基于最小风险的Bayes阈值选取准则算法及实现

于传强　樊红东　唐圣金　著

科学出版社

基于最小风险的Bayes阈值选取准则算法及实现

于传强　樊红东　唐圣金　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分为6章。第1章介绍传统的基于最小错误概率的阈值选取准则。第2章介绍贝叶斯基本理论。第3章描述基于最小风险的贝叶斯阈值选取准则及其实现方法，提出一种实时加权先验概率求解算法。第4章讨论基于核密度估计的非参数分布密度估计算法，包括基于估计点的滑动窗宽核密度估计算法、基于估计点的滑动双窗宽核密度估计算法、基于估计带的滑动窗宽核密度估计算法及基于迭代的窗宽优化算法，并给出基于估计点的滑动窗宽的核密度估计性质及其证明。第5章对基于最小风险的贝叶斯阈值选取算法进行实例验证。第6章提出一种基于贝叶斯准则的支持向量机。附录是书中涉及算法的源程序。

本书适合高等院校系统检测与诊断专业的研究生使用，也可作为该领域科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

基于最小风险的Bayes阈值选取准则算法及实现/于传强，樊红东，唐圣金著. —北京：科学出版社，2018.4

ISBN 978-7-03-055512-0

Ⅰ.①基… Ⅱ.①于…②樊…③唐… Ⅲ.①总线-计算机仿真-测试 Ⅳ.①TP391.97

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第281408号

责任编辑：魏英杰 / 责任校对：桂伟利

责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年4月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2018年4月第一次印刷 印张：6 3/4

字数：133 000

定价：90.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

实践中常用的状态监测报警策略是将被监测系统的测量参数与正常状态的参数值比较，也就是通过求取系统的残差来判断系统的运行状态是否正常。由于系统模型的偏差、噪声、系统的参考输入，以及外界环境等因素的变化，残差在系统状态正常的情况下，通常也不为零，为了减少不确定因素对残差的影响，常常引入阈值来提高监测系统的鲁棒性。阈值选择过大会造成很高的漏报率，反之会导致过高的误报率。因此，如何选择合适的阈值是状态检测与判决领域中的一个重要问题。

本书分为6章。第1章主要描述状态监测中的误报概率、漏报概率与阈值之间的关系，介绍传统的基于最小错误概率的阈值选取准则。第2章介绍贝叶斯基本理论，包括贝叶斯基本公式、先验分布的选取等，这些都是应用贝叶斯方法进行参数推断和统计决策的基础。第3章主要介绍基于最小风险的贝叶斯阈值选取准则及其实现方法，提出一种实时加权先验概率求解算法。第4章讨论基于核密度估计的非参数分布密度估计算法，包括基于估计点的滑动窗宽核密度估计算法、基于估计点的滑动双窗宽核密度估计算法、基于估计带的滑动窗宽核密度估计算法及基于迭代的窗宽优化算法，并给出基于估计点的滑动窗宽的核密度估计性质及其证明。第5章对前面章节提出的基于最小风险的贝叶斯阈值选取算法进行实例验证。第6章将贝叶斯判别分析的思想与支持向量机相结合，提出一种基于贝叶斯准则的支持向量机。

本书构建了基于最小风险的贝叶斯阈值选取准则的状态判决策略的完整框架，并推导了实现算法，弥补了目前有关阈值选取领域中，缺少从理论到具体算法实现进行系统论述的著作的不足，对于研究基于最小风险的贝叶斯阈值选取准则的理论与应用，具有较高的参考价值。

在本书出版之际，首先要感谢我的博士生导师郭晓松教授，感谢他

多年来对我在该领域研究的指导和帮助，还要感谢火箭军工程大学对专著出版提供的关心和支持，感谢参考文献所列作者对本专著编写提供的研究基础和启发。

限于作者水平，书中不足之处在所难免，恳请读者批评和指正。

目　录

第1章 导 论

1.1 引 言

目前，自动控制技术在各个领域的应用越来越广泛，特别是随着航天、航空、军事等高新技术的发展，对控制技术提出了更高的需求，使得控制系统的规模不断扩大，复杂性日益提高。与此同时，系统中出现故障的可能性也相应增加。故障若不能及时被检测、排除或冗余，将会对系统的工作性能产生不利影响，甚至导致整个系统的失效、瘫痪，引起灾难性的后果。例如，1996 年 6 月，欧洲“阿丽亚娜”号运载火箭因导航系统出现故障，致使火箭坠毁，造成数亿美元的巨大损失。1996 年 2 月，我国的长征三号乙运载火箭因控制系统惯性平台故障首飞失利。统计资料表明，在 1990～2001 年间所发射的卫星、空间站等 764 个航天器中，总共有 121 个出现故障，占航天器总数的 15.8%，其中控制系统故障占 37%。因此，在提高控制系统自身性能的同时，确保其安全性、可靠性和有效性至关重要。这就迫切要求建立监控系统来监督系统的运行状态，不断检测系统的变化和故障信息，进而采取措施，防止事故的发生。

