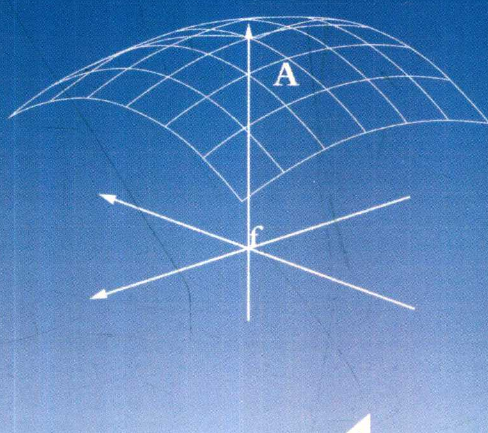
数学分析（三）

主　编　崔国忠

副主编　石金娥　郭从洲



科学出版社

数学分析(三)

主　编　崔国忠
副主编　石金娥　郭从洲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共三册，按三个学期设置教学，介绍了数学分析的基本内容.

第一册内容主要包括数列的极限、函数的极限、函数连续性、函数的导数与微分、函数的微分中值定理、Taylor公式和L'Hospital法则. 第二册内容主要包括不定积分、定积分、广义积分、数项级数、函数项级数、幂级数和Fourier级数. 第三册内容主要包括多元函数的极限和连续、多元函数的微分学、含参量积分、多元函数的积分学.

本书在内容上，涵盖了本课程的所有教学内容，个别地方有所加强；在编排体系上，在定理和证明、例题和求解之间增加了结构分析环节，展现了思路形成和方法设计的过程，突出了教学中理性分析的特征；在题目设计上，增加了例题和课后习题的难度，增加了结构分析的题型，突出分析和解决问题的培养和训练.

本书可供高等院校数学及其相关专业选用教材，也可作为优秀学生的自学教材，同时也是一套青年教师教学使用的非常有益的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析：全 3 册/崔国忠主编. —北京：科学出版社，2018.7
ISBN 978-7-03-057600-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①崔…Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 113102 号

责任编辑：张中兴　梁　清　孙翠勤 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018年7月第　一　版　开本：720 × 1000　B5
2018年7月第一次印刷　印张：49 1/4
字数：998 000

定价：128.00元(全3册)

目　录

多元函数的微积分学

数学是刻画自然界中量和形关系的一门基础学科，是人类在认识自然、改造自然的活动中所凝练的智慧的高度升华，更是人类进一步认识自然、改造自然的强有力的工具.

我们知道，人类要认识自然、改造自然，必须要研究自然现象，分析产生这一自然现象的原因，寻找产生或影响这一自然现象的因素，刻画这些因素和自然现象之间的规律，并研究这些规律，找出形成因果关系间的机制，从而通过预知原因以求预知结果，通过改变原因以求实现某个结果. 这个过程可以简单表示为

$$\text{原因(影响元素)} \xrightarrow[\text{如何影响}]{\text{规律}} \text{结果(现象)},$$

抽象为数学语言，可以表示为

$$\text{自变量} \xrightarrow{\text{函数关系}} \text{因变量}.$$

因此，对自然界感知的过程，从数学分析的观点来看，实际就是对函数的研究. 以函数作为研究对象，穷其基本性质的研究，这正是数学分析，这也正如我们以前所学习的《数学分析》的一元函数微积分学理论.

但是，就我们以前所学的《数学分析》内容来说，在上述描绘的感知自然的过程中，所对应的范围很小，所刻画的自然现象很少，具有很大的局限性. 因为我们以前所学的《数学分析》是一元函数微积分学，即变元只有一个，至多刻画一个影响元素. 但是，我们知道，自然界中某个自然现象或某个结果的产生通常有众多因素的制约，单靠一个变量是不能代表或刻画众多的制约因素的，一元函数便不能描述这些现象. 如导弹的预警，需要预知导弹某时刻在空间的具体位置，即导

弹的轨迹，刻画导弹的轨迹需要一个时间变量和三个空间变量，这就需要四个变量；刻画自然界广泛存在的波的传播等扩散现象也是如此，因此，要研究复杂的自然现象必须将一元函数及其理论进行推广，这就形成了我们将要学习的多元函数的微积分学理论.

这是从应用背景出发简述了引入多元函数及其相关理论的必要性. 从科学理论的发展角度看，引入多元函数及其理论也是数学理论的自然发展. 任何科学理论的发展都遵循从简单到复杂的发展思路，因此，随着一元函数理论的发展，研究对象自然就从简单的一元函数发展到多元函数，形成多元函数理论.

