

“工科数学分析” MOOC 配套教材

工科数学分析教程

(上册)

主编 杨小远



科学出版社

“工科数学分析”MOOC 配套教材

工科数学分析教程

(上册)

主 编 杨小远

参 编 张英晗 魏光美 冯伟杰

高颖辉 张奇业



科学出版社

北京

内 容 简 介

《工科数学分析教程(上册)》是一本信息化研究型教材. 本书包括数列极限、函数极限与连续、导数的计算与应用、泰勒公式、不定积分、定积分的应用、广义积分、数项级数. 本书体系内容由浅入深, 符合学生认知规律. 每章都有提高课, 内容包括混沌现象与极限、连续函数不动点定理以及应用、极值问题与数学建模、泰勒公式与科学计算、积分算子的磨光性质以及应用等系列内容, 初步为学生打开现代数学的窗口. 同时每章都设置了系列探索类问题, 包括理论问题、应用问题, 培养学生应用数学解决实际问题的能力. 本教材有与之配套的MOOC课程, 充分利用多媒体信息技术, 将复杂数学问题直观化, 图文并茂. 视频课为读者营造一对一的视频授课环境, 通过扫描教材中的二维码进入视频课的学习, 使得学生对数学问题的理解更通透.

本书适用于普通高等院校工科专业学生使用, 也为自学者提供优质自学资源, 还可供相关科技工作者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析教程. 上册/杨小远主编. —北京: 科学出版社, 2018.9

“工科数学分析”MOOC 配套教材

ISBN 978-7-03-058599-8

I. ①工… II. ①杨… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第195599号

责任编辑: 张中兴 梁 清 孙翠勤 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年9月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018年9月第一次印刷 印张: 31

字数: 620 000

定价: 79.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

P 前言

reface



随着信息时代的到来, 数学越来越显示其强大的生命力, 工科各个专业对数学要求越来越高, 在新工科背景下我们出版了此套教材, 这是一套信息化研究型教材. 本套教材的特点如下:

1. 科学严谨的渐进式教材体系

教材体系由浅入深、循序渐进, 不仅涵盖了数学分析经典内容, 同时初步引入现代数学的内容, 符合学生的认知规律, 可以满足不同程度读者的要求.

2. 教材的可阅读性

数学是一门抽象的学科, 为了使读者更容易学懂数学, 本套教材以问题驱动的模式引入数学问题, 将许多复杂数学问题直观化, 图文并茂, 对数学问题的分析阐述详尽, 有丰富的例题, 大幅度提高了教材的可阅读性, 使得读者对数学问题知其然又要知其所以然.

3. 教材的前沿性

本套教材大部分章节都设有提高课, 将数学建模的思想引入教学, 增加了微积分解决实际问题的经典案例. 本套教材增加了混沌现象与极限、泰勒公式与多项式逼近、勒贝格积分初步、从傅里叶变换到小波变换初步、常微分方程与数学建模、非线性方程的数值求解、数值优化初步、积分算子与应用等一系列内容, 主要目的是初步为学生打开现代数学窗口, 开拓视野. 这些内容体系编排确保学生在数学分析体系下能学懂.

4. 教材的研究探索性

本套教材每一章都设有系列探索类问题, 包括基础理论类问题、应用类问题、实验类问题, 培养学生应用数学解决实际问题的能力, 创新能力的培养从研究一个问题开始.

5. 教材的信息化

本套教材有配套的 MOOC 视频课程, 并充分利用多媒体信息技术, 绘制了几千幅图解



释数学问题,使得数学课程变得生动,为读者营造了一对一的教学环境.读者可以通过扫描教材的二维码进入视频课的学习.视频课可以帮助读者更好地理解数学问题,感受数学思想.

感谢朱日东博士、吕静云博士、王敬凯博士为本书绘制全部配图.本套教材得到北京航空航天大学出版基金资助出版,在此表示谢意.

