MOOC

"工科数学分析"MOOC配套教材

工科数学分析教程

（上 册）

主编 杨小远

科学出版社

"工科数学分析"MOOC配套教材

工科数学分析教程

(上 册)

主　编　杨小远

参　编　张英晗　魏光美　冯伟杰
高颖辉　张奇业

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

《工科数学分析教程(上册)》是一本信息化研究型教材. 本书包括数列极限、函数极限与连续、导数的计算与应用、泰勒公式、不定积分、定积分的应用、广义积分、数项级数. 本书体系内容由浅入深, 符合学生认知规律. 每章都有提高课, 内容包括混沌现象与极限、连续函数不动点定理以及应用、极值问题与数学建模、泰勒公式与科学计算、积分算子的磨光性质以及应用等系列内容, 初步为学生打开现代数学的窗口. 同时每章都设置了系列探索类问题, 包括理论问题、应用问题, 培养学生应用数学解决实际问题的能力. 本教材有与之配套的MOOC课程, 充分利用多媒体信息技术, 将复杂数学问题直观化, 图文并茂. 视频课为读者营造一对一的视频授课环境, 通过扫描教材中的二维码进入视频课的学习, 使得学生对数学问题的理解更通透.

本书适用于普通高等院校工科专业学生使用, 也为自学者提供优质自学资源, 还可供相关科技工作者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析教程. 上册/杨小远主编. —北京: 科学出版社, 2018.9
"工科数学分析" MOOC配套教材
ISBN 978-7-03-058599-8

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018) 第195599号

责任编辑: 张中兴 梁 清 孙翠勤 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018年9月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2018年9月第一次印刷 印张: 31
字数: 620 000

定价: 79.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

Preface

随着信息时代的到来, 数学越来越显示其强大的生命力, 工科各个专业对数学要求越来越高, 在新工科背景下我们出版了此套教材, 这是一套信息化研究型教材. 本套教材的特点如下:

1. 科学严谨的渐进式教材体系

教材体系由浅入深、循序渐进, 不仅涵盖了数学分析经典内容, 同时初步引入现代数学的内容, 符合学生的认知规律, 可以满足不同程度读者的要求.

2. 教材的可阅读性

数学是一门抽象的学科, 为了使读者更容易学懂数学, 本套教材以问题驱动的模式引入数学问题. 将许多复杂数学问题直观化, 图文并茂, 对数学问题的分析阐述详尽, 有丰富的例题, 大幅度提高了教材的可阅读性, 使得读者对数学问题知其然又要知其所以然.

3. 教材的前沿性

本套教材大部分章节都设有提高课, 将数学建模的思想引入教学, 增加了微积分解决实际问题的经典案例. 本套教材增加了混沌现象与极限、泰勒公式与多项式逼近、勒贝格积分初步、从傅里叶变换到小波变换初步、常微分方程与数学建模、非线性方程的数值求解、数值优化初步、积分算子与应用等一系列内容, 主要目的是初步为学生打开现代数学窗口, 开拓视野. 这些内容体系编排确保学生在数学分析体系下能学懂.

4. 教材的研究探索性

本套教材每一章都设有系列探索类问题, 包括基础理论类问题、应用类问题、实验类问题, 培养学生应用数学解决实际问题的能力, 创新能力的培养从研究一个问题开始.

5. 教材的信息化

本套教材有配套的 MOOC 视频课程, 并充分利用多媒体信息技术, 绘制了几千幅图解

释数学问题, 使得数学课程变得生动, 为读者营造了一对一的教学环境. 读者可以通过扫描教材的二维码进入视频课的学习. 视频课可以帮助读者更好地理解数学问题，感受数学思想.

感谢朱日东博士、吕静云博士、王敬凯博士为本书绘制全部配图. 本套教材得到北京航空航天大学出版基金资助出版, 在此表示谢意.

杨小远

2018 年 6 月

目录 Contents

第1章 Chapter 1 数列极限

工欲善其事，必先利其器. 极限是微积分理论的基础，要想真正掌握微积分这门学科的实质，就必须掌握极限的概念. 这一章讨论数列极限的定义与基本性质以及实数系六个定理：单调有界定理、闭区间套定理、列紧性定理、柯西收敛准则、确界存在定理和有限覆盖定理. 提高拓展部分讨论了数列在实际问题中的应用. 本章的最后设置了系列研究探索类问题.

1.1 数列极限的定义与基本性质

扫码学习

1.1.1 数列极限的定义

例 1.1.1 **利用数学家刘徽提出的方法：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割”，求圆的面积.**

解 如图 1.1.1 所示，设圆的内接正六边形的面积为 A_1，内接正十二边形的面积为 A_2，依次类推，内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积为 A_n，得到点列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$，该点列 $\{A_n\}$ 逐步逼近圆的面积 S.