那么，整个多元函数的微积分学的基本内容是什么？如何引入这些基本内容(框架结构)？简单回顾一下一元函数微积分理论的框架体系结构：

先建立实数系的基本理论，构建函数建立的基础；然后给出一元函数 $y=f(x),\ x\in I\subset\mathbf{R}^1$ 的定义；建立极限理论；由此构建一元函数的分析性质——单变量微分学和积分学、级数理论. 即

$$\mathbf{R}^1\text{及其基本定理}\longrightarrow\text{函数 } f(x)\longrightarrow\text{极限理论}\longrightarrow\text{函数的分析性质}.$$

完备的实数系理论为函数的研究提供了坚实的理论基础，极限理论为其研究内容(函数的分析性质(微分学、积分学、级数理论))的建立提供了有力的工具.

可以设想，对多元函数的研究基本上沿一元函数理论的框架进行，即将一元函数理论框架结构移植到多元函数上，当然，在移植的过程中，要根据研究对象的相同特性和差异特性进行平行的推广(以体现相同之处)和延伸发展(以体现区别之处)，因此，我们仍然先引入多元函数建立的基础——多维集合与多维空间，进一步建立多元函数的极限理论，并在此基础上建立多元函数的微分学和积分学.

第 13 章　n 维距离空间及多元函数

本章中，我们引入多元函数微积分学理论的研究对象——多元函数，并建立多元函数的极限理论和连续性理论.

当然，首先必须介绍多元函数建立的基础——n 维距离空间 $\mathbf{R}^n$. 高等代数中从代数学的角度引入了 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的概念，现在，我们从分析学的角度引入 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$.

13.1　n 维距离空间及基本概念

我们知道，在一元函数的微积分理论中，为定义函数，引入了实数系用以刻画函数的定义域和值域；引入了邻域用以刻画极限，而邻域是利用距离刻画的，因此，在实数集合上引入了距离的概念，才使得数学分析理论的建立有了可能，但由于实数集合中的距离是最简单、直观的自然距离，我们在使用实数的距离概念时，没有刻意地重新引入或强调这一点，因为我们认为这是朴素而自然的一件事情，这种朴素和自然的属性掩盖了“距离”本质的重要性. 换一种说法，如果仅将实数系视为全体实数的集合，那么，这些实数仅仅是众多的刻板的孤立的点(数)，相互缺少联系，实数集合也缺少生机；有了距离的概念，或者说将距离引入实数集合，使得集合中的这些实数生动活泼起来，使得这些实数间能够建立丰富多彩的关系，因此，实数集合上装备了距离，才有了邻域的概念，使得建立函数成为可能，才能进一步引入极限，从而建立了函数的微积分理论. 只是一维实数轴(包括一维的距离)过于简单，导致我们没有注意到这一点. 实际上，正是这一点带来了从“集合”到“空间”的本质变化——集合上装备了距离便形成了空间. 因此，实数轴或全体实数的集合 $\mathbf{R}^1$ 上装备了距离 $d=d(x,y)$便形成了一维空间，通常记为($\mathbf{R}^1,d$)，也简记为 $\mathbf{R}^1$ 或 $\mathbf{R}$.

因此，为引入多元函数理论，必须引入相应的多维集合、多维空间及其距离的概念. 下面，我们以一般的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 为例引入相关概念.

一、距离空间

通过对实数系上距离的高度抽象，我们引入集合上的距离概念.

定义 1.1 设 X 是一个非空的集合, 若对 X 中任意两个元素 x,y, 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应且满足

1) 正定性: $d(x,y)\geqslant 0$, $\forall x,y\in X$, 且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

2) 对称性: $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall x,y\in X$;

3) 三角不等式: $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z$,

则称 $d(x,y)$ 是定义在集合 X 上的元素 x,y 之间的距离.

距离也称为度量, 是一维空间 $\mathbf{R}^1$ 上距离概念的推广. 虽然也称之为距离, 但不是真正意义上的距离, 只是借用了距离的概念, 使之不那么抽象. 如在 $\mathbf{R}^2$ 上定义 $d(x,y)=\max\limits_{i=1,2}|x_i-y_i|$, 其中 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$, 可以验证 $d(x,y)$ 满足距离的定义, 但并非实际意义上的点与点间的距离. 当然, 我们知道, 在 $\mathbf{R}^2$ 上可以定义常规的距离, 这也说明, 同一集合上可以定义不同的距离.

