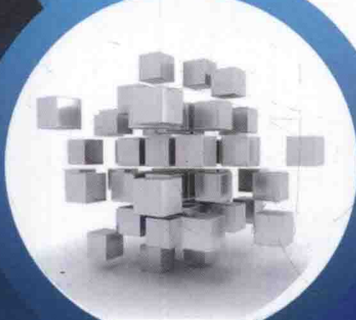
l_1- Embeddability of Graphs and Its Applications

图的l_1-嵌入性理论及其应用

王广富·著



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

图的 l_1 - 嵌入性理论及其应用

王广富　著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

图的 l_1 - 嵌入性理论及其应用 / 王广富著. —南京：东南大学出版社，2017.12

ISBN 978-7-5641-7571-9

Ⅰ. ①图… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①图论—研究 Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 319476 号

图的 l_1 - 嵌入性理论及其应用

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网　　址	http://www.seupress.com
责任编辑	孙松茜(E-mail:ssq19972002@aliyun.com)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	虎彩印艺股份有限公司
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	10.5
字　　数	212 千字
版　　次	2017 年 12 月第 1 版
印　　次	2017 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-7571-9
定　　价	49.80 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025-83791830)

前　言

现实世界中，许多问题都可以用图来表示. 这里的"图"是指由点和线构成的图形. 例如，点代表车站，线代表铁路构成的铁路网络图；点代表计算机，线代表连接计算机的网线构成的计算机网络图；点代表电子元件，线代表电子元件之间连接的物理导线构成的电网络图等. 事实上，对给定的对象集合，对象间定义一种二元关系，两个对象之间具有此二元关系，则连接一条线，否则不连线. 这就构成了一个图. 图论正是研究这类图的结构和性质等问题的一门学科.

自 1736 年 Euler 发表第一篇图论论文——《哥尼斯堡的七座桥》开始，特别是 20 世纪 70 年代随着计算机科学的发展，图论发展十分迅速，应用也十分广泛. 它在物理学、化学、运筹学、计算机科学、网络理论等方面均有应用.

度量(或距离)空间是泛函分析中最基本的概念，它为统一处理分析学各分支的重要问题提供了一个共同基础. 它研究的范围非常广泛，包括了在工程技术、物理学和数学中遇到的许多有用的函数空间. 同时，度量(或距离)也是图论、组合优化等离散数学中非常核心的研究对象，比如两点之间的最短路问题、中国邮递员问题、网络最大流等问题. 它在其他数学领域及应用中也都出现过，比如距离几何(distance geometry)、组合矩阵论、设计理论、量子力学、统计物理、分析和概率论等.

除了数学理论上的研究，度量还在其他领域有很多应用. 在计算机科学中，许多最基本的问题都涉及数据点集以及它们之间的相似性或异样. 数据分类、最近邻点搜索、点集直径的计算以及网络搜索等都属于这个范畴. 在生物学中，许多计算基因组学的应用需要 DNA 或蛋白质序列的数据库的搜索或聚类. 为了解决此类问题，人们通常是利用问题对象所处的空间来获得更好的算法. 但遗憾的是，很多有意义的度量空间尚未被深入研究，因而其中很多有用的结构定理尚不为人所知. 受此问题的驱动，一个自然的想法是将考虑的问题对象放到一些研究很成熟的基本度量空间中，然后利用基本度量空间的特殊结构性质来获得更有效的算法. 例如图的 Wiener 指标，即图中所有点对之间的距离和，直接利用定义公式计

算，其复杂度为顶点立方阶的. 但若图是l_1-嵌入的，其计算复杂度则可以降为顶点线性阶的. 因此研究图的伴随度量空间能否等距离嵌入到l_1-空间中，具有重要的意义.

这方面的工作起源于 Cayley 1841 年的一些结果，在 20 世纪二三十年代由 Menger，Schoenberg 等继续研究得到丰富和发展. 其中最著名的是 Schoenberg 的结论，距离空间(X,d)是等距离 L_2-嵌入的当且仅当到距离 d 的平方 d^2 满足一组线性不等式(称为负型不等式). 这些结果后来在L_p-空间中予以了推广. 对于我们尤其重要的是 Bretagnolle，Dacunha Castelle 和 Krivine(1966 年)的结论：(X,d)是等距离 L_p-嵌入的当且仅当(X,d)的每个有限子空间也是等距离 L_p-嵌入的.