杨小远

2018年6月

C 目 录 Contents



前言

| | |
|------------------|----|
| 第 1 章 数列极限 | 1 |
| 1.1 数列极限的定义与基本性质 | 1 |
| 1.1.1 数列极限的定义 | 1 |
| 1.1.2 数列极限定义的应用 | 4 |
| 1.1.3 收敛数列的性质 | 10 |
| 1.1.4 数列极限的运算法则 | 14 |
| 1.1.5 无穷小量及其运算性质 | 21 |
| 1.1.6 趋向于无穷大的数列 | 21 |
| 1.2 单调有界定理与应用 | 24 |
| 1.2.1 单调有界定理 | 24 |
| 1.2.2 两个典型单调数列 | 26 |
| 1.2.3 单调数列综合例题 | 29 |
| 1.3 闭区间套定理与应用 | 33 |
| 1.3.1 闭区间套定理 | 33 |
| 1.3.2 闭区间套定理的应用 | 34 |
| 1.4 柯西收敛准则及其应用 | 36 |
| 1.4.1 列紧性定理 | 36 |
| 1.4.2 柯西收敛准则 | 37 |
| 1.4.3 柯西收敛准则的应用 | 39 |
| 1.5 确界存在定理与应用 | 42 |
| 1.5.1 确界存在定理 | 42 |



| | | |
|--------------|------------------------|-----------|
| 1.5.2 | 确界存在定理的应用 | 44 |
| 1.6 | 有限覆盖定理 | 46 |
| 1.7 | 实数系六个定理的等价性讨论 | 47 |
| 1.7.1 | 实数的连续与完备性讨论 | 47 |
| 1.7.2 | 无理数集合、有理数集合与实数集合的进一步讨论 | 51 |
| 1.8 | 数列的上下极限与应用 | 52 |
| 1.9 | 施笃兹定理与应用 | 56 |
| 1.9.1 | 施笃兹定理 | 56 |
| 1.9.2 | 施笃兹定理的应用 | 58 |
| 1.10 | 综合例题选讲 | 59 |
| 1.11 | 提高课 | 64 |
| 1.12 | 探索类问题 | 72 |
| 第 2 章 | 函数极限与连续 | 77 |
| 2.1 | 集合 | 77 |
| 2.1.1 | 集合的定义 | 77 |
| 2.1.2 | 集合的基本术语 | 78 |
| 2.1.3 | 集合的势的定义与基本性质 | 83 |
| 2.2 | 初等函数的讨论 | 87 |
| 2.2.1 | 初等函数回顾 | 87 |
| 2.2.2 | 函数曲线的数学描述 | 89 |
| 2.2.3 | 函数曲线与数学建模 | 90 |
| 2.2.4 | 函数基本性质讨论 | 91 |
| 2.3 | 函数极限的定义与基本理论 | 94 |
| 2.3.1 | 函数极限的定义 | 94 |
| 2.3.2 | 函数极限的基本性质 | 98 |
| 2.3.3 | 函数极限的四则运算与夹逼定理 | 101 |
| 2.3.4 | 复合函数的极限 | 103 |
| 2.3.5 | 典型例题 | 104 |
| 2.3.6 | 海涅原理 | 107 |



