《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

最短线

[苏]柳斯捷尔尼克 著
越民义 译

◎最简单的面上的最短线
◎曲面论里的几点知识
◎回转曲面上的短程线
◎和紧张细线的位能有关的问题
◎等周问题
◎费马原理和它的推论

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

最短线

[苏]柳斯捷尔尼克 著
越民义 译

◎最简单的面上的最短线
◎曲面论里的几点知识
◎回转曲面上的短程线
◎和紧张细线的位能有关的问题
◎等周问题
◎费马原理和它的推论

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

一只苍蝇要想从一道墙壁上的点 A 爬到临近一道墙壁上的点 B,怎样爬路程最短？用一定长短的一道篱笆,怎样围所包含的面积最大？解决这一类问题,在数学上是属于变分学的范围的.

这本小册子完全用初等数学作基础,来向中等程度的读者介绍变分学.作者把一些数学问题联系到物理问题上去,证明虽然不是很严格,却很简单而直观,使读者很容易领会,而且对于读者发展这方面的数学才能也有帮助.

图书在版编目(CIP)数据

最短线/(苏)柳斯捷尔尼克著;越民义译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5603-7237-2

Ⅰ.①最… Ⅱ.①柳… ②越… Ⅲ.①初等数学-普及读物 Ⅳ.①O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 018911 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 10.5 字数 108 千字
版 次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7237-2
定 价 38.00 元

◎原序

在这本小册子里,我们从初等数学的观点来研究一系列的所谓变分问题.这些问题研究一些和曲线有关的量,并且寻求那些使这种量达到它的极大值或极小值的曲线.下列问题就是例子:在某个面上联结两定点的一切曲线当中求出最短的;在平面上有一定长度的闭曲线当中求出包围最大面积的曲线,等等.

本书的材料基本上曾经由作者在国立莫斯科大学中学数学小组上讲过.第一讲(第 0—10 节)的内容基本上和 1940 年出版的作者所著的小册子《短程线》的内容一致.

我只假定读者熟悉初等数学课程.第一章完全是带初等数学性质的,其余几章也不要求专门知识,不过要求对数学课程有较好的素养,并且善于思索.

本书的全部材料可以看成是变分学的初步介绍(所谓变分学就是数学当中系统地研究有关求泛函数的极大、极小问题的一个分支).变分学不属于比

较精简的例如工科大学里所学的“高等数学”课程范围之内.然而对于开始学习“高等数学”课程的人来说,我们认为事先稍微多看一些书也不是毫无用处的.

对于熟悉初等数学分析的读者来说,要把书本里所叙述的一些不严格的定义和论证改得很严格,当不会有什么困难,例如,不应当说微小的量和它的近似等式(大致等于),而应当说无穷小量和它的等价.如果那些要求更高的读者终究对于这里的讨论里所容许的严格程度和逻辑上的完善程度感到不满足,那么可以对他说明,这需要有一些数学分析的基本概念的逻辑上的磨炼,就像他在大学分析课程里所遇到的.没有这样的磨炼,在分析里像变分学这样的部分就不可能作严格的和系统的叙述.

数学分析产生了有力的分析工具,它有时自动地解决了许多困难问题.但在掌握数学的所有阶段当中,特别重要的是看出所要解决的问题的简单几何意义和物理意义.要学会像数学家们所说的“在手上”解决问题,就是说,要学会去发现那些虽然并不严格、却很简单而直观的证明.

假若这本小册子对于读者发展这方面的数学才能多少有些帮助,著者就认为他编写本书没有白费气力.

柳斯捷尔尼克

◎

目录

第一讲

第二讲

第 一 讲

第1章 最简单的面上的最短线

§0 从一道南京大学自主招生试题谈起

在2009年南京大学自主招生试题中有一道题如下：

圆柱形玻璃杯高8 cm，杯口周长12 cm. 内壁距杯口2 cm的点A处有一点蜜糖，点A正对面的外壁（不是点A的外壁）距杯底2 cm的点B处有一小虫，若小虫沿杯壁爬向蜜糖处饱食一顿，最少要爬______ cm.（不计杯壁厚度与小虫的尺寸）

解 见图0. 解法也很简单.

