概率论与数理统计

主审　于宪军
主编　周玉英　周庆欣　张　瑜

中国商业出版社

概率论与数理统计

主　审　于宪军
主　编　周玉英　周庆欣　张　瑜
副主编　苗秀凤

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 周玉英，周庆欣，张瑜主编.
-- 北京 ：中国商业出版社，2017.6
ISBN 978-7-5044-9952-3

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①周…②周…③张…　Ⅲ.①概率论
一高等学校一教材②数理统计一高等学校一教材　Ⅳ.
①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 167214 号

责任编辑:武维胜

中国商业出版社出版发行
010－63180647　www.c_cbook.com
(100053　北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京亚吉飞数码科技有限公司

*　*　*　*　*

787 毫米×1092 毫米　16 开　18.5 印张　450 千字
2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
定价:48.00 元

*　*　*　*

编委会

序

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 数学是人类意志的表达,反映积极的意愿、深思熟虑的推理,以及精美而完善的愿望,它的基本要素是逻辑与直觉、分析与构造、一般性与个别性. 故而,在大学数学教育中不仅要考虑作为许多专业的理论基础的高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计的教学,同时也要考虑到数学应用的典型工具——运筹学、数学建模的教学,更要考虑数学思想、文化的传播. 鉴于这样的思考,我们编写了这套丛书.

前言

概率论与数理统计是以自然及社会本身的现象为对象的.概率论是从数量上研究随机现象的统计规律性的,即是对随机现象的统计规律的演绎研究,它是本课程的理论基础.而数理统计是研究处理随机性数据,它以概率论为基础,建立有效的计算方法,进行统计推断,即它是对随机现象统计规律的归纳的研究.

二者的研究方法完全不同,概率论是首先提出随机现象的数学模型,然后去研究它的性质、特点和规律性,并在此基础上建立了随机变量概率分布的基本理论.而数理统计是直接从随机现象的观察值出发,并以概率论的理论作为基础来研究随机现象的统计规律.但它们确实是相互渗透相互联系的,故作为一门学科.

概率论与数理统计的理论和方法发展迅速,内容丰富,广泛应用在自然科学、社会科学及人文科学等各个领域,并且随着计算机的普及和飞速发展,概率论与数理统计已经成为处理信息、制定决策的重要理论和方法.同时,它的理论与方法不仅是许多新兴学科,如排队论、信息论、控制论、可靠性理论、人工智能的数学理论基础,而且向各个基础学科、工程学科渗透产生许多新的分支和边缘性的应用学科,如生物统计、统计物理、数学地质、数理金融、神经网络统计分析、统计计算等.综上,概率论与数理统计作为理论严谨、应用广泛、发展迅速的数学分支正越来越引起广泛的重视.

根据21世纪高等普通学校特别是我校学生的学习能力和对数学的实际需求,我们在总结多年数学教学经验、探索数学发展动态和分析比较国内外同类教材优劣的基础上,吸取各教材之精华,在院长的统筹下,组织长期工作在教学第一线的教师们编写出适合本科普通院校的系列教材,《概率论与数理统计》是其中之一,本书可作为哈尔滨商业大学本科各专业的教材,也适合本科院校理工类、经管类等非数学专业的选用教材,还可以作为报考硕士研究生人员和工程技术人员的学习参考书.

概率论与数理统计课程是高等学校理工类和经管类专业的一门基础必修课.

本书根据教育部高等学校数学与统计学数学指导委员会制定的“本科数学基础课程教学基本要求”进行编写.本书原则是力求做到“以最基本概念体系为纲,深化概念理论,掌握方法,熟练计算,联系实际,注重应用,提高能力”.具有以下特色:

1.力求科学系统地阐述概率论与数理统计的基本概念和基本理论;

2.注重叙述一些主要概念产生的背景和思路,从直观分析开始逐步过渡到严格的数学表述,加深理解;

3.在数学理念上不过分强调严密的论证过程,更多让学生体会数学本质和数学的价值;

4.加强基本运算能力,配较多例题和习题,在解题方法上有较深入的论述与指导,目的是让学生在掌握基本概念的基础上,熟悉运算过程,掌握各种解题方法和一定的技巧,达到熟练

的程度，提高解决问题的能力；

5. 每部分内容逻辑上力求用最简结构和最简洁的方式完成叙述；

6. 每节后附有练习题，每章后附有习题，选题讲求循序渐进从基本到综合，演练本节本章的基本概念方法、基本计算和应用，并在书后附有练习和习题参考答案；

7. 每章附有阅读材料，内容有数学史、应用或拓展学习.

考虑到不同专业不同学生学习要求的差异，标“ * ”的内容，可供选择学习.

本书各章（含练习、习题及参考答案）的编写工作由下列老师完成且分工如下：周庆欣编写第 1 章；周玉英编写第 2 章、第 3 章和第 6 章；张瑜编写第 4 章、第 7 章、第 9 章的第 1 节和第 2 节；苗秀凤编写第 5 章、第 8 章、第 9 章的第 3 节和第 4 节.