例 1.1.2 **庄子提出的截杖问题：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的数学分析.**

解 如图 1.1.2 所示，长度为 1 尺的杖，第一天截下 $X_1=\dfrac{1}{2}$，第二天截下 $X_2=\dfrac{1}{2^2}, \cdots$，第 n 天截下 $X_n=\dfrac{1}{2^n}$，依次类推得到点列 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n, \cdots$，该点列 $\{X_n\}$ 逐步逼近 0.

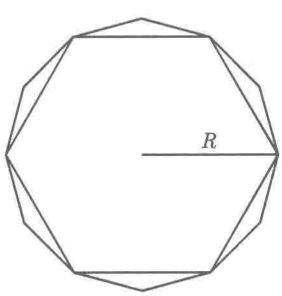

图 1.1.1

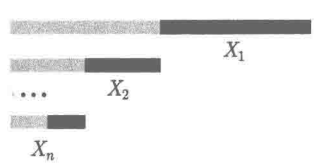

图 1.1.2

例 1.1.1 和例 1.1.2 利用数列的变化趋势解决实际问题. 下面给出数列的定义.

定义 1.1.1 按照自然数编号排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列, 记为 $\{x_n\}$ 或者 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, x_n 为数列的通项.

例如, 以 2^n, $\dfrac{\sin n}{2^n}$, $\arctan n$ 为通项的数列分别为

$$\{2^n\} = \{2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots\}$$
$$\left\{\frac{\sin n}{2^n}\right\} = \left\{\frac{\sin 1}{2}, \frac{\sin 2}{4}, \frac{\sin 3}{8}, \cdots, \frac{\sin n}{2^n}, \cdots\right\}$$
$$\{\arctan n\} = \{\arctan 1, \arctan 2, \cdots, \arctan n, \cdots\}$$

例 1.1.3 分析数列的变化趋势: $a_n = n\sin\dfrac{1}{n}, b_n = \arctan n, c_n = \sin n, d_n = \sin\sqrt{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$.

解 如图 1.1.3 所示, 通过四个数列变化的几何直观图可以发现, 随着 n 的不断增大, 数列 $\left\{n\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ 逐步逼近 1, $\{\arctan n\}$ 逐步逼近 $\dfrac{\pi}{2}$, 而数列 $\{\sin n\}$ 和 $\{\sin\sqrt{n}\}$ 没有逼近任何实数.

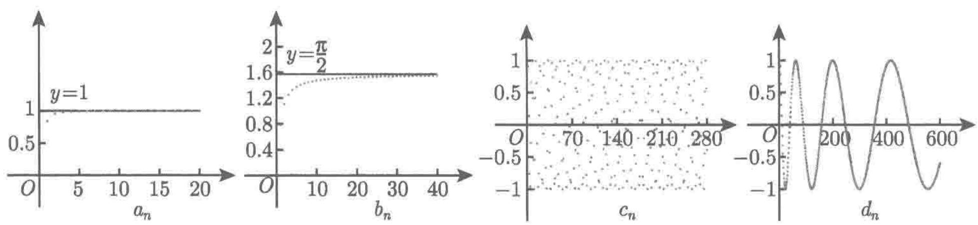

图 1.1.3

随着 n 的增大, 逐步逼近一个常数的数列是我们将要重点讨论的, 下面用数学语言刻画数列变化的规律.

例 1.1.4 分析数列$\left\{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{1}{n}\right\}$的变化趋势, 用数学语言刻画数列的变化规律.

解 (1) 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2$, 即对任意自然数 $n > N_1 = 2$, 都有 $|a_n - 0| < \dfrac{1}{2}$, 或者 $\{a_n\}_{n=3}^{\infty} \subset \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

(2) 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2^2$, 即对任意自然数 $n > N_2 = 2^2$, 都有 $|a_n - 0| < \dfrac{1}{2^2}$, 或者 $\{a_n\}_{n=5}^{\infty} \subset \left(-\dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^2}\right)$.

(3) 依次类推, 取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$, 如果要使 $|a_n - 0| = \left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 则只需 $n > 2^k$, 即对任意自然数 $n > N_k = 2^k$, 都有 $|a_n - 0| < \dfrac{1}{2^k}$, 或者 $\{a_n\}_{n=2^k+1}^{\infty} \subset \left(-\dfrac{1}{2^k}, \dfrac{1}{2^k}\right)$. 如图 1.1.4 所示.

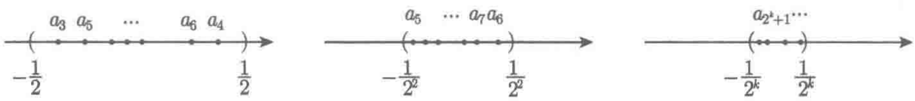

图 1.1.4

图 1.1.4 是数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}\right\}$ 逐步逼近零的几何示意图, 即

$$\{a_n\}_{n=2^k+1}^{\infty} \subset \left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right), \quad k=1,2,\cdots$$

当 k 充分大时, 区间 $\left(-\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k}\right)$ 的长度趋向于零, 因此 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{1}{n}\right\}$ 趋于 0.

