yingyongxing benke shisanwu | 应用型本科 “十三五”规划重点教材 | guihua zhongdian jiaocai

高等数学

（上册）

◎ 董立伟 主编

◎ 施久玉 主审

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

yingyongxing benke shisanwu 应用型本科 “十三五”规划重点教材 guihua zhongdian jiaocai

高等数学

（上册）

◎ 董立伟 主编
◎ 施久玉 主审

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 董立伟主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2016.8（2018.8重印）
应用型本科“十三五”规划重点教材
ISBN 978-7-115-42719-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①董… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第158571号

内 容 提 要

本套书分为上、下两册。本书为上册（第一章～第六章），内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理，不定积分，定积分，微分方程；下册（第七章至第十二章）内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分和曲面积分，级数。内容安排力求条理清晰，循序渐进地阐明重要的数学思想。对基本理论和基本方法，本书坚持联系实际，以体现数学的应用性。部分章节标注星号，不同的读者可根据需求进行取舍。每节后配有习题，每章后配有复习参考题，在保证基本要求的前提下，也选用了少量综合性习题。

本书可作为各类应用型本科院校理工类、经济管理类专业“高等数学”的教材，也可作为各类工程技术人员的参考用书。

◆ 主　　编　董立伟
主　　审　施久玉
责任编辑　王亚娜
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：16.5　　　　　　2016 年 8 月第 1 版
字数：361 千字　　　　2018 年 8 月北京第 3 次印刷

定价：39.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

本书编委会

主　编： 董立伟

参　编： 张　坤　张　莹　尹宗明　杨慧贤

主　审： 施久玉

前言

高等数学是普通高校各类理工科和管理专业必修的重要基础课程。学好高等数学是学生学好许多后续专业课程的前提。同时，该课程对培养学生的逻辑思维能力、数学应用能力、专业实践能力起到了至关重要的作用。因此，高等数学教学也成为应用型本科教学中的重中之重。

北京交通大学海滨学院数学教研室在结合目前应用型本科院校学生实际的基础上，通过对几年来教学实践的总结和多方面的调查研究，积极借鉴各类优秀教材的优点，潜心编写了这套《高等数学》教材。本套教材坚持"力求严谨，贯彻思想，注重应用，利于自学"的原则。

"力求严谨"就是在保证数学的系统性和严密性的基础上，由浅入深、循序渐进，以易于学生逐步接受抽象的数学概念，并对于一些要求相对较高的数学推导做了适当的处理。

"贯彻思想"是指在本书中对"极限思想"及作为极限思想应用的"微元法"做了充分叙述，使得学生学完本课程后能够自然而然地接受这个数学的中心思想，并能够将其运用到实践中去。

"注重应用"体现在每一个新概念的引入尽量从实际出发，将抽象的数学概念与实际联系起来，同时在接受数学概念的基础上，又将概念延伸到新的应用中去。书中多处联系了物理、经济等各方面应用的实际问题，渗透了数学建模思想。

"利于自学"缘于例题选题覆盖面广，难度层次清晰，解题过程分析详细，重点题型解法配有小结，习题配备由易到难。书后附有内容全面的附录和习题参考答案，便于学生自主学习。

本套书分上、下两册，建议教学总时数为160～180学时。

参加本书编写工作的有：董立伟(第一章)、张坤(第二章)、张莹(第三章)、尹宗明(第四章)、杨慧贤(第五章)、施久玉(第六章和附录)。董立伟对本书进行了统稿，施久玉教授审阅了全书。肖金桐对本书的编写提出了建设性意见，并对参编人员做了悉心的指导。

本书的编写和出版得到了北京交通大学海滨学院领导的大力支持，在此对他们表示衷心的感谢。

尽管在本书出版之前我们经过反复修改，精心推敲，但由于时间和水平所限，所以书中纰漏乃至错误在所难免，望读者见谅，请广大读者指正。

编　者

2016年5月

目录

第一章

函数、极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分学的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此掌握和运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本概念和基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

第一节　函数的概念

一、常量与变量

在日常生活或生产实践中，一个事件的结果常用一个量来表现．在某一个观察的过程中，数值始终保持不变的量称为常量，数值经常变化的量称为变量．通常用小写字母 a ，b ，c ，…表示常量，用小写字母 x ，y ，z ，…表示变量．