控制系统的状态监控与故障诊断已经成为一项备受关注的重要技术。自 20 世纪 80 年代以来，每年的 IFAC、IEEE 的控制与决策国际大会都把故障诊断和容错控制列为重要的讨论专题。1993 年，IFAC 成立了故障诊断与安全性技术委员会，我国自动化学会也于 1997 年成立了技术过程的故障诊断与安全性专业委员会。世界各国对此竞相开展了广泛、深入的研究。

在整个监测与诊断系统中，用于状态判决的阈值选取及基于监测数据的直接状态判决问题占据重要地位。其实现过程可以分为两个层面。

① 系统层面。利用传感器监测到的多维数据，通过降维抽取当前系统模型（数据模型或数学模型）的特征参数，与正常状态的模型特征参数作一比较，根据其偏差，给出判决决策；或者根据抽取的特征数据，直接利用判决函数进行状态判决。

② 传感器层面。为了提高系统监测与诊断的实时性和可靠性，监测系统对每个传感器的测量值，在降维处理之前进行简单的判断，以尽快发现一些明显的故障（如无信号、信号偏离正常值很远），或者有重大安全隐患可能造成设备损坏、人员伤亡的故障（动作过程中液压系统泄漏等），减少系统层面的状态判决带来的时间延迟，尽量避免故障造成损失。该层面主要通过对比设置的阈值或者直接利用判决函数的方式来实现。

在这两个层面的判决原理是相同的，只是系统层面的判决复杂一些，涉及多个变量，要考虑的因素很多，而传感器层面的判决相对简单，只对一些特定故障产生判决和报警，考虑的问题只局限于该点。

下面首先对状态监测中的误报概率、漏报概率与阈值之间的关系进行详细的论述，再对传统的基于最小错误概率的阈值选取准则进行详细的介绍。

1.2　误报概率、漏报概率与阈值之间的关系

在监测与诊断系统中，常用的状态监测报警策略是将被监测系统的测量参数与正常状态的参数值比较，也就是求取系统的残差，来判断系统的运行状态是否正常。由于系统模型的偏差（系统参数的微小摄动等）、噪声、系统的参考输入，以及外界环境等因素的变化，残差在系

统状态正常的情况下，通常也不为零，为了减少不确定因素对残差的影响，常常引入阈值来提高监测系统的鲁棒性。阈值选择过大会造成很高的漏报率，反之会导致过高的误报率，因此如何选择合适的阈值就成了问题。

设监测与诊断系统中的状态报警阈值为 Th；系统的误报概率(false alarm rate)为 P_{fa}，就是当系统状态正常时，监测与诊断系统发出状态不正常警报的概率；系统的漏报概率(false dismissal rate)为 P_{fd}，就是当系统状态异常时，监测与诊断系统没有发出状态不正常的警报的概率。

设系统某一参数无故障时的分布函数为 $F_{ok}(x)$，分布密度为 $f_{ok}(x)$；有故障时的分布函数为 $F_{fault}(x)$，分布密度为 $f_{fault}(x)$。系统有故障和无故障时的分布密度关系如图 1.1 所示。

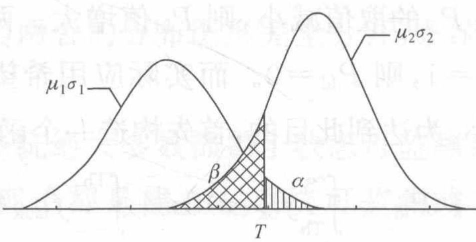

图 1.1 参数有故障和无故障的分布密度关系

由图 1.1 可以得到下式，即

$$P_{fa}=\int_{Th}^{\infty} f_{ok}(x)\mathrm{d}x=1-\int_{-\infty}^{Th} f_{ok}(x)\mathrm{d}x=1-[F_{ok}(Th)-F_{ok}(-\infty)] \tag{1.1}$$

$$P_{fd}=\int_{-\infty}^{Th} f_{fault}(x)\mathrm{d}x=F_{fault}(Th)-F_{fault}(-\infty) \tag{1.2}$$