| | |
|----------------------------|------------|
| 2.3.7 柯西收敛定理 | 109 |
| 2.4 连续函数 | 112 |
| 2.4.1 连续函数与间断点分类 | 112 |
| 2.4.2 函数的间断点类型分析 | 115 |
| 2.4.3 连续函数的应用: 函数极限求解与函数方程 | 117 |
| 2.5 函数极限的其他形式与结论 | 120 |
| 2.5.1 单侧极限 | 120 |
| 2.5.2 自变量趋向于无穷大时函数的极限 | 122 |
| 2.5.3 典型例题 | 127 |
| 2.6 一致连续函数 | 133 |
| 2.6.1 函数一致连续的定义 | 133 |
| 2.6.2 函数一致连续典型例题 | 137 |
| 2.7 收敛速度讨论: 无穷小与无穷大阶的比较 | 140 |
| 2.7.1 无穷小阶的比较 | 140 |
| 2.7.2 无穷小阶的运算性质 | 143 |
| 2.7.3 无穷大阶的比较 | 145 |
| 2.8 有限闭区间上连续函数的整体性质 | 148 |
| 2.8.1 有限闭区间上连续函数的性质 | 148 |
| 2.8.2 连续函数性质的进一步讨论 | 153 |
| 2.9 综合例题选讲 | 156 |
| 2.10 提高课 | 162 |
| 2.10.1 有限覆盖定理的进一步认识 | 162 |
| 2.10.2 连续函数的不动点定理以及应用 | 164 |
| 2.11 探索类问题 | 167 |
| 第 3 章 导数的计算与应用 | 173 |
| 3.1 导数的定义与计算 | 173 |
| 3.1.1 导数的定义 | 173 |
| 3.1.2 导数的四则运算法则 | 176 |
| 3.1.3 四则运算应用举例 | 177 |



| | | |
|-------|----------------|-----|
| 3.1.4 | 复合函数逐层外推求导定理 | 178 |
| 3.1.5 | 复合函数逐层外推求导计算例题 | 179 |
| 3.1.6 | 反函数求导法则与应用 | 181 |
| 3.2 | 高阶导数 | 182 |
| 3.2.1 | 高阶导数的定义与计算 | 182 |
| 3.2.2 | 莱布尼茨求导公式与应用 | 184 |
| 3.2.3 | 高阶导数的计算 | 184 |
| 3.3 | 隐函数和参数方程的求导 | 186 |
| 3.4 | 微分中值定理 | 188 |
| 3.4.1 | 罗尔定理证明 | 188 |
| 3.4.2 | 罗尔定理应用 | 189 |
| 3.4.3 | 拉格朗日中值定理证明 | 191 |
| 3.4.4 | 拉格朗日中值定理应用 | 193 |
| 3.4.5 | 柯西中值定理 | 194 |
| 3.4.6 | 柯西中值定理应用 | 195 |
| 3.5 | 函数的单调性 | 197 |
| 3.5.1 | 函数单调性判定定理 | 197 |
| 3.5.2 | 函数单调区间分析应用例题 | 198 |
| 3.6 | 极值问题 | 200 |
| 3.6.1 | 极值问题判定定理 | 200 |
| 3.6.2 | 极值问题求解 | 201 |
| 3.6.3 | 函数的最大最小值 | 203 |
| 3.7 | 凹凸函数 | 206 |
| 3.7.1 | 函数凹凸的定义及詹森定理 | 206 |
| 3.7.2 | 凹凸函数的判定定理 | 207 |
| 3.7.3 | 凹凸函数应用 | 210 |
| 3.8 | 洛必达法则 | 213 |
| 3.8.1 | 洛必达法则 | 213 |
| 3.8.2 | 洛必达法则应用 | 215 |



| | | |
|--------------|--------------------|------------|
| 3.9 | 函数作图 | 217 |
| 3.10 | 综合例题选讲 | 219 |
| 3.11 | 提高课 | 223 |
| 3.11.1 | 数学建模: 彩虹现象 | 223 |
| 3.11.2 | 数学建模: 罐子设计 | 225 |
| 3.11.3 | 方程求根 | 227 |
| 3.11.4 | 几类特殊函数性质的讨论 | 231 |
| 3.12 | 探索类问题 | 236 |
| 第 4 章 | 泰勒公式 | 239 |
| 4.1 | 微分的定义与运算性质 | 239 |
| 4.1.1 | 微分的定义与计算 | 239 |
| 4.1.2 | 高阶微分的定义与计算 | 242 |
| 4.1.3 | 微分的应用: 近似计算 | 243 |
| 4.2 | 带佩亚诺型余项的泰勒公式 | 243 |
| 4.2.1 | 带佩亚诺型余项的泰勒公式 | 243 |
| 4.2.2 | 常用函数的泰勒展开 (佩亚诺型余项) | 245 |
| 4.2.3 | 泰勒公式局部逼近 | 247 |
| 4.2.4 | 函数的泰勒渐近展开 | 248 |
| 4.3 | 带拉格朗日余项的泰勒公式 | 250 |
| 4.3.1 | 带拉格朗日余项的泰勒公式 | 250 |
| 4.3.2 | 泰勒公式的应用 | 252 |
| 4.3.3 | 泰勒公式典型例题 | 255 |
| 4.4 | 综合例题选讲 | 258 |
| 4.5 | 提高课 | 261 |
| 4.5.1 | 泰勒公式在科学计算中的应用 | 261 |
| 4.5.2 | 拉格朗日插值逼近 | 264 |
| 4.6 | 探索类问题 | 266 |
| 第 5 章 | 不定积分 | 269 |
| 5.1 | 不定积分的定义与基本性质 | 269 |



