全国高等农林院校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

张丽娜 李春兰◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

张丽娜　李春兰　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/张丽娜，李春兰主编．—北京：中国农业出版社，2011.7（2018.8重印）
普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-15729-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①张…②李…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第150964号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码100125）
策划编辑　朱雷
文字编辑　朱雷　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
2011年7月第1版　2018年8月北京第5次印刷

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：15
字数：351千字
定价：25.00元

内容提要

本教材是高等农林院校非数学专业的概率论与数理统计教材. 全书共分八章，内容包括随机事件及其概率，随机变量的分布及其数字特征，统计量的抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等.

本教材结构严谨，层次清晰，由浅入深，循序渐进，知识与背景相结合，理论与应用相结合，手算和软件应用相结合，符合当前大众化教育体制下的教学要求，利于学生阅读和自学.

本教材适用于高等农林院校非数学本专科各专业学生使用，也可供相关专业的教师和科技工作者参考.

编　写　人　员

主　编　张丽娜　李春兰

副主编　陈俊英　杨雨时　乔均俭　李永慈

参　编（按姓名笔画排序）

付君丽　刘峰涛　闫广州　李友明

肖　涛　张彦蕊　邵洪波　商秀印

董连杰　韩光辉

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学分支，是普通高等院校本专科教育中一门重要的数学基础课，它的理论和方法在农林、经济、金融、工程技术等诸多领域有着广泛的应用. 比如，利用概率统计方法可以进行产品的抽样检验、气象预报、股市行情预报；在新产品或农作物品种的研发试验中，为寻求最佳生产或研发方案可以进行试验设计和统计分析；在工程技术应用中，可以进行系统的可靠性评估等.

本教材是由河北农业大学与北京林业大学合作编写的，其内容分为八章，第一～三章为概率论，第四～八章为数理统计.

从概率论与数理统计的教学经历中，我们深深体会到：教材的编排体系、教材内容以及叙述方式等至关重要，一本合适的教材往往会起到事半功倍的教学效果. 于是编写这本教科书时，我们尽可能地融入概率统计的基本思想、重要概念的背景与应用，增加趣味性、思想性和实用性. 在每节设有基本知识题，部分章配有一套综合复习题，以满足不同基础不同学习目标的学生需要. 选择的例题习题典型，便于初学者对基本概念的理解、对基本方法的掌握. 第一至第七章均设置了“课外阅读”板块，供有余力的学生自学，以便学生了解课程的背景和应用，提高学习兴趣. 教材最后附有常用的概率统计分布表及各章习题答案，供读者参考.

本教材力求结构严谨，层次分明，由浅入深，循序渐进，知识与背景相结合，理论与应用相结合，符合当前大众化教育体制下的教学

要求，利于学生阅读和自学.

教材适合普通高等院校本、专科各专业学生使用.

编写过程中参阅了许多优秀教材，从中摘取了不少好的例题和习题，使本教材增色不少，在此我们向这些著作者表示深深的谢意.

在此感谢河北农业大学和北京林业大学数学系全体教师，正是他们的关心、支持和鼓励，使我们顺利完成本教材的编写.

由于水平所限，不当和疏漏之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见和建议，我们将作进一步改进.

编　者

2011年5月

目　录

第一章　随机事件及其概率

在自然界与人类社会中普遍存在着两类现象. 一类是确定性现象，是指在一定条件下必然发生的现象. 例如，手拿一枚硬币，松开手，硬币往下落；种瓜得瓜，种豆得豆；每天早上太阳从东方升起，这些都是确定性现象. 但是，落下去的硬币哪一面向上；瓜长多大，豆结多少；日出时是否有云遮挡等，是我们事前无法准确预知的，像这样在一定条件下事先难以确定其结果的现象称为**随机现象**.

再如保险公司一年中的索赔人数，走到十字路口交通灯的颜色，在发生之前都难以确切知道其结果，这些随机现象呈现出很大的随机性和偶然性. 那么随机现象是否有规律可循呢？经过长期的实践和观察，人们逐渐发现所谓不可预言的随机性、偶然性，只是对一次或少数几次试验或观察而言的. 在相同条件下进行大量重复试验或观察时，其结果会呈现出某种规律性，称为随机现象的统计规律性. 概率论与数理统计正是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它在自然科学和社会科学的诸多领域都有着广泛的应用.

