] 进一步研究了这一问题, 给出了一个保持交换性的量子信道的明确形式, 证明了在任意有限维空间上的保交换信道要么是完全退相干信道, 要么是迷向信道, 并提出了产生量子失协的局部量子信道的充分必要条件, 得到了双方保持零量子失协态的量子信道一定是非平凡的迷向信道. 这一结果优化了 Streltsov 等在文献 [90] 中得到的结果. 郭志华等基于骆顺龙在文献 [24] 中给出的量子关联的定义, 在文献 [94] 中讨论了保持经典关联的局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 的形式, 得到了保持经典关联的局部量子信道、保持交换性的局部量子信道以及每个子系统上保持交换性的量子信道之间的关系. 进一步, 在双量子比特系统中, 给出了保持经典关联的局部量子信道的一般结构形式. 最后还讨论了保持交换性的量子信道的凸组合问题. 但对于一般的局部量子信道对量子关联的影响还未得到完全刻画, 因此, 探究局部量子信道对量子关联性的影响是本书的一个研究重点, 很有必要来讨论高维系统中保持经典关联的量子信道的结构问题. 这就导致了下面的问题.

问题 1. *哪些局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 能够保持经典关联性?*

进一步, 根据文献 [95], 一个量子信道 Λ 被称为破坏量子关联的 (或者 QC- 型信道), 如果量子信道 $1 \otimes \Lambda$ 可以将任何两体态映射为量子–经典态. 而且, 作者已经证明了一个量子信道 Λ 是 QC- 型信道当且仅当它的 Choi-Jamiolkowski 态是量子–经典态当且仅当它是量子–经典测量映射. 然而, 对于一般的局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$, 需要研究它是否可以完全破坏量子关联, 即它可以将每个两体态映射为经典关联

态. 如果可以的话, 称这个量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 是 QC- 破坏的. 显然, 如果 $1 \otimes \Lambda$ 是 QC- 破坏的, 那么 Λ 是 QC- 型信道. 反之不成立. 因此, 需要考虑下面的问题.

问题 2. 哪些局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 能够破坏量子关联性?

此外, 称一个保持经典关联的局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 是强经典关联保持的, 如果输出态是经典关联的能够意味着输入态是经典关联的. 从这个定义容易看出: 一个强经典关联保持的局部量子信道是双方保持经典关联的. 等价地说, 一个强经典关联保持的局部量子信道能够双方保持量子关联. 目前还没有关于强经典关联保持的局部量子信道的任何研究, 这就需要考虑下面的问题.

问题 3. 哪些局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 能够双方保持经典关联性?

另外, Korbicz 等在文献 [95] 中由定义可以通过 $1 \otimes \Lambda$ 两体量子态 ρ 变为经典关联态的所有 ρ 构成的集合, 从不同的角度讨论了局部量子信道的刻画, 但还没有给出完全的结果. 可以研究以下的问题来回答他们未解决的问题.

问题 4. 哪些量子态能够由同样的局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 映射成经典关联态?

因此, 郭志华等在文献 [96] 中通过回答以上四个问题来建立保持经典关联的、破坏量子关联的以及强保持经典关联的局部量子信道的结构, 从而完全刻画量子关联在一般的局部量子信道 $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ 下的动力学性质.

以上研究是关于单个量子关联态到单个量子关联态之间的量子信道的刻画, 那么是否可以研究一族量子态到另一族量子态之间的量子信道的存在性问题, 最为著名的是混合态的克隆问题[26]. 另外, 基于量子干涉的一般原理, 清华大学龙桂鲁[97]提出了一种新型的量子计算机, 称为对偶量子计算机, 将酉算子的凸组合称为广义量子门[98]. 此后, Gudder[99, 100] 给出了对偶量子计算机的数学理论. 龙桂鲁在文献 [101] 中将对偶量子计算运用到对偶量子信息处理中, 对信息处理起到了很大的推动作用. 同时, 曹怀信[102−104] 基于他们的思想给出了可容许的复的对偶量子计算机的数学模型及理论. 郭志华等在文献 [105] 中讨论两族量子态之间的量子信道以及对偶量子计算机的存在性与构造问题.