| | | |
|--------------|---------------|------------|
| 5.2 | 第一类换元公式与应用 | 271 |
| 5.3 | 分部积分公式与应用 | 276 |
| 5.4 | 第二类换元公式与应用 | 278 |
| 5.5 | 几类特殊函数的不定积分 | 282 |
| 5.5.1 | 有理函数的不定积分 | 283 |
| 5.5.2 | 三角函数有理式的不定积分 | 286 |
| 5.5.3 | 无理根式的不定积分 | 287 |
| 5.6 | 综合例题选讲 | 289 |
| 5.7 | 探索类问题 | 295 |
| 第 6 章 | 定积分 | 297 |
| 6.1 | 定积分的定义与基本运算性质 | 297 |
| 6.2 | 函数可积性讨论 | 303 |
| 6.2.1 | 函数可积定理 | 303 |
| 6.2.2 | 可积函数类 | 310 |
| 6.3 | 微积分基本定理 | 318 |
| 6.3.1 | 牛顿-莱布尼茨公式 | 318 |
| 6.3.2 | 微积分基本定理 | 320 |
| 6.4 | 定积分的计算 | 325 |
| 6.4.1 | 定积分的分部积分公式 | 325 |
| 6.4.2 | 定积分的换元公式 | 329 |
| 6.5 | 定积分中值定理 | 335 |
| 6.5.1 | 定积分第一中值定理 | 335 |
| 6.5.2 | 定积分第二中值定理 | 337 |
| 6.5.3 | 定积分第三中值定理 | 340 |
| 6.6 | 勒贝格定理 | 341 |
| 6.6.1 | 勒贝格定理 | 341 |
| 6.6.2 | 勒贝格定理的应用 | 343 |
| 6.7 | 综合例题选讲 | 345 |
| 6.8 | 提高课 | 352 |



| | | |
|--------------|--------------------|------------|
| 6.8.1 | 积分算子的应用: 函数的磨光 | 352 |
| 6.8.2 | 定积分的数值计算 | 356 |
| 6.8.3 | 勒贝格积分初步 | 363 |
| 6.9 | 探索类问题 | 367 |
| 第 7 章 | 定积分的应用 | 370 |
| 7.1 | 定积分解决实际问题的方法 | 370 |
| 7.2 | 平面图形面积的计算 | 371 |
| 7.2.1 | 直角坐标系下图形面积计算 | 371 |
| 7.2.2 | 参数方程表示的曲线围成平面图形的面积 | 373 |
| 7.2.3 | 极坐标系下平面图形面积的计算 | 375 |
| 7.3 | 旋转曲面面积的计算 | 377 |
| 7.4 | 旋转体体积的计算方法 | 383 |
| 7.5 | 曲线的弧长 | 388 |
| 7.6 | 平面曲线的曲率 | 391 |
| 7.7 | 定积分的物理应用 | 393 |
| 7.7.1 | 变力做功与压力压强 | 393 |
| 7.7.2 | 液体的压力与压强 | 394 |
| 7.7.3 | 引力问题 | 395 |
| 7.7.4 | 力矩和质心 | 397 |
| 7.8 | 探索类问题 | 399 |
| 第 8 章 | 广义积分 | 401 |
| 8.1 | 无穷积分的基本概念与性质 | 401 |
| 8.1.1 | 无穷积分的定义 | 401 |
| 8.1.2 | 无穷积分的计算 | 405 |
| 8.2 | 无穷积分敛散性的判别方法 | 408 |
| 8.2.1 | 无穷区间上非负函数积分的敛散性判别 | 408 |
| 8.2.2 | 无穷积分的狄利克雷和阿贝尔判定定理 | 412 |
| 8.3 | 瑕积分 | 419 |
| 8.4 | 综合例题选讲 | 428 |