我们的目标是研究在巴拿赫(Banach) l_1-空间中的等距离嵌入问题，主要是用组合的方法来研究. 现在假设在图 $G=(V,E)$的两个顶点 u，v 之间的距离 $d(u,v)$定义为连接这两点的一条最短路的长度，则$(V(G),d)$是一个度量空间，称之为图 G 的伴随度量空间. 一个图 G 是l_1-嵌入的，如果它的伴随度量空间可以等距离嵌入到l_1-空间中.

本书的撰写得到了国家自然科学基金(Nos. 11261019，11361024，11501282)和江西省自然科学基金(No. 20161BAB201030)的支持，同时感谢东南大学出版社的领导和孙松茜编辑的帮助. 本书参考了众多的专著和论文，特别是 M. Deza 教授和 M. Laurent 教授合著的《Geometry of Cuts and Metrics》、S. Ovchinnikov 教授编写的《Graphs and Cubes》、W. Imrich 和 S. Klavžar 合著的《Product Graphs：Structure and Recognition》. 在写作过程中，兰州大学徐守军教授给予了部分参考资料，南昌大学王凡博士在超立方体图方面给予了很大的支持. 此外，王凤灵同志认真仔细地校对了全稿. 在此一并表示诚挚的感谢！限于作者水平有限，书中难免有一些缺点和错误，恳请同行专家及读者提出宝贵意见和建议，多多批评指正.

王广富

2017.11.10 于华东交通大学

目　　录

第 1 章　图的基本概念

1.1　图与子图

定义 1.1　一个图 G 是指由非空集合 V 和边集合 E 构成的有序对 (V,E). 其中 V 中的元素称为顶点，E 中的每个元素是 V 中两个元素的无序对，称为边. 一般地，记为图 $G=(V,E)$，为简单起见，常用大写英文字母 $G,H,\cdots$. 一个图称为有限的，如果它的顶点集合是有限的；否则称为无限图. 当同时考虑多个图时，比如 $G,H,\cdots$，为了区分图的顶点集合和边集，常写作 $V(G),E(G),V(H),E(H),\cdots$.

例 1　设图 $G=(V(G),E(G))$，其中

$$V(G)=\{u,v,w,x,y,z,s\}$$

$$E(G)=\{uw,vw,wx,wy,yz,ys\}$$

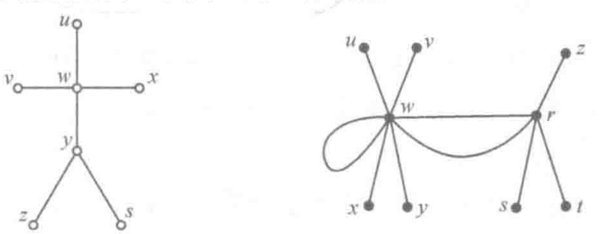
例 2　设图 $H=(V(H),E(H))$，其中

$$V(H)=\{u,v,w,x,y,z,r,s,t\}$$

$$E(H)=\{uw,vw,ww,wx,wy,wr,wr,zr,rs,rt\}$$

这里构成图的元素称为顶点和边是因为它们都有具体的几何表示：我们可以在平面或者空间中用一个小圆圈（或者小黑点）代表 V 的一个顶点，两个顶点构成的无序对若在 E 中出现，则我们把这两个小圆圈（或者小黑点）用一条（不论形状的）线连接起来. 这就是图 $G=(V,E)$ 的一种画法. 对一个图来说，它的画法有很多种.

图 1-1 所示分别是例 1 和例 2 的一种画法.



(a) G　　(b) H

图 1-1　例 1 和例 2

如果 $e=uv$ 是图 G 的一条边，则：称 e 连接顶点 u 和 v；称边 e 与 u 和 v 相邻接；u 和 v 称为 e 的端点；称 u 和 v 是相邻的. 两个相邻的顶点互称为邻点，顶点 v 的所有邻点构成的集合记为 $N_G(v)$（在不引起混淆的情况下，可简记为 $N(v)$）. 一般地，还常记 $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$. 若一条边的两个端点相同，则称这条边为自环. 若两条边有相同的端点，则称它们为重边. 若两条边恰有一个公共端点，也称它们是相邻的. 不含有自环和重边的图，称为简单图. 本书在没有特别说明的情况下，研究的都是简单图.