1994 年, Shor 等[106] 基于量子叠加性和相干性的量子本质特征基础上提出了量子并行计算的量子计算机理论, 给出了大数质因子分解的量子多项式时间算法, 并且说明了量子计算机可以实现经典计算机无法比拟的量子处理任务. 但是在实际系统中, 量子态的这种相干叠加和纠缠很脆弱、很难保持. 因为量子计算机不是一个孤立的量子系统, 它必然要同外部环境, 包括测量仪器发生相互作用, 结果就会出现量子态相干性的丢失, 使量子态退化为经典态. 这就是退相干效应. 退相干

效应的存在使量子计算的优越性丢失, 运算结果出现错误. 除了退相干不可避免地导致量子错误外, 其他一些技术原因, 比如量子门操作中的误差也会导致量子错误. 为了实现有价值的量子计算, 首要的任务就是克服退相干效应, 对量子计算过程中出现的错误及时加以监控并纠正. 经过研究, 量子纠错编码是克服这一障碍的最有效的方法之一. 在量子信息处理任务中, 由于环境与主系统的耦合, 我们很难避免噪声引起的错误, 因此, 如何有效控制噪声, 最常用的方法是量子纠错码空间. 这种方法在量子计算和量子通信过程中有着广泛的应用.

实际上, 一个开放量子系统可由一个 Hilbert 空间来描述, 量子系统的演化可由量子信道描述, 通过量子信道的量子态经常会受到影响, 量子纠错理论就是要纠正这种错误. 理想的量子纠错是要恢复量子系统的所有信息, 但一般来说这是不可能的. 因此, 人们试图通过寻找 Hilbert 空间的一个子空间 —— 纠错码空间, 使得这一子系统上的信息通过量子信道带来的错误都能由另一个合适的量子信道所纠正.

量子纠错码是由 Shor 在文献 [107] 中最早提出的. 这一理论的产生使得量子计算和量子通信得到了迅猛发展[108−112], 从而使信息科学进入了量子信息时代. 之后, 关于量子纠错的理论框架, 相关性质和操作也引起了广泛关注[113, 114]. 近年来, 关于量子纠错解码问题受到很多学者关注, 文献 [115] 的作者给出了关于纠错解码的一些应用, 文献 [116] 的作者给出了关于量子纠错码实际应用的一些具体案例.

此外, 关于量子纠错解码问题的研究还有很多. 在某些特殊的量子系统中, 演化是由一些特殊量子信道描述的, 例如: 对角量子信道, 在文献 [117] 中, Arnold 讨论了对角量子信道的量子纠错码, 得到了给定的 Kraus 算子下 $\mathcal{E}$ 能否纠错的充分必要条件. 但众所周知, 量子信道所对应的 Kraus 算子并不唯一, 因此, 作者在文章最后提出了公开问题: 能否在其他的 Kraus 算子表示下研究 $\mathcal{E}$ 能否纠错? 郭志华等在文献 [118] 中对对角量子信道的纠错码空间作进一步的研究, 解决这一问题, 并给出一种构造纠错码空间的方法.

鲁棒性是系统的健壮性, 它是在异常和危险情况下系统生存的关键. 通常情况下, 鲁棒性描述了一个物体的某种性质对于干扰的忍耐力. 为了讨论量子态的纠缠鲁棒性, Vidal 和 Tarrach 在文献 [119] 中讨论了某个纠缠态和任何可分态的线性组合的效应, 探究了其线性组合是可分态的组合系数的最小量. 等价地说, 文献 [119] 中给出的纠缠鲁棒性描述了一个纠缠态和一个可分态的线性组合仍然是可分态的组合系数的多少. 对于有限维复合系统中的量子态 ρ 和可分态 σ, 分别定义 ρ 相对