如果给定误报概率 P_{fa}，则由式(1.1)可确定阈值 Th，再由式(1.2)确定漏报概率 P_{fd}；如果给定漏报概率 P_{fd}，则由式(1.2)确定阈值 Th，再由式(1.1)可确定误报概率 P_{fa}；如果给定阈值 Th，则由式(1.1)可确

定误报概率 P_{fa}，再由式(1.2)确定漏报概率 P_{fd}。因此，如果已知系统有故障和无故障时的分布函数，知道误报概率 P_{fa}，漏报概率 P_{fd} 和报警阈值 Th 中的任何一个，则可完全确定另外两个。

1.3　基于最小错误概率的阈值选取准则

在实际应用中，对于阈值的选取问题，主要考虑系统的误报概率，考虑漏报的概率较小。使用最多的就是基于 3σ 准则的阈值选取方法（σ 为监测参数的标准差），当系统的监测参数位于正常值的 $\pm 3\sigma$ 区间内时，就认为正常；反之，为异常。效果比较好的是基于最小错误概率的判别准则，其主要思想如下。

从前面的论述可知，P_{fa} 和 P_{fd} 的取值是相互影响的，若 P_{fa} 的取值增大，则 P_{fd} 值减小；如果 P_{fa} 的取值减小，则 P_{fd} 值增大。两个极端情况是 $P_{\mathrm{fa}}=0$，则 $P_{\mathrm{fd}}=1$；$P_{\mathrm{fa}}=1$，则 $P_{\mathrm{fd}}=0$。而实际应用希望确定一个阈值 Th，使 P_{fa} 和 P_{fd} 都较小，为达到此目的，首先构造一个函数 $s(\mathrm{Th})$，即

$$s(\mathrm{Th}) = P_{\mathrm{fa}} + P_{\mathrm{fd}} = \int_{\mathrm{Th}}^{\infty} f_{\mathrm{ok}}(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\mathrm{Th}} f_{\mathrm{fault}}(x)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}s(\mathrm{Th})}{\mathrm{dTh}}=0$，将式(1.1)和式(1.2)代入式(1.3)，有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s(\mathrm{Th})}{\mathrm{dTh}} &= \frac{\mathrm{d}(1-(F_{\mathrm{ok}}(\mathrm{Th})-F_{\mathrm{ok}}(-\infty)))}{\mathrm{dTh}} + \frac{\mathrm{d}(F_{\mathrm{fault}}(\mathrm{Th})-F_{\mathrm{fault}}(-\infty))}{\mathrm{dTh}} \\
&= \frac{\mathrm{d}(F_{\mathrm{ok}}(\mathrm{Th}))}{\mathrm{dTh}} - \frac{\mathrm{d}(F_{\mathrm{fault}}(\mathrm{Th}))}{\mathrm{dTh}} \\
&= f_{\mathrm{ok}}(\mathrm{Th}) - f_{\mathrm{fault}}(\mathrm{Th}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.4}$$

即 $f_{\mathrm{ok}}(\mathrm{Th}) = f_{\mathrm{fault}}(\mathrm{Th})$ 时，$g(\mathrm{Th})$ 有极小值，从而由 $f_{\mathrm{ok}}(\mathrm{Th}) = f_{\mathrm{fault}}(\mathrm{Th})$ 可确定最佳阈值 Th。从图 1.1 也可以直观看出，当 Th 取 $f_{\mathrm{ok}}(x)$ 和 $f_{\mathrm{fault}}(x)$ 交点处的 x 值时，图中阴影部分面积最小。

从以上论述中，还可以引申出状态不可监测与状态可监测的概念，假设系统的故障和无故障的参数都服从某种分布，当系统参数的无故障分布密度和有故障分布密度的图形重叠部分面积较大时（对于正态分布也就是均值没有显著的差异），选择 $f_{\mathrm{ok}}(x)$ 和 $f_{\mathrm{fault}}(x)$ 交点处的 x 值作为阈值虽然能够保证系统的误报概率和漏报概率之和最小，但是系统的误报和漏报概率可能都较高，以至于系统无法正常工作，这种情况就是状态不可监测。一种极端情况就是两者分布图形重合，系统就是状态完全不可监测系统。

同样，当系统参数的无故障分布密度和有故障分布密度的图形重叠部分面积较小时（对于正态分布就是均值有显著的差异），选择 $f_{\mathrm{ok}}(x)$ 和 $f_{\mathrm{fault}}(x)$ 交点处的 x 值作为阈值就能够保证系统的误报概率和漏报概率之和最小，又能使得系统的误报和漏报概率都比较小，这就是状态可监测系统。当两者的分布图形完全分开，系统就是状态完全可监测系统。