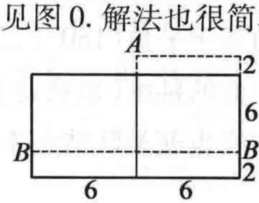

图0

将圆柱体的侧面展开,并将点 A 从内部翻折出来,易得线段 AB 最短,$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm.

此题背景深远,属于最短线问题.

§1 多面角的面上的最短线

1. 二面角上的最短线 读者当然知道,联结平面上两点的所有线当中,最短的线是线段.

我们现在来研究任意一个面上的两点 A 和 B,它们可以用这个面上的无数多条线来联结. 但是这些线当中哪一条最短? 换句话说,要想沿这个面从点 A 到点 B,应该怎样走路程最短?

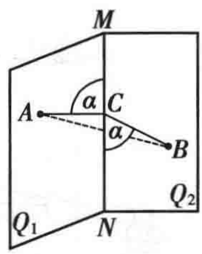

图 1

我们先就一些最简单的面来解这一问题. 我们从这样的一个问题开始:给定一个二面角[①],它的两个面是 Q_1 和 Q_2,棱是 MN;在这两个面上给定两点:Q_1 上的点 A 和 Q_2 上的点 B(图 1). 点 A 和点 B 可以用无数多条在这个二面角的面 Q_1 和 Q_2 上的线联结起来. 我们要在这些线当中求出最短的一条.

若二面角等于平角(180°),那么面 Q_1 和 Q_2 当中的一面是另一面的延续(也就是合成一个平面),因而所寻求的最短线也就是联结点 A 和点 B 的直线段 AB.

① 图 1 上所画的只是这个无限延伸的二面角的一部分.

但若这个二面角不等于平角，面 Q_1 和 Q_2 就不可能一面是另一面的延续，因而直线段 AB 就不在这两个面上. 我们把这两面当中的一面绕着直线 MN 转，使这两面变成一面是另一面的延续，换句话说，把这个二面角展在一个平面上(图 2). 面 Q_1 和 Q_2 变成了半平面 Q_1' 和 Q_2'；直线 MN 变成了分开 Q_1' 和 Q_2' 的直线 $M'N'$；点 A 和 B 变成了点 A' 和 B'(A' 落在 Q_1' 上，B' 落在 Q_2' 上)；在二面角的面上联结 A，B 两点的每一条线也都变成了我们的平面上联结 A'，B' 两点的和原来同样长短的线. 二面角的面上联结 A，B 两点的最短线，也就是变成了直线段 $A'B'$. 这条线段交直线 $M'N'$ 于某一点 C'，$\angle A'C'M'$ 和 $\angle N'C'B'$ 是对顶角，所以相等(图 2). 它们每一个的大小记作 α.

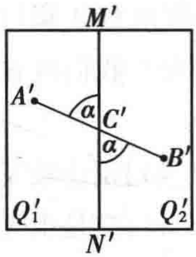

图 2

我们现在把 Q_1' 和 Q_2' 绕 $M'N'$ 转，使得又重新得到原来的二面角. 半平面 Q_1' 和 Q_2' 再变成这个二面角的面 Q_1 和 Q_2，$M'N'$ 变成棱 MN，而点 A' 和 B' 变成点 A(在面 Q_1 上)和点 B(在面 Q_2 上)，直线段 $A'B'$ 就变成在这个二面角的面上联结 A，B 两点的最短线. 这条最短线显然就是折线 ACB，它的 AC 那一段在面 Q_1 上，CB 这一段在面 Q_2 上. 显然，由两个互等的角 $\angle A'C'M'$ 和 $\angle N'C'B'$ 所变成的角 $\angle ACM$ 和 $\angle NCB$ 仍等于 α，也就是说它们仍相等. 因此，在二面角的面上联结它上面的(不在同一面上的)两点 A 和 B 的线当中最短的是

这样的一条折线 ACB，它的顶点 C 在棱 MN 上，而它的两条边和棱所作成的两个角 $\angle ACM$ 和 $\angle NCB$ 相等.

我们有时给现在所讨论的这个问题带上一点半开玩笑的性质. 一只苍蝇要想从一道墙壁上的点 A 爬到临近一道墙壁上的点 B. 假若它要沿墙壁从点 A 爬过最短的路径到达点 B，试问它应该怎样爬？我们现在要得出解答已经不难了.