例如，圆周率 π 、一条直线的斜率是常量，一天中的气温、工厂在生产过程中的产量、自由落体下落过程中的速度都是变量．

注意

（1）常量和变量是相对的，它们依赖于所研究的过程和所研究的对象，如商品的价格，在某段时间内是常量，而在另一段时间就有可能是变量．

（2）常量对应数轴上的定点，变量对应数轴上的动点．

二、区间、邻域

区间是用得较多的一类数集．设 a 和 b 为实数，且 $a<b$ ，则有如下几种有限区间．

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

左半开区间（或右半闭区间）$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$

或

右半开区间（或左半闭区间）$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$

上述 3 类有限区间，它们的区间长度均为 $b-a$．此外还有无限区间，引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间为

$$(a,+\infty)=\{x \mid x > a\};$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}.$$

实数集 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间．以后在不需要标明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用字母 I 表示．

为了讨论数轴上某点附近的性质，需要引入邻域的概念．

定义 1　设 a 是一个实数，δ 是正数（通常是指很小的数），数轴上到点 a 的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

如图 1-1 所示．

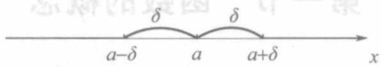


图 1-1

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$．这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$．

可见，邻域是以点 a 为中心的开区间．

为了需要，常称 $(a-\delta,a)$ 为 a 的左 δ 邻域，称 $(a,a+\delta)$ 为 a 的右 δ 邻域．当不强调 δ 时，还称以点 a 为中心的任何开区间为点 a 的邻域，记作 $U(a)$，相应地有点 a 的去心邻域、左邻域和右邻域．

三、函数

1. 函数的概念

定义 2　若 x、y 是两个变量，D 是 **R** 上的非空数集，设有一对应法则 f，使任一 $x \in D$，都有唯一确定的 y 与之对应，则称此对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个**函数**，记为

$$y=f(x), x \in D. \tag{1}$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**，一般记为 D_f．当 $x=x_0$ 时，按照对应法则 f 有 $y_0=f(x_0)$ 与之相对应，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，称 y_0、

$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**．当 x 在定义域 D 上取遍时，所对应的函数值的全体称为函数的**值域**，记为 R_f，即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

注意

(1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值．为了叙述方便，习惯上常用记号“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数．

(2) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的符号“f”也可用其他字母替代，如“F”“φ”等，这时函数就应记为 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等．有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$．

(3) 函数定义中有两个基本要素：定义域、对应法则．两个函数相等的条件是：当且仅当两个函数的定义域相同，对应法则也相同．

(4) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是有实际背景的函数，根据实际背景中的自变量的实际意义确定；另一种是抽象函数，通常约定使用算式有意义的实数组成的集合．

(5) 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，因此可以称为**单值函数**．如果给定一个对应法则，按这个对应法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 与之对应，但这个 y 不是唯一的，那么这个对应法则并不符合函数的定义，通常称这种法则确定了一个**多值函数**．例如，$x^2+y^2=1$ 能确定两个变量 x、y 之间的对应关系，但它不是所指的函数关系，比如 $x=0$ 相应的 $y=1$ 或 $y=-1$．多值函数可单值化，比如上述多值函数可单值化为 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$．

(6) 函数 $y=f(x)$ 可以用各种不同的方式表达．例如 $y=x^2$、$y=\sin x$ 等．这种函数表达方式的特点是：等式左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子．用这种方式表达的函数叫做显函数．有些函数的表达方式却不是这样，例如，$x+y^3-1=0$，当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，y 有唯一确定的值与之对应，故此方程表示一个函数．这时，用方程 $F(x,y)=0$ 表示 x 与 y 的对应关系，而在一定的条件下，当 x 取某区间内的任意值时，相应的总有满足方程的唯一的 y 值存在，用这种方式表达的函数叫做隐函数．值得注意的是，有的隐函数是可以化成显函数的，例如，从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就是把隐函数化成了显函数．但有些隐函数想化成显函数是困难的，例如，方程 $y=\frac{1}{2}\sin(x+y)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi-1}{2},\frac{\pi-1}{2}\right)$ 上定义了一个以 x 为自变量，y 为因变量的隐函数，但由此方程解出 y 是困难的．

有关函数的相等、函数的定义域和值域、函数的四则运算等概念在中学数学课本中已有介绍，下面举几个函数的例子．

例 1　已知 $f(x)=x^2$，求 $f(10)$，$f(a)$，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．

解 由 $f(x)=x^2$，得 $f(10)=10^2=100$，$f(a)=a^2$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{x(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域．

解 $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -1 \\ 9-x^2\geqslant 0 \end{cases}$，定义域 $D_f=[-3,-1)\cup(-1,0)\cup(0,3]$