| | |
|----------------------------|------------|
| 8.5 探索类问题 | 431 |
| 第 9 章 数项级数 | 433 |
| 9.1 数项级数的基本概念与性质 | 433 |
| 9.1.1 数项级数的概念 | 433 |
| 9.1.2 数项级数的性质 | 434 |
| 9.2 正项级数 | 439 |
| 9.2.1 正项级数的比较判别法 | 439 |
| 9.2.2 正项级数的柯西积分判别法 | 443 |
| 9.2.3 正项级数的柯西判别法 | 446 |
| 9.2.4 正项级数的达朗贝尔判别法 | 448 |
| 9.2.5 正项级数的拉贝判别法 | 451 |
| 9.3 一般级数收敛问题讨论 | 455 |
| 9.3.1 交错级数 | 455 |
| 9.3.2 狄利克雷判别法和阿贝尔判别法 | 456 |
| 9.3.3 绝对收敛和条件收敛级数 | 460 |
| 9.3.4 绝对收敛级数的性质 | 464 |
| 9.3.5 广义积分与数项级数 | 467 |
| 9.4 综合例题选讲 | 469 |
| 9.5 提高课 | 473 |
| 9.5.1 级数的乘法 | 473 |
| 9.5.2 无穷乘积 | 476 |
| 9.6 探索类问题 | 480 |
| 参考文献 | 482 |



工欲善其事，必先利其器。极限是微积分理论的基础，要想真正掌握微积分这门学科的实质，就必须掌握极限的概念。这一章讨论数列极限的定义与基本性质以及实数系六个定理：单调有界定理、闭区间套定理、列紧性定理、柯西收敛准则、确界存在定理和有限覆盖定理。提高拓展部分讨论了数列在实际问题中的应用。本章的最后设置了系列研究探索类问题。



1.1 数列极限的定义与基本性质

扫码学习

1.1.1 数列极限的定义

例 1.1.1 利用数学家刘徽提出的方法：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割”，求圆的面积。

解 如图 1.1.1 所示，设圆的内接正六边形的面积为 A_1 ，内接正十二边形的面积为 A_2 ，依次类推，内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积为 A_n ，得到点列 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ ，该点列 $\{A_n\}$ 逐步逼近圆的面积 S 。

例 1.1.2 庄子提出的截杖问题：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的数学分析。

解 如图 1.1.2 所示，长度为 1 尺的杖，第一天截下 $X_1 = \frac{1}{2}$ ，第二天截下 $X_2 = \frac{1}{2^2}$ ， \dots ，第 n 天截下 $X_n = \frac{1}{2^n}$ ，依次类推得到点列 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ ，该点列 $\{X_n\}$ 逐步逼近 0。

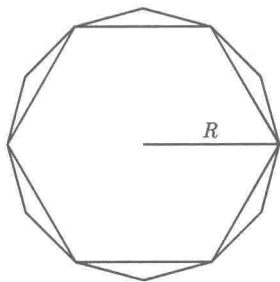


图 1.1.1

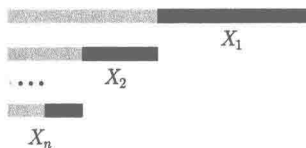


图 1.1.2

例 1.1.1 和例 1.1.2 利用数列的变化趋势解决实际问题。下面给出数列的定义。



定义 1.1.1 按照自然数编号排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

称为数列, 记为 $\{x_n\}$ 或者 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, x_n 为数列的通项.