于 σ 的相对关联鲁棒性为

$$R(\rho||\sigma) = \min\left\{t \in [0, +\infty] : \frac{1}{1+t}\rho + \frac{t}{1+t}\sigma \text{ 是可分的}\right\}$$

以及 ρ 的鲁棒性为

$$R(\rho) = \min\{R(\rho||\sigma) : \sigma \text{ 是可分的}\}.$$

关于 $R(\rho)$ 和 $R(\rho||\sigma)$ 的许多有趣的性质已经有了很多结果[119], 例如, $R(\rho) = 0$ 当且仅当 ρ 是可分的. 文献 [119] 中得到的结果表明: 纠缠鲁棒性描述了耦合机制中纠缠态的鲁棒性是多大. 文献 [120] 的作者通过建立一个密度矩阵的向量表示给出了纠缠鲁棒性的几何解释. 之后, M. Steiner 在文献 [121] 中讨论了广义的纠缠鲁棒性, 其中, 把纠缠鲁棒性的定义中的可分态改成任意量子态, 并且证明了纠缠纯态的广义的纠缠鲁棒性和文献 [119] 中定义的鲁棒性是相同的.

对于量子关联的鲁棒性, 近几年也有了一些研究结果[122–126]. Werlang 等在文献 [122] 中讨论了量子失协对于突然坍缩的鲁棒性, 证明了量子失协要比纠缠抵抗退相干更鲁棒, 使得基于量子关联的量子算法要比基于纠缠的量子算法更鲁棒. Hu 在文献 [123] 中探索了在外部环境下 Greenberger-Horne-Zeilinger 态和 W-态的远距传动的鲁棒性. Hu 和 Fan 在文献 [124] 中通过精确解决由两个原子量子比特自发散射组成的模型来研究非经典关联的动力学, 并探究了由一个主方程定义的量子态 $\rho(t)$ 的关联系数的系统影响. 文献 [125] 中的这种影响称为量子关联的鲁棒性. 最近, 文献 [30] 中的作者证明了弱测量反转机制能够提高多体量子关联的鲁棒性, 进一步增加了相应于纠缠突然坍缩的临界阻尼值. 类似于文献 [119] 又不同于文献 [122–125,30] 的结果, 郭志华等在文献 [126] 通过定义一个量化概念 —— 抗线性噪声的量子关联鲁棒性, 利用一个简单的代数运算 —— 凸组合. 这一工作不仅可以量化抗线性噪声的量子关联的鲁棒性, 而且可以区分量子态的量子关联和经典关联.

第 1 章　量子力学的基本概念

为了使数学专业没有任何量子力学准备知识的读者能够读懂本书的内容, 本章主要分五部分介绍量子力学的数学基础, 分别是算子论基础、完全正映射、量子力学基本假设、量子信道以及 von Neumann 熵.

1.1　算子论基础

1.1.1　Hilbert 空间与算子

设 $\mathcal{H}$ 为有限维 Hilbert 空间, $\dim(\mathcal{H}) = d$, $\mathcal{H}$ 中的向量用 $|x\rangle, |y\rangle$ 等表示, $\langle x|y\rangle$ 表示向量 $|x\rangle$ 与 $|y\rangle$ 的内积, 且要求内积是右线性、左共轭线性的. 用 $B(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子之集. 设 $A \in B(\mathcal{H})$, $A^\dagger$ 表示 A 的伴随算子, 若 $AA^\dagger = A^\dagger A$, 则称 A 是正规算子; 若 $A^\dagger = A$, 则称 A 是自伴算子; 若 $\langle x|A|x\rangle \geqslant 0, \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$, 则称 A 是半正定算子. 设 A 是自伴算子, 若 $A^2 = A$, 则称 A 是投影算子. 对于 $\mathcal{H}$ 中向量 $|x\rangle, |y\rangle$, 用 $|x\rangle\langle y|$ 表示外积算子, 它将向量 $|z\rangle$ 映射为向量 $\langle y|z\rangle|x\rangle$. 特别地, 当 $|x\rangle$ 为单位向量时, $|x\rangle\langle x|$ 是秩为 1 的投影算子, 称之为一秩投影算子. 记 $I_{\mathcal{H}}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的恒等算子, 以下为了方便, I_d 表示 d 维空间上的恒等算子. 若 $A^\dagger A = I_{\mathcal{H}}$, 则称 A 为酉算子. 设 $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^d$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基, 定义 A 的迹为