在图 G 中，顶点 v 的所有邻点的数目称为点 v 在 G 中的度，记为 $d_G(v)$，简记为 $d(v)$. 显然，$d_G(v)=|N_G(v)|$.

自然地，我们可得图论第一个定理（也称为握手定理）：

定理 1.2 $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2|E|$.

图 H 称为图 G 的子图，如果 $V(H)\subseteq V(G)$，且 $E(H)\subseteq E(G)$. G 的生成子图是指满足 $V(H)=V(G)$ 的子图 H. 假设 S 是 V 的一个非空子集. 以 S 为顶点集，以两端点均在 S 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由 S 导出的子图，记为 $G[S]$. 图 G 的一个导出子图唯一地被它的顶点集合所确定.

假设 E' 是 E 的非空子集. 以 E' 为边集，以 E' 中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为 G 的由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$，简称为 G 的边导出子图.

1.2 同构和自同构

对于一个图有很多不同的画法，但是这些画法显然都表示的是同一个图，故它们有相同的结构. 为了说明这点，引进下面的定义.

定义 1.3 两个图 G 和 H 是恒等的，记作 $G=H$，如果 $V(G)=V(H)$ 且 $E(G)=E(H)$.

定义 1.4 图 G 和 H 是同构的，记为 $G\cong H$，如果存在从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的双射 φ 保持邻接性，即 $uv\in E(G)$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E(H)$. 其中映射 φ 称为 G 和 H 之间的同构（isomorphism）.

图的一个自同构是指图到它本身的一个同构. 事实上，图 G 的一个自同构是它的顶点集上的一个置换. 图 G 的所有自同构构成的集合在置换运算下形成一个群，这个群习惯称为图 G 的自同构群，记作 $\mathrm{Aut}(G)$.

1.3　途径、路和圈

图 G 的从 v_0 到 v_k 的一条途径(或者简记为 v_0v_k - 途径)是指 G 中一个点边序列：

$$W=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{i-1}e_iv_i\cdots v_{k-1}e_kv_k$$

其中 $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 是图 G 的顶点，$e_1,e_2,\cdots,e_k$ 是图 G 的边，对所有的 $1\leqslant i\leqslant k$，v_{i-1} 和 v_i 是边 e_i 的两个端点. 称 v_0 是 W 的起点，v_k 是 W 的终点，它们也称为 W 的端点，其他点都是 W 的内点. 因为一条边是它的两个端点的无序对，所以一条途径完全可以由它的顶点序列来确定. 我们常常把 W 写成 $W=v_0v_1\cdots v_k$. W 所含的边数即整数 k 称为 W 的长度. 根据长度为奇数或者偶数，途径分别称为奇途径或者偶途径. 只有一个点的途径为平凡途径，其长度为 0.

假设 $W=v_0v_1\cdots v_{k-1}v_k$ 是图 G 中的一条非平凡途径. 如果 $v_0=v_k$，则称 W 为闭途径，否则，称为开途径. 如果 W 中的所有顶点两两不同，则 W 称为图 G 的一条路，常用符号 P 来表示. 如果一条路 P 的起点和终点分别为 u 和 v，我们称 P 是一条 uv - 路，或者 P 连接顶点 u 和 v. 显然，每条边 $e=uv$ 可以看成是一条 uv - 路或者 vu - 路. 路 P 所含的边的数目称为路 P 的长度. 只有一个顶点的路称为平凡的，其长度为 0.

一条长度为 $k(\geqslant 3)$ 的闭途径 $C=v_0v_1\cdots v_{k-1}v_0$，如果所有的顶点 $v_0,v_1,\cdots,v_{k-1}$ 都是两两不同的，则称这样的途径 C 为圈. 根据 k 的奇偶性，分别称为 C 为奇圈或者偶圈. 易证：

定理 1.5　任何开的 uv - 途径 W 一定包含从 u 到 v 的路.

定理 1.6　每个闭的奇途径 W 含有一个奇圈.

图 $G=(V,E)$ 的两个顶点 u 和 v 称为连通的，如果在图 G 中存在一条 uv - 途径. 显然，每一个顶点到它自己是连通的(通过一条平凡的途径). 在集合 V 上，连通性满足自反性、对称性和传递性，所以连通性是集合 V 上的一个等价关系，这个等价关系的等价类称为图 G 的连通分支. 若图 G 恰有一个等价类，则称图 G 为连通的，否则称图 G 是不连通的. 由定理 1.5，如果图 G 的任意两个不同的顶点都可以通过一条路连接起来，则图 G 是连通的.