例如, 以 2^n , $\frac{\sin n}{2^n}$, $\arctan n$ 为通项的数列分别为

$$\{2^n\} = \{2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots\}$$

$$\left\{\frac{\sin n}{2^n}\right\} = \left\{\frac{\sin 1}{2}, \frac{\sin 2}{4}, \frac{\sin 3}{8}, \dots, \frac{\sin n}{2^n}, \dots\right\}$$

$$\{\arctan n\} = \{\arctan 1, \arctan 2, \dots, \arctan n, \dots\}$$

例 1.1.3 分析数列的变化趋势: $a_n = n \sin \frac{1}{n}$, $b_n = \arctan n$, $c_n = \sin n$, $d_n = \sin \sqrt{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

解 如图 1.1.3 所示, 通过四个数列变化的几何直观图可以发现, 随着 n 的不断增大, 数列 $\left\{n \sin \frac{1}{n}\right\}$ 逐步逼近 1, $\{\arctan n\}$ 逐步逼近 $\frac{\pi}{2}$, 而数列 $\{\sin n\}$ 和 $\{\sin \sqrt{n}\}$ 没有逼近任何实数.

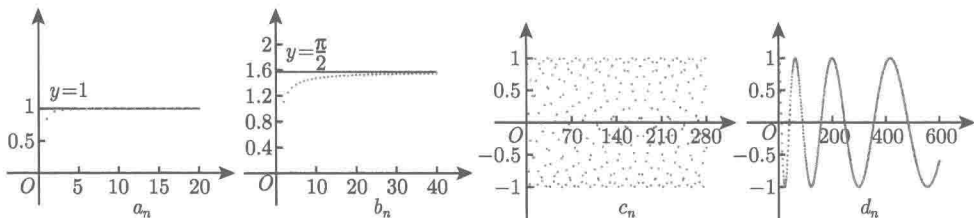


图 1.1.3

随着 n 的增大, 逐步逼近一个常数的数列是我们将要重点讨论的, 下面用数学语言刻画数列变化的规律.

例 1.1.4 分析数列 $\left\{a_n = \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n}\right\}$ 的变化趋势, 用数学语言刻画数列的变化规律.

解 (1) 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2$, 即对任意自然数 $n > N_1 = 2$, 都有 $|a_n - 0| < \frac{1}{2}$, 或者 $\{a_n\}_{n=3}^{\infty} \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(2) 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2^2$, 即对任意自然数 $n > N_2 = 2^2$, 都有 $|a_n - 0| < \frac{1}{2^2}$, 或者 $\{a_n\}_{n=5}^{\infty} \subset \left(-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right)$.

(3) 依次类推, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2^k$, 即对任意自然数 $n > N_k = 2^k$, 都有 $|a_n - 0| < \frac{1}{2^k}$, 或者 $\{a_n\}_{n=2^k+1}^{\infty} \subset \left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)$. 如图 1.1.4 所示.

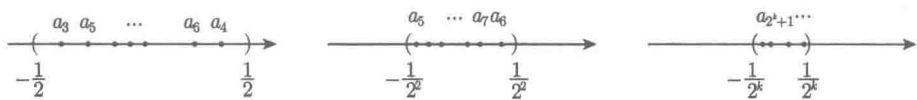


图 1.1.4

图 1.1.4 是数列 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n} \right\}$ 逐步逼近零的几何示意图, 即

$$\{a_n\}_{n=2^k+1}^{\infty} \subset \left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

当 k 充分大时, 区间 $\left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right)$ 的长度趋向于零, 因此 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{n} \right\}$ 趋于 0.