定义 1.2 若在集合 X 上装备了距离 $d(x,y)$, 称 (X,d) 为距离空间, 简记为 X.

距离空间也称为度量空间. 集合 X 与对应的空间 X 是有区别的, 二者是两个完全不同的概念, 集合上装备距离后构成距离空间, 才使得对空间的元素进行度量和对元素间进行运算有可能、有意义, 赋予了集合新的生命力.

同一集合 X 上, 可以引入不同的距离 d_1,d_2, 形成不同的距离空间 (X,d_1), (X,d_2).

二、n 维距离空间 $\mathbf{R}^n$

记 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合, 令

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\},$$

这是一个所有 n 维点的集合, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是点(元素)的坐标表示, 也用于表示这个点, x_i 为第 i 个坐标分量. 如

$\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$: 一维实数集合, 数轴上点的全体, 即实数系;

$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y):x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$: 全体二维平面点的集合;

$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$: 全体三维“空间”点的集合.

上述 $\mathbf{R}^n$, 由于没有定义距离, 因而, 是集合而不是空间. 下面, 将 $\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 中距离进行推广, 引入 $\mathbf{R}^n$ 中距离.

对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n(y_i-x_i)^2\right)^{1/2},$$

则可验证: $d(x,y)$ 满足距离定义中的 1)—3).

事实上, 1), 2)显然成立; 关于 3)的证明, 可以用高等代数中的内积方法, 这里采用 Cauchy 不等式来证明. 由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \quad \forall a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0,$$

得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2,\end{aligned}$$

因而, 对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in \mathbf{R}^n$, 记 $a_i = z_i - x_i, b_i = y_i - z_i$, 则 $a_i + b_i = y_i - x_i$, 代入上述公式, 得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\right)^{1/2},$$

即

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y),$$

故 $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{1/2}$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的距离.

常用 $d = d(x,y)$ 或 $d(x,y) = |x-y|$ 表示上述定义的两点距离, 也称自然距离. 这样, 在 $\mathbf{R}^n$ 上装备了距离 d, 称 $(\mathbf{R}^n, d)$ 为 n 维距离空间(或Euclid空间), 简记为 $\mathbf{R}^n$.

上述定义的距离 d 是最常用的距离, 在 $\mathbf{R}^n$ 中还可引入如下距离: 如, $d_1(x,y) = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n}|x_i - y_i|$ 和 $d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$, 因此, 同一集合上可以引入不同的距离, 构建不同的距离空间, 而不同的距离也有不同的作用和实际应用背景, 如上述的距离 $d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$, 经常用于纠错编码理论.

对 n 维空间 $\mathbf{R}^n$, 我们已经在高等代数中对 $\mathbf{R}^n$ 空间的结构进行了初步的研究, 给出了它的一组基 $\{\boldsymbol{e}_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0): i = 1,2,\cdots,n\}$, 并且所有 n 维空间都与 $\mathbf{R}^n$ 等距同构, 因此, $\mathbf{R}^n$ 是有限维空间的典型代表, 通过对 $\mathbf{R}^n$ 的研究来获得有限

维空间的性质.

当然, 也存在无限维空间. 前述我们常用的集合记号 $C[a,b]$, 装备距离

$$d(x(t),y(t))=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|,\quad \forall x(t),y(t)\in C[a,b],$$

则 $(C[a,b],d)$ 是一个无限维空间.

类似地, 在集合 $R[a,b]$, $C^2[a,b]$ 上都可以装备距离, 使其成为距离空间.

三、$\mathbf{R}^n$ 中的基本点集

引入类似实数系 $\mathbf{R}^1$ 上邻域、开(闭)区间的概念.

给定 $\mathbf{R}^n$, $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\mathbf{R}^n$, $\delta>0$.

1. 邻域

定义 1.3 集合 $U(x_0,\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,x_0)<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ (开)邻域.

例如, $n=1$ 时, $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为实数系中的开区间; $n=2$ 时, $U(x_0,\delta)$ 是以 x_0 为心, 以 δ 为半径的开圆(不含圆周); $n=3$ 时, $U(x_0,\delta)$ 是以 x_0 为心, 以 δ 为半径的开球(不含球面). 上述邻域通称为球(圆)形邻域. 有时还用到矩形邻域, 如 $\mathbf{R}^2$ 中, $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2,a>0,b>0$, 则可定义 (x_0,y_0) 的矩形邻域为

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\left|x-x_0\right|<a,\left|y-y_0\right|<b\};$$

特别地, 当 $a=b$ 时, 矩形邻域也称为方形邻域.