图 1 - 1 中的两个图都是连通的. 作为一个不连通的极端情况，就是至少有两个顶点的空图，是指图 $G=(V,E)$ 满足 $|V|>1$ 且 $E=\varnothing$(也就是没有边的图). 设

$F\subset E$,若 F 中的任意两条边都不相邻,则称 F 为图 G 的一个匹配.一个匹配 F 称为图 G 的完美匹配,如果图 G 的每个顶点都恰好关联 F 中的一条边.

1.4 距离和区间

设图 $G=(V,E)$ 是一个图,u 和 v 是图 G 的两个顶点.定义 u 和 v 之间的距离为图 G 中连接 u 和 v 的一条最短路的长度,记作 $d_G(u,v)$(简记为 $d(u,v)$).若 u 和 v 之间没有最短路,则令 $d_G(u,v)=\infty$.

若图 $G=(V,E)$ 是连通的,则集合 V 加上距离 d_G 就构成了一个度量空间,也就是,任取 V 中的三个顶点 $u,v,w,d:V\times V\to\mathbf{R}$ 满足下面三个条件:

1. $d(u,v)\geqslant 0$,且 $d(u,v)=0$ 当且仅当 $u=v$;
2. $d(u,v)=d(v,u)$;
3. $d(u,w)+d(w,v)\geqslant d(u,v)$(三角形不等式).

习惯上称此度量空间为伴随 G 的图度量空间.

下面介绍关于图的距离中常用的概念——离心率(eccentricity).设 $v\in V(G)$,则顶点 v 的离心率($e(v)$)定义为 $e(v)=\max\limits_{u\in V(G)} d(u,v)$.图 G 中所有顶点的离心率的最大值称为图 G 的直径,记为 $D(G)$;所有顶点的离心率的最小值称为图 G 的半径,记为 $R(G)$,即

$$D(G)=\max_{v\in V(G)} e(v)=\max_{v\in V(G)}\max_{u\in V(G)} d(u,v)$$

$$R(G)=\min_{v\in V(G)} e(v)=\min_{v\in V(G)}\max_{u\in V(G)} d(u,v)$$

直径也可以看作是图 G 中任意两点间距离的最大值.如果图 G 的两个顶点 u,v 之间的距离恰好等于直径,即 $d(u,v)=D(G)$,则称它们是对径的(diametrical),顶点 v 称为中心的(central).如果 $e(v)=R(G)$,则

命题 1.7 对任意连通图 G,都有 $R(G)\leqslant D(G)\leqslant 2R(G)$.

证明:第一个不等式根据定义显然成立.选择图 G 的两个对径点 u,v,则 $d(u,v)=D(G)$.假设 w 是 G 的中心点,则

$$D(G)\leqslant d(u,w)+d(w,v)\leqslant 2R(G)$$

如果 $V(H)\subseteq V(G)$ 且 $E(H)\subseteq E(G)$,则图 H 为图 G 的子图,称 H 包含在 G 中或者 G 包含 H,分别记作 $H\subseteq G$ 或者 $G\supseteq H$.如果 $H\neq G$,则称 H 是 G 的真子图,记作 $H\subset G$.

设 $H\subseteq G$,因为子图 H 的一条路也是图 G 中的一条路,因此对任意的 $u,v\in$

$V(H)$，$d_H(u,v)\geqslant d_G(u,v)$. 若对 $V(H)$ 中任意两点 u,v，都有 $d_H(u,v)=d_G(u,v)$，则称 H 为 G 的等距离子图.

一般地，对任意两个图 G 和 H，映射 $\varphi:V(H)\to V(G)$ 是一个等距离映射，如果任意的 $u,v\in V(H)$，都有

$$d_H(u,v)=d_G(u,v)$$

显然，H 在等距离映射下的像是图 G 的等距离子图.

定义 1.8　设 G 是一个图，区间 $I_G(u,v)$ 定义为

$$I_G(u,v):=\{w\in V\mid d(u,v)=d(u,w)+d(w,v)\}$$

有时由 $I_G(u,v)$ 导出的 G 的子图也用 $I_G(u,v)$ 表示. 在不引起混淆的情况下，用 $I(u,v)$ 替代 $I_G(u,v)$.