一般情况下, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|a_n - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > \frac{1}{\varepsilon}$, 因此存在自然数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 对任意自然数 n , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \varepsilon$. 这里符号 $[\cdot]$ 是取整运算.

下面给出数列极限的严格的数学定义.

定义 1.1.2 给定数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 a , 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在一个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.1)$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是收敛的, 并称 a 为该数列的极限, 或者 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 如果不存在实数 a , 使得 $\{a_n\}$ 以 a 为极限, 则称数列 $\{a_n\}$ 是发散数列.

注 1.1.1 定义 1.1.2 中的 ε 刻画了 a_n 与 a 的逼近程度, ε 可以限制为小于某一正数, 比如限制 $0 < \varepsilon \leq 1$; 定义中的 N 和 ε 有关, 仅要求存在, 一般 ε 越小, N 越大.

在本套教材中用 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ 表示自然数集合, $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 表示整数集合, \mathbf{Q} 表示全体有理数集合, \mathbf{R} 表示全体实数集合.

定义 1.1.2 可以用下述逻辑符号表示:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*, \forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.2)$$

其中 \forall 表示任意选取, \exists 表示存在, 冒号: 表示满足的结论.

数列可看成是数轴上的一列点, 也可以看成定义在自然数集上的函数. 数列极限的几何意义可以用图形直观地反映出来.

把数列 $\{x_n\}$ 看成数轴上的一列点, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 意味着对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得 $\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 如图 1.1.5 所示.

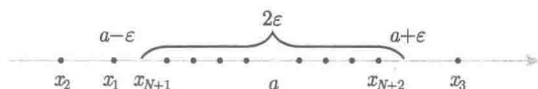


图 1.1.5

把数列 $\{x_n\}$ 看成自然数集上的函数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 意味着对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使得 $\{(n, x_n)\}_{n=N+1}^{\infty} \subset (N, +\infty) \times (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 如图 1.1.6 所示.

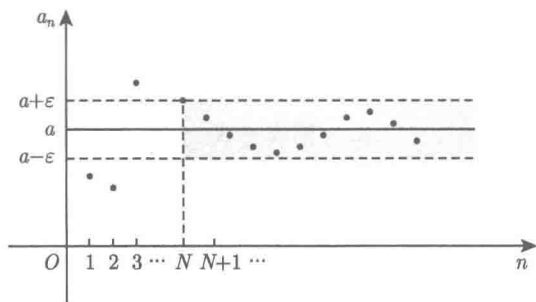


图 1.1.6

由上述讨论结果,可以得到下面的结论.

结论 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*$, 使得

$$\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty} \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

结论 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件为: $\forall \varepsilon > 0, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中只有有限项落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之外.

下面讨论数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在的表述方法. 首先由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的定义推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a$ 的定义.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*, \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.3)$$

↓ ↓ ↓ ↓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a : \quad \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}^*, \exists n_0 > N : |a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0 \quad (1.1.4)$$

这里 \forall 的否定是 \exists, \exists 的否定是 \forall .

(1.1.4) 式的含义是存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意自然数 N , 无论多么大, 都存在自然数 $n_0 > N$, 使得 $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

下面给出数列极限不存在的定义.

定义 1.1.3 给定数列 $\{a_n\}$, 若对任意实数 $a \in \mathbf{R}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 $N \in \mathbf{N}^*$, 总存在 $n_0 > N$, 使得 $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$, 则称 $\{a_n\}$ 为发散数列. 用逻辑符号表述为

$$\forall a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}^*, \exists n_0 > N : |a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0 \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) 式的含义是对于任意实数 a , 都存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意自然数 N , 无论多么大, 都存在自然数 $n_0 > N$, 使得 $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

1.1.2 数列极限定义的应用

利用数列极限的定义证明极限存在的关键是确定定义 1.1.2 中的自然数 $N(\varepsilon)$, 一般采用反分析和不等式放大的方法确定.

下面介绍几个常用等式和不等式, 其证明留给读者完成.