本书在编写过程中，参考了一些相关教材和国内外书籍，得到了同行同事的宝贵意见和支持，在此向他们表示衷心的感谢.

由于编写水平有限，书中难免有不足甚至错误之处，敬请同行和读者批评指正，使得不断完善.

周玉英

2017 年 5 月

目 录

第1章 随机事件与概率

我们生活在其中的大自然和人类社会是一个千姿百态、五光十色、充满生机的世界，这样的世界中充斥着大量不确定性. 在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性又始终是受事物内部隐藏着的必然性支配.

概率究竟是什么？古人认为是机会. 概率论是研究随机现象（偶然现象）的规律性的一门学科.

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象

自然界和人类社会中有很多现象，有一类现象，在一定条件下必然发生，称为**确定现象**. 例如：春天来了，万物复苏；同种电荷互相排斥；无论什么样的三角形，它的两边之和总要大于第三边……

确定现象的特点是：服从特定的因果规律，从一定条件出发，一定可以推出某一结果.

自然界和人类社会中还大量存在另一类现象，我们称为**随机现象（偶然现象）**.

例如：购买彩票前，我们无法预知是否会中奖；在某购物商场，每天都会有很多顾客，我们无法预知每天确切的顾客数；欧洲杯球赛开赛前，到底哪一队会夺冠，事先也是谜……

随机现象的特点是：当人们在一定条件下对它加以观察或进行试验时，观察或试验的结果是多个可能结果中的一个，而出现哪一结果事先无法预知，即呈现出随机性（偶然性）.

随机现象看起来偶然，出现哪一结果"凭机会而定"，但实际上有一定的必然性——随机现象的统计规律性. 例如下面几个例子：

例 1-1-1 在掷一枚质地均匀的硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，事先我们无法预知到底会出现哪一面. 但是在大量的重复投掷后，人们发现，出现正面与出现反面的次数竟然各占一半.

例 1-1-2 在医院里，生男婴还是女婴是一随机现象，法国数学家拉普拉斯在对伦敦、彼得堡、柏林和全法国大量人口资料进行研究后发现男婴出生率总在一个数左右波动，这个数大约是$\frac{22}{43}$.

综上所述，概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科，随机现象的普遍存在性决定了它们的广泛应用性.

1.1.2 随机试验

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验. 在这里，试验是一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，也包括对随机现象的观察. 例如：

E_1：将一枚硬币投掷一次，观察正反面；

E_2：投掷一枚质量均匀的骰子，观察其点数；

E_3：观察某城市一天中发生的交通事故数；

E_4：随机从一批灯泡中抽取一只，观察其寿命(以小时计)；

E_5：向平面直角坐标系中任投一点，观察点的坐标.

上面举出的五个例子有着共同的特点. 例如：试验 E_1 有两种可能结果，出现正面或者出现反面，但在抛掷之前不能确定出现哪一结果，这个试验可以在相同条件下重复进行，我们称这类试验为随机试验.

定义 1.1.1 若一试验满足下列条件：

(1)**可重复性** 可在相同的条件下重复进行；

(2)**可观察性** 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)**随机性** 进行一次试验之前不确定哪一个结果会出现.

则称试验为**随机试验**，记为 E.

本书中提到的试验均指随机试验，随机试验是研究随机现象的重要手段. 试验是在一定条件下进行的，试验有一个需要观察的目的，根据这个目的，试验被观察到很多结果. 试验具有可重复性，且结果具有随机性.

1.1.3 样本空间

正如前面指出的，一个随机试验要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的，我们有如下定义：

定义 1.1.2 由随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S，样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点，记作 ω.

例 1-1-3 写出 1.1.2 中试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$ 的样本空间 S_k：

$S_1=\{H,T\}$，其中 H 表示"投掷出正面"，T 表示"投掷出反面"；

$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中 i 表示"投掷出 i 点"；

$S_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$，其中 i 表示"该城市一天中发生 i 起事故"；

$S_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$，其中 t 表示"随机抽取的灯泡的寿命为 t 小时"；

$S_5=\{(x,y) \mid x\in R, y\in R\}$，其中 (x,y) 表示"任意投掷点的坐标为 (x,y)".

随机试验 E 一旦确定，其样本空间 S 必确定. 样本空间在如下意义上提供了一个理想实验的数学模型，在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现.

随机试验及其样本空间似一座桥梁，联系起随机现象与集合论的知识. 接下来，随机事件将会被表示成样本空间的子集，我们将会用熟悉的集合论的知识去研究事件.

1.1.4 随机事件

在随机试验中,可能发生也可能不发生的试验结果称为**随机事件**.