一般情况下, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 要使 $|a_n-0|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$, 则只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 因此存在自然数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 对任意自然数 n, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-0|<\varepsilon$. 这里符号 $[\cdot]$ 是取整运算.

下面给出数列极限的严格的数学定义.

定义 1.1.2 **给定数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 a, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 都存在一个自然数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有**

$$|a_n-a|<\varepsilon \tag{1.1.1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是收敛的, 并称 a 为该数列的极限, 或者 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 如果不存在实数 a, 使得 $\{a_n\}$ 以 a 为极限, 则称数列 $\{a_n\}$ 是发散数列.

注 1.1.1 **定义 1.1.2 中的 ε 刻画了 a_n 与 a 的逼近程度, ε 可以限制为小于某一正数, 比如限制 $0<\varepsilon\leqslant 1$; 定义中的 N 和 ε 有关, 仅要求存在, 一般 ε 越小, N 越大.**

在本套教材中用 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$ 表示自然数集合, $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 表示整数集合, $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合, $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合.

定义 1.1.2 可以用下述逻辑符号表示:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}^*, \forall n>N: |a_n-a|<\varepsilon \tag{1.1.2}$$

其中 $\forall$ 表示任意选取, $\exists$ 表示存在, 冒号 : 表示满足的结论.

数列可看成是数轴上的一列点, 也可以看成定义在自然数集上的函数. 数列极限的几何意义可以用图形直观地反映出来.

把数列 $\{x_n\}$ 看成数轴上的一列点, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 意味着对任意的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使得 $\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}\subset(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 如图 1.1.5 所示.

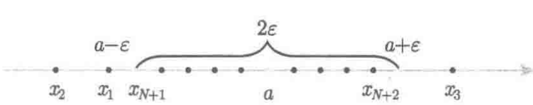

图 1.1.5

把数列 $\{x_n\}$ 看成自然数集上的函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 意味着对任意的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 使得 $\{(n,x_n)\}_{n=N+1}^{\infty}\subset(N,+\infty)\times(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 如图 1.1.6 所示.

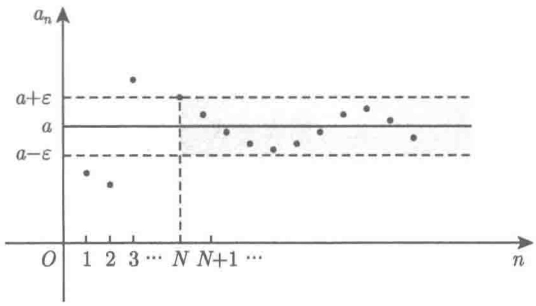

图 1.1.6

由上述讨论结果, 可以得到下面的结论.

结论 1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ **的充要条件为**: $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}^*$, **使得**

$$\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty} \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

结论 2 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ **的充要条件为**: $\forall\varepsilon>0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **中只有有限项落在** $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ **之外.**

下面讨论数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在的表述方法. 首先由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的定义.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a: \quad \forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}^*, \forall n>N: |a_n-a|<\varepsilon \tag{1.1.3}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a: \quad \exists\varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbf{N}^*, \exists n_0>N: |a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0 \tag{1.1.4}$$

这里 $\forall$ 的否定是 $\exists$, $\exists$ 的否定是 $\forall$.

(1.1.4) 式的含义是存在 $\varepsilon_0>0$, 对于任意自然数 N, 无论多么大, 都存在自然数 $n_0>N$, 使得 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

下面给出数列极限不存在的定义.

定义 1.1.3 **给定数列** $\{a_n\}$, **若对任意实数** $a\in\mathbf{R}$, **存在** $\varepsilon_0>0$, **对任意** $N\in\mathbf{N}^*$, **总存在** $n_0>N$, **使得** $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$, **则称** $\{a_n\}$ **为发散数列. 用逻辑符号表述为**

$$\forall a\in R, \exists\varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbf{N}^*, \exists n_0>N: |a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0 \tag{1.1.5}$$

(1.1.5) 式的含义是对于任意实数 a, **都存在一个** $\varepsilon_0>0$, **对任意自然数** N, **无论多么大, 都存在自然数** $n_0>N$, **使得** $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

1.1.2 数列极限定义的应用

利用数列极限的定义证明极限存在的关键是确定定义 1.1.2 中的自然数 $N(\varepsilon)$, 一般采用反分析和不等式放大的方法确定.

下面介绍几个常用等式和不等式, 其证明留给读者完成.