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{d} \langle x_i|A|x_i\rangle.$$

可以证明算子的迹与定义中的正规正交基的选取是无关的. 设 $A, B, C \in B(\mathcal{H})$, 则

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB),$$

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

设 $A, B \in B(\mathcal{H})$, 定义 $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H})$ 上的函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\dagger B),$$

可以验证这个函数是一个内积, 称之为 Hilbert-Schmidt 内积, 这时, $B(\mathcal{H})$ 赋予 Hilbert-Schmidt 内积成为 Hilbert 空间.

下面介绍几种有用的算子分解.

定理 1.1.1 (极分解) 设 $\rho \in B(\mathcal{H})$, 则存在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 U 使得 $\rho = PU$, 其中, P 是与 ρ 有相同秩的半正定算子.

定理 1.1.2 (奇异值分解) 设 $\rho \in B(\mathcal{H})$, 则存在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 U, V 使得 $\rho = U\Lambda V^\dagger$, 其中, Λ 是具有非负主对角元的对角矩阵, 且其秩与 ρ 相同.

定理 1.1.3 (谱分解) 设 $\rho \in B(\mathcal{H})$ 是自伴算子, 则存在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 U 使得 $\rho = U\Lambda U^\dagger$, 其中, Λ 是对角元为 ρ 的特征值的对角矩阵. 换句话说, 存在 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基 $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^d$ 使得 $\rho = \sum\limits_{i=1}^d \lambda_i |x_i\rangle\langle x_i|$, 其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ 是 ρ 的特征值.

两个算子 A 与 B 之间的对易式定义为 $[A, B] = AB - BA$, 若 $[A, B] = 0$, 则称 A 与 B 对易, 在数学上常称为 A 与 B 可换.

定理 1.1.4 (同时对角化) 设 $A, B \in B(\mathcal{H})$ 是自伴算子, 则存在 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基使得 A 和 B 在这组基下都是对角矩阵当且仅当 $[A, B] = 0$. 这时, 称 A 和 B 可同时对角化.

1.1.2 张量积空间与算子

张量积是将两个向量空间合在一起, 构成更大空间的一种方法. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 分别是 d_1 和 d_2 维 Hilbert 空间, $|u\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|v\rangle \in \mathcal{H}_2$, 记 $|u\rangle$ 和 $|v\rangle$ 的张量积为 $|u\rangle \otimes |v\rangle$, 简记为 $|u\rangle|v\rangle$. $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 是一个 $d_1 d_2$ 维 Hilbert 空间, 其元素是 $\mathcal{H}_1$ 的元素和 $\mathcal{H}_2$ 的元素的张量积的线性组合. 特别地, 若 $\{|i\rangle\}$ 和 $\{|j\rangle\}$ 分别是 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 的正规正交基, 则 $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ 是 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 的正规正交基. 设 $A \in B(\mathcal{H}_1)$, $B \in B(\mathcal{H}_2)$, 定义算子 A 和 B 的张量积为

$$(A \otimes B)\left(\sum_i a_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle\right) = \sum_i a_i A|u_i\rangle \otimes B|v_i\rangle, \quad \forall |u_i\rangle \in \mathcal{H}_1, |v_i\rangle \in \mathcal{H}_2.$$

一般来讲, 张量积的以上概念相对抽象, 不好理解, 为了更具体地理解这一运算, 我们将其转化为矩阵的 Kronecker 积.

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $p \times q$ 矩阵, 则

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 表示矩阵 A 的 (i, j)- 元素.