2．函数的表示法

(1) 解析法：把变量之间的关系直接用方程给出，这些方程称为函数的解析表达式．用解析法表示函数便于进行理论研究．

(2) 表格法：把自变量和因变量的对应值用表格形式列出．这种表示法有利于查找函数值．比如三角函数表、常用对数表等．

(3) 图示法：把自变量和因变量的对应值描绘在某坐标系上．这种方法几何直观性强．比如，气象台自动温度计记录了某地区的一昼夜气温的变化情况，这条曲线在直角坐标系下反映出来的就是一个函数关系．

3．函数的性质

性质 1（函数的单调性） 设函数 $f(x)$ 定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意的 x，$y\in I$，当 $x<y$ 时，有 $f(x)<f(y)$（或 $f(x)>f(y)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加函数（或单调减少函数）**．

在 D 上的单调增加函数、单调减少函数统称为单调函数，也称函数具有单调性．

在几何上，单调增加（减少）函数的图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的（或逐渐下降的），如图 1-2、图 1-3 所示．

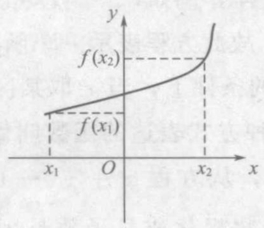


图 1-2

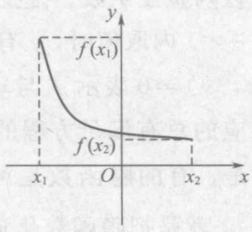


图 1-3

例如，$y=\sqrt{x}$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 内单调递增．在 $[0,+\infty)$ 内，对于任意的 x_1、x_2，若 $x_1<x_2$，则 $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$，因此，$y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增．

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，而在区间 $[0,+\infty)$ 上却单调递增，但在整个定义域内不是单调的，因而不是单调函数．

性质 2（函数的有界性） 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对

任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称为**无界**．如果存在数 M，使得对任意 $x \in I$，恒有 $f(x) \leqslant M$（或 $f(x) \geqslant M$），那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（或下界）．函数有界性的几何特征如图 1-4 所示．

显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界．

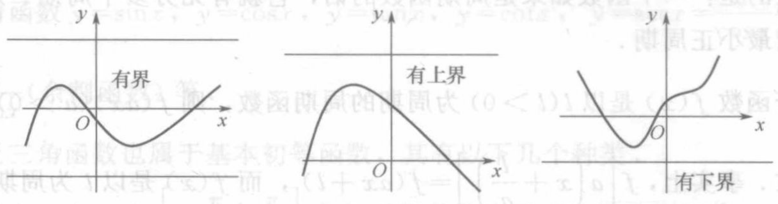


图 1-4

例如，三角函数 $y = \sin x$、$y = \cos x$ 是有界函数，因为对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $|\sin x| \leqslant 1$、$|\cos x| \leqslant 1$.

又如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无上界，但有下界（0 为一个下界）；而在 $(-\infty, 0)$ 内无下界，但有上界（0 为一个上界）．它在定义域内是无界的，但在任何不包含原点的闭区间上是有界的．

性质 3（函数的奇偶性）　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意 $x \in D$，有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意 $x \in D$，有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1-5 所示．

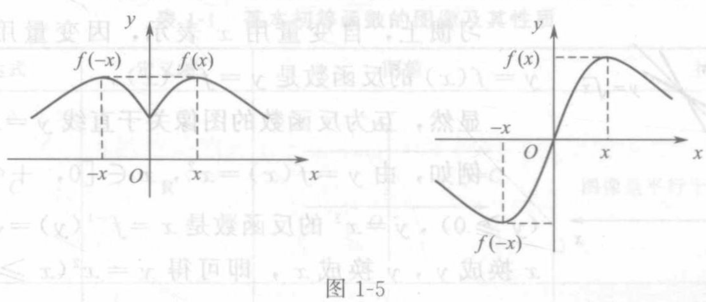


图 1-5

例如，$y = x^2$，$y = x^4$，$y = \cos x$ 等都是偶函数；而 $y = x^3$，$y = \sin x$ 等都是奇函数．但是，不是任何函数都有奇偶性，如 $y = 2x + 2$ 就是非奇非偶函数．

定义域相同的函数运算后的奇偶性有如下结论．

(1) 偶（奇）函数的和仍为偶（奇）函数；

(2) 两个偶（奇）函数的积为偶函数；

(3) 一偶一奇两个函数的积为奇函数.