因为给定一个圆形邻域, 总可作包含和被包含的矩形邻域, 反之也成立, 因而圆(球)形邻域和矩形邻域是等价的.

还经常用到如下的去心邻域的概念

球形去心邻域: $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbf{R}^n:0<d(x,x_0)<\delta\}$;

矩形去心邻域: $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\left|x-x_0\right|<a,\left|y-y_0\right|<b,\ 且\ (x,y)\neq(x_0,y_0)\}$;

但是, 矩形去心邻域不能写成 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0<\left|x-x_0\right|<a,0<\left|y-y_0\right|<b\}$, 这样不仅去“心”, 还去掉两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上的包含在邻域中的部分线段.

有了邻域的概念, 就可以引入 $\mathbf{R}^n$ 中的各种点和集合的定义了.

2. 内点、外点及边界点

设集合 $E\subset\mathbf{R}^n$, 以下邻域都为球邻域.

定义 1.4 1) 设 $M_0\in E$, 若存在 $\delta>0$, 使得 $U(M_0,\delta)\subset E$, 称 M_0 为 E 的

内点.

2) 设 $M_1 \notin E$，若存在 $\delta>0$，使得 $U(M_1,\delta)\cap E=\varnothing$，称 M_1 为 E 的外点.

3) 设 $M\in \mathbf{R}^n$，若对 $\forall\varepsilon>0$，有 $U(M,\varepsilon)\cap E\neq\varnothing$，且存在 $M'\in U(M,\varepsilon)$，但 $M'\notin E$，称 M 为 E 的边界点.

信息挖掘　从定义可知，E 的内点 M 必有 $M\in E$；E 的外点 M 必有 $M\notin E$；E 的边界点 M，可能有 $M\in E$，也可能有 $M\notin E$ (见后面的例子).

内点和边界点与集合 E 的关系更密切，为此，记

$$\overset{\circ}{E}=\{x: x \text{ 为 } E \text{ 的内点}\},\ \partial E=\{x: x \text{ 为 } E \text{ 的边界点}\},$$

分别称为 E 的内点集和边界点集.

如平面上单位开圆 $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2<1\}$，则其所有点都是内点，即 $\overset{\circ}{E}=E$；而边界点集为 $\partial E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2=1\}$. 平面单位闭圆 $E_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\overset{\circ}{E_1}$ 为单位开圆 E; 边界点集仍为 $\partial E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2=1\}$. 对平面圆环 $E_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$，其内点集 $\overset{\circ}{E_2}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: 1<x^2+y^2<2\}$，边界点集 $\partial E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2=2\}$.

集合中还经常涉及另外两类点:

定义 1.5　1) 设 $M\in E$，若存在 $\delta>0$，使得 $U(M,\delta)\cap E=\{M\}$，称 M 为 E 的孤立点.

2) 设 $M\in\mathbf{R}^n$，若对 $\forall\varepsilon>0$，$U(M,\varepsilon)$ 中都含有 E 中无限个点，则称 M 为 E 的聚点.

信息挖掘　1) 由定义可知，孤立点必是边界点，内点必是聚点，边界点要么是聚点，要么是孤立点. 对 E 的聚点 M，既可能有 $M\in E$，也可能有 $M\notin E$. 如圆环

$$E=\{(x,y): 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$$

不属于 E 的聚点，为位于单位圆曲线 $x^2+y^2=1$ 上的内边界点；属于 E 的聚点，为内点及位于圆周曲线 $x^2+y^2=2$ 上的外边界点.

2) 聚点还有等价定义: 设 $M\in\mathbf{R}^n$，若对 $\forall\varepsilon>0$，都存在 $M'\in E$ 且 $M'\neq M$，使 $M'\in U(M,\varepsilon)$ (即 $U(M,\varepsilon)$ 中至少含有一个异于 M 的 E 中的点)，则称 M 为 E 的聚点.