注：图 G 是连通的当且仅当在图 G 中没有区间是空集.

命题 1.9　设 $G=(V,E)$ 是一个连通图，则对任意的 $u,v\in V$，有：

1. $u,v\in I(u,v)$；
2. $I(u,v)=I(v,u)$；
3. 若 $x\in I(u,v)$，则 $I(u,x)\subseteq I(u,v)$；
4. 若 $x\in I(u,v)$，则 $I(u,x)\cap I(x,v)=x$；
5. 若 $x\in I(u,v)$，$y\in I(u,x)$，则 $x\in I(y,v)$.

引理 1.10　设 C 是图 G 中最短的圈或最短的奇圈，则 C 在图 G 中是等距离的.

证明：设 C_{2k+1} 是图 G 的一个最短的奇圈 $v_1v_2\cdots v_{2k+1}$. 换句话说，我们假设图 G 中没有比 C 更短的奇圈，但是可能有比 C 更短的偶圈. 如果 C_{2k+1} 不是等距离的，则一定存在两个顶点 v_1 和 v_r，满足 $d_G(v_1,v_r)<d_{C_{2k+1}}(v_1,v_r)=r-1$. 我们不妨设取得的 C 使得 r 尽可能小且不超过 k，那么一定存在一条等距离路 $P=v_1w_2\cdots w_sv_r$，其长度小于 $r-1$，而且与 C 仅在 v_1 和 v_r 相交（否则，存在 P 与 C 的另一个公共顶点 w）. 如果 $d_G(v_1,w)\geqslant d_C(v_1,w)$ 和 $d_G(w,v_r)\geqslant d_C(w,v_r)$ 都成立，则

$$d_G(v_1,v_r)=d_G(v_1,w)+d_G(w,v_r)\geqslant d_C(v_1,w)+d_C(w,v_r)\geqslant d_C(v_1,v_r)$$

与 $d_G(v_1,v_r)<d_C(v_1,v_r)$ 矛盾. 因此，$d_G(v_1,w)<d_C(v_1,w)$ 或者 $d_G(w,v_r)<d_C(w,v_r)$ 成立，这与 r 的选择矛盾. 但是圈 $v_1v_2\cdots v_rw_sw_{s+1}\cdots w_2$ 和圈 $v_1w_2\cdots w_sv_rv_{r+1}\cdots v_{2k}v_{2k+1}$ 都比 C 要短，因为它们的和 $2s+(2k+1)$ 是奇数，所以至少有一个一定是奇数，这与 C_{2k+1} 的选择相矛盾.

现在，设 C 是图 G 中的一个最短圈. 如果它是奇圈，由上可得. 如果它是一个

偶圈，$C=v_1v_2\cdots v_{2k}$ 并且不是等距离的，与上面类似可以证明，有两个圈 $v_1v_2\cdots v_rw_sw_{s-1}\cdots w_2$ 和 $v_1w_2\cdots w_sv_rv_{r+1}\cdots v_{2k-1}v_{2k}$ 都比 C 要短，这与 C 的最小性相矛盾. ■

引理 1.11 图 G 是二部图当且仅当它不含奇圈.

证明：必要性：设 G 是具有二部划分 X 和 Y 的图，并且 $C=v_0v_1\cdots v_kv_0$ 是 G 的一个圈. 不妨设 $v_0\in X$. 则根据二部图的定义，$v_{2i}\in X$，且 $v_{2i+1}\in Y$. 又因为 $v_0\in X$，所以 $v_k\in Y$. 因此，C 是一个偶圈.

充分性：显然，只要对连通图证明结论是成立的就够了. 设 G 是不包含奇圈的连通图. 任选一个顶点 u 且定义两个集合如下：

$$X=\{x\mid d(u,x)\text{是偶数},x\in V(G)\}$$
$$Y=\{x\mid d(u,x)\text{是奇数},x\in V(G)\}$$