1.1　随机事件及其相互关系

1.1.1　随机试验与随机事件

为了获得随机现象的统计规律性，必须对随机现象在相同的条件下大量重复地做试验. 在概率统计中，我们把这类试验称为**随机试验**，简称试验，用字母 E 来表示. 一般地，一个随机试验要满足以下条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验以前不能确定；

(3) 事先能明确试验的所有可能结果.

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的，我们把随机试验的每一种可能的基本结果称为一个**样本点**，一般用 ω 表示. 全部可能的基本结果，即全体样本点组成的集合称为**样本空间**，一般用 Ω 表示.

例如：

(1) E_1：向上抛掷一枚硬币，观察其落地时出现正面朝上或反面朝上的情况. 样本空间为 $\Omega=\{$正面，反面$\}$. 若记 $\omega_1=\{$正面$\}$，$\omega_2=\{$反面$\}$，则样本空间可记为 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$.

(2) E_2：掷一枚均匀对称的骰子，观察向上一面出现的点数. 样本空间可简记为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(3) E_3：记录 110 报警台一天接到的报警次数. 其样本点有可数无穷多个，样本空间简记为 $\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

(4) E_4：考察某一批电子元件的使用寿命（h). 其样本点有无穷多个（且不可数)，样本空间记为 $\Omega_4=[0,+\infty)$.

(5) E_5 ：将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察两次出现正面、反面的情况．样本空间记为

$$\Omega_5 = \{(正、正),(正、反),(反、正),(反、反)\}.$$

(6) E_6 ：将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察正面出现的次数．所有可能的结果是“出现 0 次”，“出现 1 次”或“出现 2 次”，因此样本空间记为 $\Omega_6 = \{0,1,2\}$.

从上面的例子可知，样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集．另外，E_5 和 E_6 都是将一枚均匀的硬币抛掷两次，但其观察内容不同，样本空间也不同，所以样本空间中的元素即样本点是根据要观察的内容来确定的．

在研究随机现象时，我们通常关心的不仅是某个样本点在试验后是否出现，更关心的是具有某些特征的样本点在试验后是否出现．例如，在投掷一枚骰子 E_2 的试验中，我们会关心掷出的点数是否大于 3、是否为奇数等问题．“掷出的点数大于 3”是由 3 个样本点 4，5，6 所组成的集合，记 $A = \{4,5,6\}$ ，显然 A 是样本空间 Ω_2 的一个子集．

在概率论中，**将随机试验的每一种可能出现的结果称为随机事件**，简称事件，它通常是某些样本点组成的集合，常用英文字母 A,B,C 等表示．比如在随机试验 E_2 中，$A = \{$掷出的点数大于 3$\}$，$B = \{$掷出的点数是奇数$\}$ 统称为随机事件．

我们把随机事件的发生规定为：随机事件 A 发生 $\Leftrightarrow$ 随机事件 A 中的某一个样本点出现．例如在 E_2 中事件 $A = \{$掷出的点数大于 3$\}$，当掷出的点数是 4，5，6 中任何一个时，事件 A 发生．

下面介绍几种特殊的随机事件．

基本事件：由一个样本点构成的随机事件．

必然事件：在每次试验中都必然发生的事件，即样本空间 Ω．这是因为样本空间 Ω 包含所有的样本点，每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，所以又称样本空间为必然事件．

不可能事件：在任意一次试验中都不可能发生的事件，用符号 $\varnothing$ 表示．

比如在随机试验 E_2 中，$C = \{$恰好掷出 6 点$\}$ 是一个基本事件，$D = \{$掷出的点数小于 7$\}$ 是必然事件，$C = \{$掷出的点数大于 6$\}$ 是不可能事件．