2. 多面角面上的最短线 我们现在来讨论比较复杂一点的情形. 给定一个多面角的面（图 3），它是由几个面 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，…，Q_n 和棱 M_1N_1，M_2N_2，M_3N_3，…，$M_{n-1}N_{n-1}$ 所组成（图 3 所画的是 $n=4$ 的情形）. 在这个多面角的两个不同的面上（比如 Q_1 和 Q_4 上）给定两点 A 和 B. 现在要求出这个多面角的面上联结点 A 和 B 的最短线.

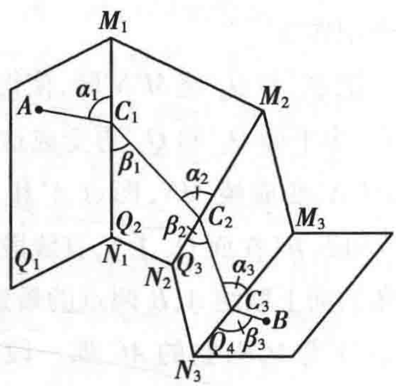

图 3

假设最短的是线 AB，又设这条线通过面 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4. 我们现在把这些面所组成的这一部分多面角展在一个平面上（图 4）. 这时候这些面变成了这个平

面上的多边形 $Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'$，而把面 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 两两接连起来的棱 M_1N_1,M_2N_2,M_3N_3 变成了多边形 $Q_1'Q_2'Q_3'Q_4'$的边 $M_1'N_1',M_2'N_2',M_3'N_3'$，这些多边形就是由它们两两连接在一起的. 点 A 和点 B 变成了平面上的点 A'和 B'，而在多面角的面被展开的这一部分上联结 A,B 两点的线也变成平面上联结 A',B'两点的线，联结 A,B 两点的线当中最短的线也就变成联结 A',B'两点的最短的平面上的线，也就是变成了直线段 $A'B'$①. 在这里，我们完全重复先前的论证：由直线$A'B'$和边 $M_1'N_1'$所作成的对顶角 α_1 和 β_1 相等；同理，由直线 $A'B'$和边 $M_2'N_2'$，$M_3'N_3'$所作成的对顶角 α_2 和 β_2，α_3 和 β_3 也两两相等(图4).

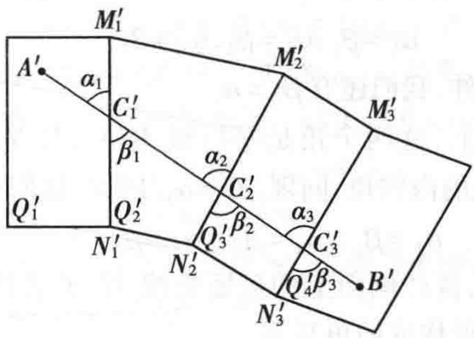

图4

假若重新把构成这些多边形的这一部分平面弯折成多面角的面，使得多边形 Q_1'重新变成面 Q_1，多边形 Q_2'重新变成面 Q_2，多边形 Q_3'变成面 Q_3，多边形 Q_4'变成面 Q_4，那么点 A'和 B'就变成点 A 和 B，而直线段

---

① $A'B'$穿过这些多边形的其他边的情形，我们这里不讨论了.

$A'B'$变成线 $\overset{\frown}{AB}$,变成多面角的面上联结 A,B 两点的最短线. 这条最短线是一条折线,它的顶点在多面角的面的一些棱 M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 上. 而由它的相接的两条边和棱所作成的角 α_1 和 β_1(以及 α_2 和 β_2, α_3 和 β_3)相等.

3. 棱柱侧面上的最短线

在图 5 上画的是一个棱柱[①]和联结这个棱柱上不在同一侧面上的两点 A 和 B 的最短线. 这条最短线是一条折线,它的顶点是棱柱的棱上的 C_1, C_2, C_3,而它的相接的两边和这两边的公共顶点所在的一条棱所作成的角,由前所说,是互等的

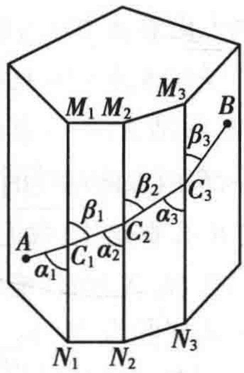

图 5

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \cdots$$

但除此之外,我们还有 $\beta_1 = \alpha_2$.