因此，两个定义中“无限个”与“一个”是等价的. 事实上，由“无限个”推出“一个”是显然的，只需由“一个”推出“无限个”. 由定义，对 $\forall\varepsilon>0$，存在点 $M_1\in E\cap U(M,\varepsilon)$，且 $0<|M_1-M|<\varepsilon$，再取 $\varepsilon_1=|M_1-M|<\varepsilon$，则存在

$M_2 \in E \cap U(M,\varepsilon_1)$ 且 $0<|M_1-M|<\varepsilon_1$，再取 $\varepsilon_2=|M_2-M|<\varepsilon_1$，则存在 $M_3 \in E \cap U(M,\varepsilon_2)$，如此下去得到点列 $\{M_n\}$ 且 $M_n \in E \cap U(M,\varepsilon)$.

E 的所有聚点的集合记为 E'，也称 E' 为 E 的导集.

例如，记 $E=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 : 0<x^2+y^2+z^2<1\}$，则

$$\overset{\circ}{E}=E,$$
$$\partial E=\{x^2+y^2+z^2=1,(x,y,z)\in \mathbf{R}^3\}\cup\{(0,0,0)\},$$
$$E'=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 1,(x,y,z)\in \mathbf{R}^3\}.$$

3. 基本集合

下面引入基本集合的定义，设 $E\subset \mathbf{R}^n$.

定义 1.6　若 $\overset{\circ}{E}=E$，称 E 为开集；若 $E'\subset E$，称 E 为闭集.

没有聚点的集合也是闭集，如孤立点集.

闭集的另一定义为：记 $\bar{E}=E\cup E'$，称为 E 的闭包，显然，E 是闭集等价于 $E=\bar{E}$. 事实上，若 $E'\subset E$，则 $\bar{E}=E\cup E'=E$；反之，若 $\bar{E}=E$，则

$$E'\subset E\cup E'=\bar{E}=E,$$

因而，两个定义等价.

开集和闭集对应于一维空间中的开区间和闭区间，是 $\mathbf{R}^n$ 中最基本的集合概念，但它们并没有完全涵盖 $\mathbf{R}^n$ 中的所有集合，即存在非开、非闭的集合.

如 $E=[0,1)\subset \mathbf{R}^1$，则 $\overset{\circ}{E}=(0,1)$，$\overset{\circ}{E}\neq E$，E 不是开集，$E'=[0,1]$，$E'\not\subset E$，因而，E 也不是闭集.

经常用到的集合概念还有

定义 1.7　记 $0\in \mathbf{R}^n$ 为原点，若存在实数 $c>0$，使 $\forall x\in E$，成立

$$\|x\| \triangleq d(x,0)<c,$$

即 $E\subset U(0,c)$，称 E 为有界集.

有界性还可以用直径的定义来刻画：记 $r=\sup\limits_{x,y\in E}\{d(x,y)\}$，称 r 为 E 的直径，集合 E 有界等价于 $r<+\infty$.

定义 1.8　设 $E\subset \mathbf{R}^n$ 为开集，若对 $\forall M_1,M_2\in E$，都可用含在 E 内的有限折线连接 M_1 和 M_2，称 E 为开区域，开区域连同边界称为闭区域.

区域的概念是指集合是连通的，如实数轴上的集合 $E=(0,1)\cup(2,3)$ 不是区域.

四、$\mathbf{R}^n$ 中点列及收敛性

为引入函数的极限, 我们从 $\mathbf{R}^n$ 中的点列开始引入极限的概念. 类比已知, 一个自然的引入方式是利用一维数列的极限定义 n 维点列的极限.

记 $x_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in\mathbf{R}^n$, $k=1,2,\cdots$, 则 $\{x_k\}$ 就是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列.

定义 1.9　给定点列 $\{x_k\}\subset\mathbf{R}^n$, 若存在 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n$, 使

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_k,x_0)=0,$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛于点 x_0, 记为 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k=x_0$, 或 $x_k\to x_0$, x_0 称为 $\{x_k\}$ 的极限点.

将定义中的极限用 “ε-δ” 语言叙述, 得到点列极限的如下等价的定义:

定义 1.9′　若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $K\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $k>K$ 时成立

$$d(x_k,x_0)<\varepsilon \quad 或 \quad x_k\in U(x_0,\varepsilon),$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛于点 x_0.

自然地, 我们给出 n 维点列收敛性和一维点列收敛性的关系.

定理 1.1　n 维点列 $\{x_k\}$ 收敛于 n 维点 x_0 的充分必要条件是

$$x_i^{(k)}\to x_i^{(0)},\quad i=1,2,\cdots,n,\ k\to+\infty,$$

故, 点列 $\{x_k\}$ 的极限也是唯一的.

由此定理可知, n 维点列的收敛性本质上就是一维数列的收敛性, 因此, 我们略去关于 n 维点列极限的性质和计算.