现实中的系统绝大多数都属于状态可监测系统，实际上有关状态监测与诊断的理论都是建立在系统可监测或者可诊断的基础上展开的。

上述最优阈值求解的思想，虽然可以从理论上得到严格的证明，但是在实际使用中存在两个显著的缺陷。

(1) 没有考虑系统的先验概率

通常情况下，系统的无故障概率和有故障概率不相等，并且存在较大的差异，而上述分析没有考虑各种状态出现机会的大小，它是基于二者出现概率相等的情况下得出的结论。比较直观的理解是，当系统一直运行在良好的状态，这个时候系统出现故障的概率应该是比较小的。也就是说，如果此时监测到的某种无法确定其是否正常的状态，从概率的角度看其属于无故障状态的概率要大于属于有故障状态的概率。

(2) 没有考虑错判造成的损失问题

在实际系统中，监测与诊断系统产生状态误报警和状态漏报警对系统造成的影响是不同的，给系统造成的损失有差别。例如，导弹的起竖过程，当导弹的起竖角度接近或者超过一定角度时，此时如果系统产生故障状态漏报警，极有可能带来灾难性的后果；相反，如果系统产生状态误报警，通常不会造成有损失的后果。因此，在这种情况，阈值的选择应该立足于保证系统能够正常操作(一定的误报概率)的条件下，尽量降低系统的漏报概率。上述最优阈值的选取，虽然能够保证二者之和最优，但不一定能实现监测与诊断的实际结果最优。

1.4 小　结

状态监控与诊断系统能够在保证系统正常运行中发挥重要的作用。在整个监测与诊断系统中，用于状态判决的阈值选取及基于监测数据的直接状态判决占据重要地位。因此，本章详细描述了状态监测中的误报概率、漏报概率与阈值之间的关系，然后对传统的基于最小错误概率的阈值选取准则进行详细的介绍，并总结了其存在的问题。

第 2 章 贝叶斯理论

2.1 历史回顾

在统计推断思想的发展过程中存在两大学派。一派是经典学派，也称为抽样学派，是指 20 世纪初由英国 Pearson 等开始，经 Fisher 予以充实，到 Neyman 完成的理论体系。在目前国内外出版的统计教材和著作中，经典学派的方法和理论往往占有全部或绝大部分的篇幅。另一个学派是贝叶斯学派，该派奠基性的工作是 18 世纪 60 年代英国牧师贝叶斯(Bayes)[①]的论文《论机会学说中的一个问题》，但他这一论文生前并没有被发表，而是在他去世后由他的朋友发表的，著名的数学家 Laplace 用贝叶斯提出的方法推导出了重要的相继律，贝叶斯的方法和理论逐渐被人理解和重视起来。尽管贝叶斯方法可以推导出一些有意义的结果，但在理论和实际应用中出现了各种各样的问题。因此，它在 19 世纪并未受到普遍承认和接受。20 世纪初，意大利的统计学家 de Finetti 和英国的 Jeffrey 从不同方面对贝叶斯学派的理论做出了重要的贡献，为贝叶斯学派在统计学中争得了一席之地。第二次世界大战后，Wald 提出基于统计的决策理论，在该理论中贝叶斯方法占有举足轻重的地位；信息论的发展对贝叶斯学派做出了新的贡献。更重要的是在一些实际应用的领域中，尤其在经济学中应用贝叶斯方法取得了成功，该学派已成为一股不容忽视的力量。在 20 世纪 50 年代，以 Robins 为代表，提出经验贝叶斯方法，把贝叶斯方法和经典方法结合起来，引起了统计学界的广泛的注意。该方法很快就显示出活力，成为统计学界研究的一个热点。

---

① 根据专业习惯，本书不特别统一“贝叶斯”和“Bayes”。

贝叶斯学派的基本特征是将非样本信息或先验信息和样本信息有机结合起来，使得统计推断或预测结果比单凭样本信息得出的结果更为准确和可靠。贝叶斯学派和经典学派的主要区别在于如下方面。

① 是否使用非样本信息或先验信息。经典统计学是以现时抽取的随机样本统计量来推断或估计总体参数，不考虑任何带主观性的先验信息。而贝叶斯统计学派认为，在统计推断和外推预测中，不仅可以完全根据先验信息作估计，而且还应该用现时的抽样所提供的后验信息来修正先验信息，以便得出更可靠的后验概率。是否使用非样本信息或验前信息是贝叶斯学派和经典学派的根本分歧所在。