本质上，必然事件和不可能事件已无随机性可言，但为了讨论方便，我们仍把 Ω 和 $\varnothing$ 当做两个特殊的随机事件．

1.1.2 事件间的关系及运算

在一个样本空间中可以有许多随机事件．我们希望通过对较简单事件的分析去了解较复杂的事件，所以需要研究同一随机试验中各种事件之间的关系和运算．由于随机事件实际上是样本空间的某一个子集，因此，事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是一致的．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们的概率意义．

1. 事件的包含与相等

若“事件 A 发生必然导致事件 B 发生”，则称事件 B 包含事件 A ，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 如图 1-1 所示．

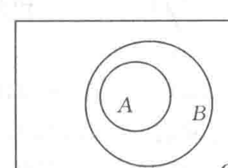

图 1-1

例如，记录某灯泡的使用寿命，设事件 $A = \{$至少使用 50h$\}$，

$B=\{$至少使用 60h$\}$，显然有 $B\subset A$．又如，掷一枚骰子，事件 $A=\{$出现 4 点$\}$ 必然导致 $B=\{$出现偶数点$\}$ 的发生，所以 $A\subset B$．

规定对任何事件 A，恒有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$．

事件间的包含关系具有传递性：若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$．

若“事件 B 包含事件 A，同时事件 A 也包含事件 B”，即“$A\subset B$ 且 $B\subset A$”，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$．

例如，掷两枚骰子，记事件 $A=\{$两枚骰子出现的点数之和为偶数$\}$，$B=\{$两枚骰子出现的点数之和是 2 的倍数$\}$，易知 $A=B$.

2. 事件的和（或并）

事件 A 和事件 B 至少发生其一的事件称为 A 与 B 的和事件（或并事件），记作 $A\cup B$．如图 1-2 所示.

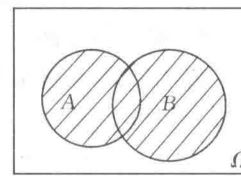

图 1-2

例如：在检查圆柱形产品时，规定产品的长度和直径都合格时，产品才算合格. 若用 A 表示“直径不合格”、用 B 表示“长度不合格”、用 C 表示“产品不合格”，则 $C=A\cup B$．

由事件和的定义可得：对任一事件 A，有 $A\cup\varnothing=A$，$A\cup\Omega=\Omega$．

类似地，可以定义 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生其一的事件 A 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和（或并），记做

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i\,.$$

推广到可列多个事件的情形，即 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 至少发生其一的事件.

例如，某人有 n 位朋友，他给每位朋友写了一封信，将其放入信封中，并在每一个信封上分别任意地写上 n 位朋友的地址（不重复）. 若记 $A_i=\{$在第 i 个信封上所写的地址正确$\}$，$A=\{$至少有一个信封上所写的地址正确$\}$，则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$．

3. 事件的积（或交）

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称做 A 与 B 的积事件（或交事件），记做 AB 或 $A\cap B$. 如图 1-3 所示.

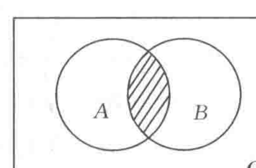

图 1-3

例如：在检查圆柱形产品时，规定产品的长度和直径都合格时，产品才算合格. 若用 D_1 表示“直径合格”、用 D_2 表示“长度合格”、用 D 表示“产品合格”，则 $D=D_1\cap D_2$.

类似地，积事件的概念也可以推广到有限多个或无穷可列多个事件的情形，即事件

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件；

$A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示一列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件.

例如，某人有 n 位朋友，他给每位朋友写了一封信，将其放入信封中，并在每一个信封上分别任意地写上 n 位朋友的地址（不重复）. 若记 $B_i=\{$在第 i 个信封上所写的地址不正确$\}$，$B=\{$没有一个信封上所写的地址正确$\}$，则 $B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$．

4. 事件的互斥

若“事件 A 与事件 B 不可能同时发生”，即“$AB=\varnothing$”，则称事件 A 与 B 为互斥事件，或称做互不相容事件，如图 1-4 所示. 对于互斥事件的和事件 $A\cup B$，也可以记作 $A+B$.