则 (X,Y) 是 $V(G)$ 的一个划分. 下面证明这是 G 的一个二部划分. 假设 v 和 w 是 X 的两顶点，P 是一条最短的 u,v－路，Q 是一条最短的 u,w－路. 以 z 记 P 和 Q 的最后一个公共顶点. 因为 P 和 Q 都是最短路，P 和 Q 的长都是偶数，所以 P 的从 z 到 v 的一段 P_1 和 Q 的从 z 到 w 的一段 Q_1 必有相同的奇偶性. 由此推出 v,w－路 $P_1^{-1}Q_1$ 的长度为偶数. 若 v 和 w 相连，则 $P_1^{-1}Q_1wv$ 就是一个奇圈，与假设矛盾，故 X 中任意两个顶点不相邻. 类似地可以证明 Y 中任意两个顶点也不相邻. ■

1.5 图的运算

设 $F\subset E$，则图 $G\backslash F:=(V,E\backslash F)$ 称为从图 G 删除 F 得到的. 当 $F=\{e\}$ 时，我们简记 $G\backslash\{e\}$ 为 $G\backslash e$. 在图 G 中，收缩边 $e:=uv$ 就是把 u 和 v 等同为一个顶点，然后删除边 e 以及等同 u 和 v 后出现的重边. 用 G/e 表示图 G 收缩边 e 后所得的图. 若 $F\subset E$，则 G/F 表示图 G 通过收缩 F 中的所有边（以任意顺序）后得到的图.

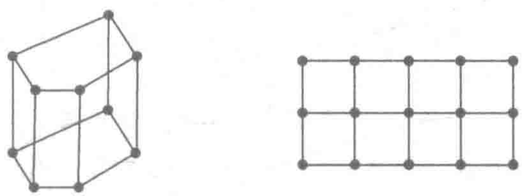
简单图 $G=(V,E)$ 的补图 $\bar{G}=(V(\bar{G}),E(\bar{G}))$ 定义为如图 1－2 所示的简单图，$V(\bar{G})=V(G)$，且 $xy\in E(\bar{G})$ 当且仅当 $xy\notin E(G)$.

(a) 图G　　(b) 图G的补图$\overline{G}$

图 1-2 图 G 和它的补图

1.5.1 图的卡式积

图 G 和 H 的卡式积(Cartesian product)是指图 $G\Box H$,其顶点集是卡式积 $V(G)\times V(H)$,两个顶点(u,v)和(x,y)相邻当且仅当 $u=x$ 且 $vy\in E(H)$或者 $ux\in E(G)$且 $v=y$. 例如图 1-3 表示的是 $K_2\Box C_5$ 和 $P_3\Box P_5$. 这里 K_2 指两个顶点的完全图,P_2 和 P_3 分别表示两个顶点和三个顶点的路.



(a) $K_2\Box G_5$　　(b) $P_3\Box P_5$

图 1-3 卡式积

注意,K_1 是卡式积的单位元,即 $K_1\Box G=G,G\Box K_1=G$. 进一步,定义从 $V(G\Box H)$到 $V(H\Box G)$的映射 φ 为 $\varphi(u,v)=(v,u)$,此映射为 $G\Box H$ 到 $H\Box G$ 的同构映射. 在此意义下,卡式积是可交换的. 结合律则需要一点点讨论.

命题 1.12 卡式积满足结合律.

证明:我们证明映射

$$\psi:V((G_1\Box G_2)\Box G_3)\to V(G_1\Box(G_2\Box G_3))$$
$$\psi:((u_1,u_2),u_3)\mapsto(u_1,(u_2,u_3))$$

是$(G_1\Box G_2)\Box G_3$ 到 $G_1\Box(G_2,G_3))$的同构. 显然,ψ 是一个双射. 这样我们只需证明两个顶点 u,v 在$(G_1\Box G_2)\Box G_3$ 中相邻当且仅当 $\psi(u),\psi(v)$在 $G_1\Box(G_2\Box G_3)$ 中相邻.

如果 u 和 v 是相邻的,则它们一定是不同的,且至少有一对 $u_i,v_i(i\in n\{1,2,3\})$ 一定包含两个不同的元素. 若恰好有一对 u_k,v_k,则$[u,v]$是一条边当且仅当

$[u_k,v_k]\in E(G_k)$. 这个条件也能确定 $\psi(u),\psi(v)$是相邻的.

若 $u_i,v_i(i=1,2,3)$有两对或三对包含两个不同的元素，则 u,v 和 $\psi(u),\psi(v)$ 都不相邻. ■

由此同构的意义下，图的卡式积满足交换律、结合律. 因此，我们把 $n(\geqslant 2)$ 个图 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的卡式积 $G_1\square G_2\square\cdots\square G_n$ 可以写成 $\prod_{k=1}^{n}G_k$.