② 对概率的理解不同。经典统计学认为，某事件出现的概率以该事件出现频率的极限来解释。贝叶斯统计则认为，某事件的出现概率以当事者对该事件出现的“相信程度”来定义。这种信念可以来自定量或定性的信息，但不一定同未来假想实验中该事件的出现频率相联系。显而易见，这样定义的概率带有主观性质。也就是说，对同一个事件，不同的人可以指定不同的概率。因此，这种概率称为主观概率，以区别于用频率极限定义的客观概率。此外，贝叶斯方法还有一个特点，那就是对未知参数数值的不确定性可以用一个概率分布来表示。通常假定，对任何一个参数的各种可能值，均可指定一个概率密度函数或概率函数。然而，在经典估计中，由于每一个参数对重复样本来说都是固定不变的，所以不可能对它们指定概率分布。

虽然贝叶斯方法越来越受到人们的青睐，但其无论在理论上，还是在实际应用中都没有经典方法完善，还存在一系列没有得到完全解决的问题。目前对贝叶斯学派的批评主要集中于以下两点。

① 将参数看成随机变量是否合适。

② 先验分布是否存在，若存在又如何选取。

在某些情况下，将参数看成随机变量是合理的，它的先验分布也容易确定。在另外一些情形下，把参数看成随机变量未必合理，它的先验

分布也不易确定。目前对经典学派的批评主要有下面两点，即一些问题的提法不妥，判断统计方法好坏的标准不妥。经典学派出现的问题基本上可以用贝叶斯统计理论来解决。总之，不同学派之间的相互批评和责难，是学术发展中的必然现象。

2.2 贝叶斯定理

贝叶斯学派的起点是贝叶斯的两项工作，即贝叶斯定理和贝叶斯假设。贝叶斯公式的事件形式如下。

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一概率空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$是互不相容的事件，$P(A_i)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$，所有事件之和$\bigcup_{i=1}^{k}A_i$包含事件$B$，即$B\subset\bigcup_{i=1}^{k}A_i$，则有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B\mid A_j)P(A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

这就是贝叶斯定理，它是整个贝叶斯理论的基础。先验信息以概率分布$P(A_i),i=1,2,\cdots,n$给出，即先验分布。由于事件B的发生，可以对$A_1,A_2,\cdots,A_n$发生的概率重新估计。贝叶斯公式综合了先验信息与实验提供的新信息，可以获得后验信息，以后验分布$P(A_i\mid B),i=1,2,\cdots,n$体现出来。贝叶斯公式反映了先验分布向后验分布的转化。

贝叶斯公式的密度函数形式如下。

① 依赖于参数θ的随机变量X的密度函数在经典统计中记为$p(x;\theta)$或$p_\theta(x)$，表示在参数空间$\Theta=\{\theta\}$中不同的θ对应不同的分布。可在贝叶斯统计中记为$p(x|\theta)$，表示在随机变量θ给定某个值时，随机变量θ的条件分布。

② 根据参数θ的先验信息确定先验分布$\pi(\theta)$。这是贝叶斯学派在最近几十年里重点研究的问题，已经获得一大批富有成效的方法。在

本章后面将作较详细的介绍。

③ 从贝叶斯观点看，样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的产生分两步进行。首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 产生一个样本 θ'，第二步是从总体分布 $p(x|\theta')$ 产生一个样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，此样本发生的概率与如下联合密度函数成正比，即

$$p(\boldsymbol{x} \mid \theta') = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \theta')$$

这个联合密度函数综合了总体信息和样本信息，常称为似然函数，记为 $L(\theta')$。

④ 由于 θ' 是设想出来的，仍然是未知的，它是按先验分布 $\pi(\theta)$ 而产生的，要把先验信息进行综合，不能只考虑 θ'，而应对 θ 的一切可能加以考虑，因此要用 $\pi(\theta)$ 参与进一步综合。样本 $\boldsymbol{x}$ 和参数 θ 的联合分布为

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=p(\boldsymbol{x}|\theta)\pi(\theta)$$

把总体信息、样本信息和先验信息这三种可用的信息进行了综合。

⑤ 接下来的任务是对未知数 θ 作出统计推断。在没有样本信息时，人们只能根据先验分布对 θ 作出推断。在有样本观察值 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之后，应该依据 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ 对 θ 作出推断。为此，需要把 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ 作如下分解，即

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=\pi(\theta|x)m(\boldsymbol{x})$$

其中，$m(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的边缘密度函数，即

$$m(\boldsymbol{x}) = \int_{\Theta} h(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{\Theta} p(\boldsymbol{x} \mid \theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

它与 θ 无关，或者说，$m(\boldsymbol{x})$ 中不包含 θ 的任何信息。因此，能用来对 θ 作出推断的仅是条件分布 $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$。

它的计算公式为