性质4(函数的周期性) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 l,使得对任意 $x\in D$,有 $x\pm l\in D$,并且有 $f(x\pm l)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,并称 l 是函数 $f(x)$ 的一个周期.满足这个等式的最小正数 l 称为函数的最小正周期.

值得注意的是:一个函数如果是周期函数的话,它就有无穷多个周期.通常周期函数的周期,是指最小正周期.

例如,若函数 $f(x)$ 是以 $l(l>0)$ 为周期的周期函数,则 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{l}{a}$ 为周期的周期函数.事实上,$f\left[a\left(x+\dfrac{l}{a}\right)\right]=f(ax+l)$,而 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数,有 $f(ax+l)=f(ax)$,因此 $f\left[a\left(x+\dfrac{l}{a}\right)\right]=f(ax)$,即 $f(ax)$ 是以 $\dfrac{l}{a}$ 为周期的周期函数.由此推知,$y=\sin kx$ 以 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ 为周期,$y=\tan kx$ 以 $\dfrac{\pi}{|k|}$ 为周期.

四、初等函数

1. 反函数

定义3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D_f,值域是 R_f,若对任一 $y\in R_f$,有唯一的 $x\in D_f$,使得 $f(x)=y$.这就定义了 R_f 上的一个函数,此函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,$y\in R_f$.

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

$y=f(x)$ 存在反函数的条件是当且仅当 f 是 D_f 到 R_f 的一一对应关系,并且反函数的定义域是直接函数的值域,反函数的值域是直接函数的定义域.

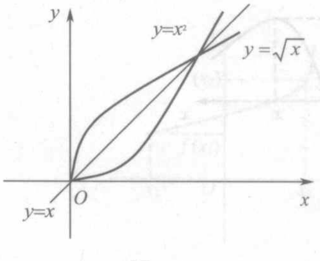


图 1-6

习惯上,自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,即得 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$.

显然,互为反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如,由 $y=f(x)=x^2$,$x\in[0,+\infty)$,得 $x=\sqrt{y}$ $(y\geqslant 0)$,$y=x^2$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}\,(y\geqslant 0)$,将 x 换成 y,y 换成 x,即可得 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$,如图 1-6 所示.

2. 基本初等函数

所谓基本初等函数就是指如下函数.

(1) 常值函数 $y=C$.

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R}$,即 α 是常数).

(3) 指数函数　$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，特别地，常用的指数函数是以常数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$（e 的定义见本章第四节）.

(4) 对数函数　$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$，称为自然对数；

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$（正割函数），$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$（余割函数）等.

此外，反三角函数也属于基本初等函数，其有以下几个种类.

(1) 函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，由反函数定义易得，当 $x\in[-1,1]$ 时，则有 $\sin(\arcsin x)=x$.

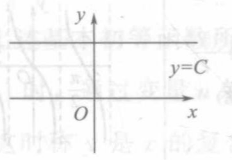
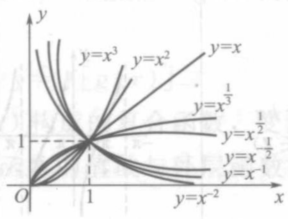
(2) 函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，由反函数定义易得，当 $x\in[-1,1]$ 时，则有 $\cos(\arccos x)=x$.

(3) 函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

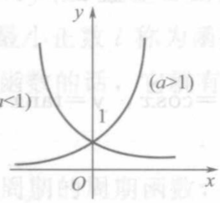
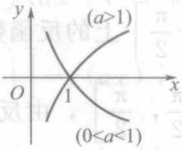
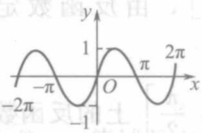
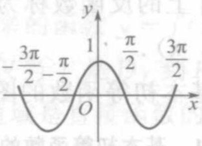
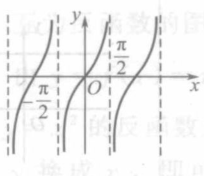
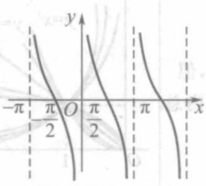
(4) 函数 $y=\cot x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$.

表 1-1 给出了最常用的一些基本初等函数的图像和性质.