作为 n 维点列极限的应用, 我们刻画聚点的特性.

定理 1.2　M_0 是集合 E 的聚点的充分必要条件是存在点列 $\{M_k\}\subseteq E$, 使得

$$M_k\to M_0.$$

这是聚点的一个有用的性质, 它可以利用极限建立集合中的点和聚点间的关系, 实现聚点和集合内的点的性质之间的相互转移. 这种处理问题的思想是把聚点问题转化为已知的极限来处理, 再次体现了化不定为确定的思想.

下面的定理深刻揭示了闭集的闭性.

定理 1.3　设 E 是闭集, $M_k\in E$, 若 $M_k\to M_0$, 则必有 $M_0\in E$.

此定理揭示了闭集很好的性质——对极限运算的封闭性, 正是这个性质建立了连续函数具有好性质的基础, 在一元函数理论中, 我们已经对此有了深刻的理解.

上述几个定理的证明较简单, 我们略去证明.

五、$\mathbf{R}^n$ 中的基本定理

在单元微积分学中, 建立函数一系列分析性质的基础是实数系的基本定理:

确界定理、闭区间套定理、Weierstrass 致密性定理、Cauchy 收敛准则、有限开覆盖定理, 正是这些定理, 为以后函数分析性质的研究提供了强有力的基础和工具, 因而, 在完成了多维空间上各种集合的定义之后, 自然要考虑这些基本定理能否推广到 n 维空间.

我们简单分析一下这些定理能否推广, 并简析推广性结论的证明思路.

从确界定理开始. 由于确界定理是比较数的大小, 而 n 维空间中的点是没有大小关系的, 因而不能推广到 n 维空间, 其他定理都可作相应的推广. 当然, 在对这些推广的定理进行证明时, 一般采用两种思路: 其一为直接转化方法, 此方法常用于处理简单的推广性结论, 即将推广结论直接转化为已知的简单形式, 直接利用简单形式的结论给出证明; 其二为化用方法, 适用于较为复杂的推广性结论, 此时通常不能直接转化为已知的简单形式, 需要借用简单结论的证明方法和思想, 通过适当修改用于证明复杂的推广性结论. 当然, 两种方法的难易程度也表明了应用时的选择原则. 下面, 我们以 $\mathbf{R}^2$ 为例, 进行基本定理的推广.

1. 闭矩形套定理

定理 1.4 若闭矩形区域列 $I_n=\{(x,y): a_n\leqslant x\leqslant b_n, c_n\leqslant y\leqslant d_n\}$ 满足矩形套条件:

1) $I_{n+1}\subset I_n$, $n=1,2,\cdots$;

2) $b_n-a_n\to 0, d_n-c_n\to 0$,

则存在唯一的 (x_0,y_0), 使 $(x_0,y_0)\in I_n$, $\forall n$.

简析 这是一维空间上的闭区间套定理的推广, 证明思路是优先考虑直接转化方法, 将其转化为已知一维闭区间套的情形, 直接利用已知的结论证明; 因此, 只需分别对 $\{[a_n,b_n]\}$, $\{[c_n,d_n]\}$ 应用闭区间套定理即可. 我们略去具体的证明.

2. Weierstrass 致密性定理

定理 1.5 $\mathbf{R}^2$ 中有界点列必有聚点.

简析 证明思想仍是转化为一维实数系情形, 利用一维情形下相应的定理, 分别考虑两个一维分量点列并用相应的 Weierstrass 定理即可. 在证明过程中, 难点是对不同数列选取共同子列的方法, 由于我们还要用到这种方法, 我们给出较为详细的证明, 注意总结这个方法.

证明 设 $\{M_n(x_n,y_n)\}\subset\mathbf{R}^2$ 是有界点列, 则 $\{x_n\},\{y_n\}\subset\mathbf{R}^1$ 也是有界点列, 由 Weierstrass 定理, 则 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 显然, $\{y_{n_k}\}$ 也有界, $\{y_{n_k}\}$ 也有收敛子列 $\{y_{n_{k_l}}\}$, 因而, $\{x_{n_{k_l}}\}$, $\{y_{n_{k_l}}\}$ 都收敛, 不妨设它们分别收敛于 x_0, y_0, 记 $M_0(x_0,y_0)$, 则 $\{M_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}},y_{n_{k_l}})\}$ 收敛于 $M_0(x_0,y_0)$, 因而, $\{M_n\}$ 有聚点 M_0.