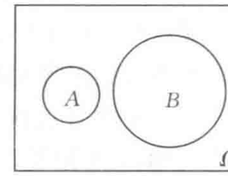

图 1-4

例如，在掷一枚骰子的试验中，记 $A=\{$出现的点数为奇数$\}$，$B=\{$出现的点数为 4$\}$，则 A 与 B 为互斥事件.

若“事件组中任意两个事件均互斥”，则称该事件组两两互斥. 例如，在同一随机试验中基本事件是两两互斥的.

5. 事件的互逆

若“事件 A 与事件 B 的和事件为必然事件，且积事件为不可能事件”，即

$$“A\cup B=\Omega\,,A\cap B=\varnothing”,$$

则称事件 A 与事件 B 为互逆事件，或叫做对立事件，如图 1-5 所示. 通常把 A 的对立事件记做 $\overline{A}$.

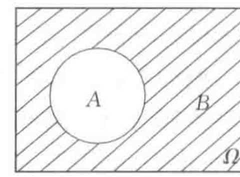

图 1-5

例如，在抛掷骰子的试验中，设事件 $A=\{$掷出的点数大于 3$\}$，则其互逆事件 $\overline{A}=\{$掷出的点数小于等于 3$\}$.

6. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$，如图 1-6 所示. 显然有 $A-B=A\overline{B},\overline{A}=\Omega-A$.

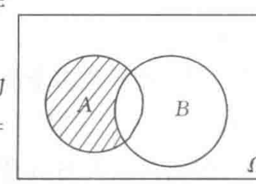

图 1-6

例如，从 $1,2,\cdots,9$ 九个数字中任意选取一个，记 $A=\{$取到的为偶数$\}$，$B=\{$取到的数小于 5$\}$. 则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$；$A\cap B=\{2,4\}$；$A-B=\{6,8\}$.

7. 事件间的运算规律

由集合的运算律易给出事件间的运算律. 设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律推广到 n 个事件：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

例 1.1 设 A,B,C 表示 3 个事件，试以 A,B,C 的运算来表示以下事件：

(1) 只有 A 发生；

(2) A,B,C 都发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) A,B,C 恰有一个发生；

(6) A,B,C 不全发生.

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) ABC；

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $A \cup B \cup C$；

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(6) $\overline{ABC}$.

例 1.2　加工某一零件共需三道工序，令 $A_i=\{$第 i 道工序出现次品$\}$（$i=1,2,3$），试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1) 恰有一道工序出现次品；

(2) 至少有两道工序出现次品；

(3) 至少有一道工序出现次品；

(4) 加工的零件为次品；

(5) 加工的零件为合格品.

解　(1) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(2) $\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1A_2A_3$；

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；

(4) 同 (3)；

(5) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

习　题　1.1

1. 写出随机试验所具备的三个特点.

2. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时投掷 3 颗骰子，记录 3 颗骰子的点数之和；

(2) 同时投掷 3 颗骰子，记录 3 颗骰子出现的最大点数；

(3) 生产产品直到得到 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 在某十字路口，1h 内通过的机动车数.

3. 某人去狩猎，向一只正在跑动的兔子连打三枪，设 A_i 表示“第 i 枪击中目标”（$i=1,2,3$），试用 A_1,A_2,A_3 表示下列各事件：

(1) 只击中第一枪；　(2) 只击中一枪；　(3) 恰好击中两枪；

(4) 至多击中两枪；　(5) 至多击中一枪；　(6) 至少有一枪没有击中.

4. 说明事件“A,B 至少发生一个”与事件“A,B 至多发生一个”是否为对立事件.

5. 指出下列关系式中哪些成立，哪些不成立，并说明为什么.

(1) 若 $A \subset B$，则 $\overline{B} \subset \overline{A}$；　(2) $A\overline{B}=A-AB=A-B$；

(3) $\overline{A \cup B} \cap C=\overline{AB}\,\overline{C}$；　(4) $A(B-C)=AB-AC$.

1.2　概率的定义及其性质

在一次随机试验中，事先并不能确定随机事件 A 是否会发生（必然事件和不可能事件