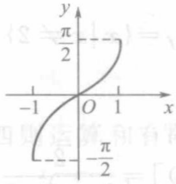
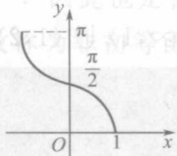
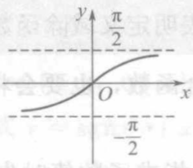
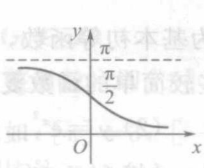
表 1-1　基本初等函数的图像及其性质

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
常值函数	$y=C$	**R**		图像是平行于 $y=f(x)$ 轴的直线
幂函数	$y=x^{\alpha}$	随 α 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义	（图像以第一象限为例）	(1)图像过点 (1,1)； (2)若 $\alpha>0$，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；若 $\alpha<0$，函数在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

续表

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		(1)当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少; (2)图像在 x 轴上方,且都过点 $(0,1)$
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		(1)当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少; (2)图像在 y 轴右侧,且都过点 $(1,0)$
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)是奇函数,周期为 2π,是有界函数; (2)在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少,其中 $k\in\mathbf{Z}$
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		(1)是偶函数,周期为 2π,是有界函数; (2)在 $((2k-1)\pi,2k\pi)$ 内单调增加;在 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 内单调减少,其中 $k\in\mathbf{Z}$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$		(1)是奇函数,周期为 π,是无界函数; (2)在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$		(1)是奇函数,周期为 π,是无界函数; (2)在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少

续表

函数名称	表达式	定义域	图像	主要性质
反三角函数	$y=\arcsin x$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$		奇函数，单调增加函数，有界
	$y=\arccos x$ $y\in[0,\pi]$	$[-1,1]$		(1)非奇非偶函数，单调减少函数，有界； (2) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
	$y=\arctan x$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加函数，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$ $y\in(0,\pi)$	$(-\infty,+\infty)$		(1)非奇非偶函数，单调减少函数，有界； (2) $\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

3. 复合函数

通常情况下，我们遇到的函数是由上述基本初等函数所构造的较为复杂的函数.

如由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$，当 $|x|\leqslant 1$ 时，通过变量 u 就建立了变量 x 与变量 y 之间的对应关系，即 $y=\sqrt{1+x^2}$，$|x|\leqslant 1$. 这时称 y 是 x 的复合函数.

定义 4 函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域是 R_g，且 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)]$$

称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，变量 u 被称为中间变量.

构造复合函数的前提条件是内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空，否则，就会成为无意义的函数.

比如，$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$，$D_f\cap R_g$ 为空集，复合起来的 $y=\sqrt{\sin x-2}$ 在实函数范

围内就没有意义.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$，求 $f[f(x)]$.

解 由于 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=\{x\mid x\neq 2\}$，所以 $f[f(x)]$ 必须满足 $f(x)\neq 2$，即 $\dfrac{2}{2-x}\neq 2$，得 $x\neq 1$. 于是

$$f[f(x)]=\frac{2}{2-f(x)}=\frac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}},$$

$$x\in(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty).$$

注意

此复合函数也可记为

$$f[f(x)]=\frac{2-x}{1-x}(x\neq 2),$$

其中“$(x\neq 2)$”不可省略，它表明定义域除函数表达式中隐含的 $x\neq 1$ 外，还有 $x\neq 2$.

在实际应用中既要会构造复合函数，也要会将复合函数分解为较简单的函数.

复合函数分解的原则如下.

(1) 由外向内分解. “内”是指求函数值时先做的运算，“外”即为求函数值时后做的运算.

(2) 分解出的每个函数必须为基本初等函数，或基本初等函数的四则运算式.

例 4 指出下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的.

(1) $y=(3x+2)^5$； (2) $y=e^{x^2}$；

(3) $y=\ln^2(3-2x)$； (4) $y=e^{(2x+1)^{10}}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 函数 $y=(3x+2)^5$ 由 $y=u^5$，$u=3x+2$ 复合而成；

(2) 函数 $y=e^{x^2}$ 由 $y=e^u$，$u=x^2$ 复合而成；

(3) 函数 $y=\ln^2(3-2x)$ 由 $y=u^2$，$u=\ln v$，$v=3-2x$ 复合而成；

(4) 函数 $y=e^{(2x+1)^{10}}$ 由 $y=e^u$，$u=v^{10}$，$v=2x+1$ 复合而成；

(5) 函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 由 $y=\ln u$，$u=x+\sqrt{v}$，$v=1+x^2$ 复合而成.

例 5 求函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域.

解 $y=\arcsin u$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$，要求 $|u|\leqslant 1$，即 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$，因此有 $-1\leqslant x\leqslant 2$，于是得到 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域为 $[-1,2]$.

例 6 已知 $f(x-1)=x(x-1)$，求 $f(x)$.

解法 1 因为 $f(x-1)=(x-1+1)(x-1)$，所以 $f(x)=(x+1)x$.