假设 $G\square H$ 是图 G 和 H 的卡式积. 映射

$$p_1:(u,v)\to u \qquad 和 \qquad p_2:(u,v)\to v$$

是分别称为从 $V(G\square H)$到 $V(G)$和 $V(H)$的投影. 由卡式积定义，易得 $G\square H$ 的每条边在其中一个投影下的像是一个顶点，而在另一个投影下的像则是一条边.

引理 1.13 设 P 是 $G\square H$ 中的一条路，则 P 在 p_1 投影下的像 $p_1(P)$是在 G 中的一条路. 同样地，$p_2(P)$是 H 中的一条路.

定理 1.14 设 G 和 H 是两个连通图，那么

(1) 图 $G\square H$ 也是连通的；

(2) $d_{G\square H}((u,v),(x,y))=d_G(u,x)+d_H(v,y)$.

证明：(1) 假设(u,v)和(x,y)是图 $G\square H$ 中的任意两个顶点. 因为 G 和 H 都是连通图，则在 G 中存在一条路 $u=u_1,\cdots,u_k=x$，在 H 中存在一条路 $v=v_1,\cdots,v_m=y$. 这样，$(u,v),(u_2,v),\cdots,(x,v),(x,v_2),\cdots,(x,y)$是图 $G\square H$ 中连接(u,v)和(x,y)的一条路.

(2) 我们可以假设(1)两条路分别是 G 和 H 中的最短路，那么在(1)中构造的图 $G\square H$ 中的路的长度是 $d_G(u,x)+d_H(v,y)$. 因此

$$d_{G\square H}((u,v),(x,y))\leqslant d_G(u,x)+d_H(v,y) \tag{1.1}$$

假设 P 是图 $G\square H$ 中连接顶点(u,x)和(v,y)的两条路. 利用引理 10.7，$P_1=p_1(P)$和 $P_2=p_2(P)$分别是 G 和 H 中的两条路，有

$$d_G(u,x)+d_H(v,y)\leqslant|E(P_1)|+|E(P_2)|\leqslant|E(P)|$$

最后一个不等号成立的原因是 P 的每条边要么被投影成 P_1 的边，要么被投影成 P_2 的边. 假设 P 是图 $G\square H$ 中的一条最短路，则

$$|E(P)|=d_{G\square H}((u,v),(x,y))$$

因此，

$$d_G(u,x)+d_H(v,y)\leqslant d_{G\square H}((u,v),(x,y))$$

结合不等式(1.1)，结论成立. ■

1.5.2 图的团和

假设 $G=(V,E)$ 是一个图，V_1,V_2 是 V 的两个子集，满足 $V=V_1\cup V_2$，$W:=V_1\cap V_2$ 导出图 G 的一个团. 假设 $V_1\backslash W$ 中的顶点与 $V_2\backslash W$ 中的顶点都不相邻，那么我们称图 G 是图 $G_1:=G[V_1]$ 与图 $G_2:=G[V_2]$ 的 k 团和，其中 $k=|W|$. 如果不关心中间公共团的大小的话，也可以直接称 G 是 G_1 和 G_2 的团和.

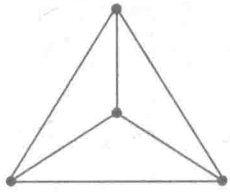
给定图 G，在 G 外添加一个新点，然后将 G 的所有顶点与这个新点相连，所得的图称为图 G 的悬挂图，记为 $\nabla(G)$.

将图 G 的所有边看成顶点，两个顶点相邻当且仅当它们对应的边在 G 中相邻，这样产生的图称为图 G 的线图，记为 $L(G)$.

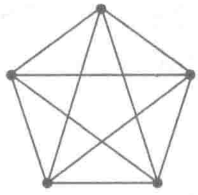
1.6 常见图类

在图论中有非常重要的图类，下面给出一些我们将要用到的.

1. 完全图：图 G 中的任意两个顶点都是相邻的，如图 1-4 所示. n 个顶点的完全图习惯用 K_n 来表示.