实际上,这两个角是平行线 M_1N_1, M_2N_2 和截线 C_1C_2 所成的内错角. 同理, $\beta_2 = \alpha_3$. 因此,我们有

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \cdots$$

换句话说,棱柱侧面上的最短折线 AB 的各边和棱柱的各个棱所作成的角互等.

4. 棱锥的面上的最短线 设在顶点是 O 的棱锥[②]的两个侧面上给定了两点 A 和 B(图 6). 这两点可以在锥面上用无数多条线联结起来,这些线当中有一条最短的线 $\overset{\frown}{AB}$. 根据前面所说,线 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条折线,它的

① 棱柱的侧面应当想象成是无限延伸的.

② 棱锥的侧面应当想象成是无限延伸的.

顶点 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ 在棱锥的棱上,而由这条折线的各边和棱锥的棱所作成的角 α_1 和 β_1, α_2 和 β_2, α_3 和 β_3……一定两两相等

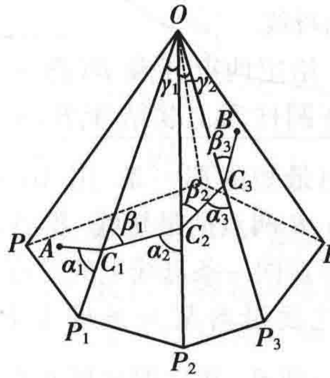

图 6

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \cdots$$

我们现在来研究边 C_1C_2 所在的面 P_1OP_2;若 γ_1 表示 $\angle P_1OP_2$,则在 $\triangle C_1OC_2$ 里,角 α_2 是外角,而角 β_1 和 γ_1 是内角. 三角形的外角等于两内对角的和,所以

$$\alpha_2 = \beta_1 + \gamma_1 \quad 或 \quad \alpha_2 - \beta_1 = \gamma_1$$

但因 $\beta_1 = \alpha_1$,所以 $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_1$.

同理,$\alpha_3 - \alpha_2 = \gamma_2$,这里 γ_2 是相邻的两个侧棱 OP_2 和 OP_3 之间的交角,等等.

因此,最短线和棱锥的任意两个棱相交的角的差等于在顶端的相应几个平面角的和.

§2　圆柱面上的最短线

1. 圆柱面上的最短线　我们现在来求某些最简单

的曲面上的最短线. 先从圆柱面开始①.

我们先要注意,圆柱面可以用一组和圆柱面的轴平行、因而自身也就互相平行的直线全部盖满. 这些直线叫作圆柱面的母线.

在圆柱面上给定两点 A 和 B(图 7). 我们要从那些在圆柱面上联结 A,B 两点的曲线当中找出最短的那一条. 用 $\overset{\frown}{AB}$ 来记这一条联结 A,B 两点的最短线. 我们先讨论 A,B 两点不在同一条母线上的情形.

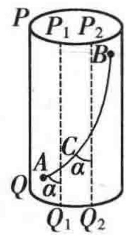

图 7

我们把圆柱面沿着某一条母线 PQ(和$\overset{\frown}{AB}$不相交的)剪开,并且把它展开在一个平面上;于是就得到一个矩形(图 8)(它的一对边 $P'P''$和$Q'Q''$是由展开圆柱面两端的圆周而得到的;另一对边 $P'Q'$和 $P''Q''$是由切口 PQ 的两边所作成). 圆柱的母线变成和矩形的边 $P'Q'$相平行的直线. A,B 两点变成联结矩形里面的 A',B'两点. 在圆柱面上联结 A,B 两点的线变成联结矩形里面 A',B'两点的平面上的线. 圆柱面上联结 A,B 两点的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成联结 A',B'两点的最短的平面上的线,就是直线段 $A'B'$. 因此,在把圆柱的侧面展开成平面上的矩形之后,圆柱面上的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成直线段 $A'B'$. 圆柱的母线 $P_1Q_1,P_2Q_2,\cdots$变成和矩形 $P'Q'Q''P''$的边 $P'Q',P''Q''$相平行的直线 $P_1'Q_1',P_2'Q_2',\cdots$线段 $A'B'$和这些直线所作成的角,作为平行线的同位角,是互等的. 用 α 来记这些角的大小.

---

① 现在所讨论的有限圆柱面(图 7)是无限圆柱面的一部分.