(a) K_4



(b) K_5

图 1-4 完全图

2. 二部图：图 $G=(V,E)$ 称为二部图. 如果 V 能分成两部分 V_1 和 V_2 使得每条边的一个端点在 V_1 中，而另一个端点在 V_2 中，此时 V_1 和 V_2 形成 V 的一个二部划分. 如果图 G 是二部图，其二部划分为 V_1 和 V_2，且 V_1 中的每个顶点和 V_2 中的每个顶点都相邻，则称这样的图 G 为完全二部图. 当 $|V_1|=n_1$，$|V_2|=n_2$ 时，我们习惯记它为 K_{n_1,n_2}. 完全二部图 $K_{1,n}(n\geqslant 1)$ 通常也称为星图.

3. 路 P_n：顶点集合为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边集为 $E=\{v_iv_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n-1\}$.

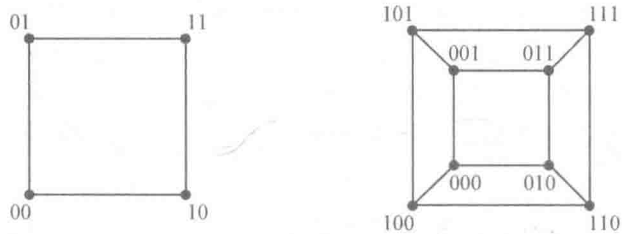
4. 圈 C_n：顶点集合为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边集为 $E=\{v_iv_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{v_1v_n\}$.

5. 树：连通的无圈图称之为树.

6. n 维超立方图 Q_n：考虑集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$. Q_n 构造如下：把 Ω 的所有的子集（2^n 个）当作顶点，两个顶点 A 和 B 相邻当且仅当 $|A\triangle B|=1$，其中 $\triangle$ 表示两个集

合 A 和 B 的对称差，也就是由属于 A 或 B 但不同时属于两者的元素构成的集合.

Q_n 的另一种定义为：顶点集 $V(Q_n)=\{b_1b_2\cdots b_n \mid b_i\in\{0,1\}\}$，其中的两个顶点相邻当且仅当这两个 n - 元数组恰有一个位置的元素不同(图 1 - 5).



(a) $Q_2=K_2\times K_2$　　(b) $Q_3=K_2\times K_2\times K_2$

图 1 - 5　超立方图

7. 半立方图：仅考虑 Ω 的偶子集作为顶点. 如果两个顶点 A 和 B 的对称差含有两个元素，则它们连一条边，这样得到的图称为半立方图(half-cube)，用 $\frac{1}{2}Q_n$ 来表示.

8. 海明图(Hamming graph)：一些完全图的卡氏积.

9. 鸡尾酒会图(cocktail party graph) $K_{n\times 2}$(图 1 - 6)：顶点集合 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n,v_{n+1},\cdots,v_{2n}\}$，边集是 V 中的所有顶点对除去 n 个顶点对 $\{v_1v_{n+1},\cdots,v_nv_{2n}\}$；换句话说，$K_{n\times 2}$ 完全图 K_{2n} 删掉一个完美匹配所生成的图.

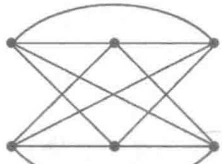


图 1 - 6　鸡尾酒会图 $K_{3\times 2}$

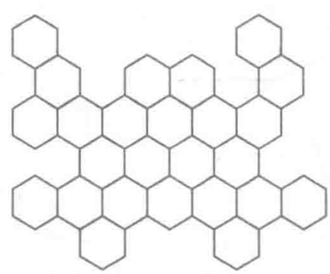


图 1 - 7　苯图

10. 约翰逊图(Johnson graph) $J(n,k)$：设 n,k 是固定的正整数且满足 $n\geqslant k$，Ω 是大小为 n 的固定的集合，那么 $J(n,k)$ 的顶点集由 Ω 的所有 k 元子集组成，两个顶点相邻当且仅当这两个顶点对应的 k 元子集的交的大小为 $k-1$.

11. 苯图(或苯系统)：平面上无限六角形格子图或者其上一个不自交的圈及其内部的顶点和边导出的有限图. 见图 1 - 7.

显然，在上面的图类之中有如下的同构关系：$K_{2,2}=C_4=Q_2=K_{2\times 2}$，$K_2=P_2=\frac{1}{2}Q_2$，$\frac{1}{2}Q_3=K_4$，$K_{4\times 2}\cong\frac{1}{2}H_4$.