例 1-1-4 如在投掷一枚骰子的试验中,分别记

"点数是 4" $= \{4\}$ 为 A;

"点数为偶数" $= \{2,4,6\}$ 为 B;

"投掷到点数小于 5" $= \{1,2,3,4\}$ 为 C;

则 A、B、C 均为事件,且其均为样本空间 S 的子集,故对随机事件我们又有如下定义:

定义 1.1.3 试验 E 的样本空间 S 的子集,称为 E 的**随机事件**,简称**事件**. 常用 A、B、C…表示.

根据事件中所含样本点的多少,又可将事件分为基本事件与复杂事件.

定义 1.1.4 由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

例如:例 1-1-4 中的事件 A 为基本事件,例 1-1-4 中共有 6 个基本事件(对应于 6 个样本点). 基本事件的称谓缘于相对其他事件而言,它们是最基本的,其他事件均可由它们复合而成,而它们自身又不能再分解成其他事件,事件 B 和 C 均不是基本事件,它们可分别由一些基本事件复合而成. 比如事件 B 可由"点数为 2","点数为 4"及"点数为 6"复合而成,称事件 B 和事件 C 为复杂事件.

定义 1.1.5 由两个或两个以上样本点组成的事件称之为**复杂事件**.

上例中事件 $B = \{2,4,6\}$,若在一次试验中观察到"出现点数为 2"这一结果,即 B 中所含样本点 2 为试验结果时,则称事件 B 在这次试验中发生.

定义 1.1.6 若事件中的某一个样本点为试验结果时,则称该**事件发生**.

有两个特殊的事件必须说明一下,一个是**必然事件**,即在试验中必定发生的事件,常用 S 表示. 这是因为样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次试验中它总是发生的;另一个是**不可能事件**,即在试验中不可能发生的事件,常用 $\varnothing$ 表示. 例如,在投掷骰子试验中,"投掷点数为负数"是不可能事件;而"投掷出点数小于 7"是必然事件.

必然事件与不可能事件都是确定的,但为了今后讨论问题方便,不妨将它们视为随机事件的特例.

1.1.5 事件的关系及其运算

为了研究随机事件及其概率,我们需要说明事件之间的各种关系及其运算. 由于任一随机事件都是样本空间的一个子集,因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法.

设试验 E 的样本空间为 S,而 A、B、$A_k (k = 1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 包含关系

若属于 A 的样本点必须属于 B,则称事件 B 包含事件 A,记为 $A \subset B$. 由于属于 A 的样本点必须属于 B,故用概率论的语言说:"$A \subset B$"等价于"事件 A 发生必然导致事件 B 发生".

譬如投掷一颗骰子，事件 A："出现点 4"的发生必然导致事件 B："出现偶数点"的发生，故 $A \subset B$；观测灯泡寿命试验中，事件 A："寿命超过 2000 小时"的发生也将导致事件 B："寿命超过 1000 小时"的发生. 事件的包含关系见图 1-1-1.

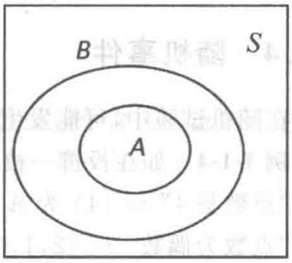

图 1-1-1 事件的包含 $A \subset B$

对于任一事件 A，必将有 $\varnothing \subset A \subset S$.

2. 相等关系

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

从集合论点看，两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合. 有时用不同语言描述的事件也可能是同一事件，例如，投掷一枚骰子试验中，事件 $A = \{$掷到偶数点$\}$ 与事件 $B = \{2,4,6\}$ 是同一事件，判断事件是否相等的依据，就是看这两个事件是否含有相同的样本点.

3. 事件的和事件(事件的并)

"由事件 A 与事件 B 中所有的样本点(相同样本点只计一次)组成的新事件"，称为事件 A 与事件 B 的**和事件(事件的并)**，记作 $A \cup B$. 由于 $A \cup B = \{\omega | \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$，故用概率论的语言说：事件"$A \cup B$"表示"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件".

譬如在投掷一颗骰子的试验中，记事件 $A = \{$出现奇数点$\} = \{1,3,5\}$，记事件 $B = \{$出现的数点不超过 3$\} = \{1,2,3\}$，则事件 A 与事件 B 的和事件为 $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

推广 "n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生"，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记为：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

类似地，称

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 的和事件.

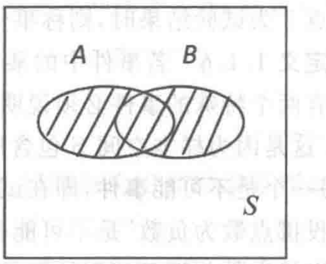

图 1-1-2 事件 A 与事件 B 的和事件 $A \cup B$

4. 事件的积事件(事件的交)

"由事件 A 与事件 B 中公共的样本点组成的新事件"，称为 A 与 B 的**积事件(事件的交)**，记作 $A \cap B$，简记为 AB. 由于 $A \cap B = \{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$，故用概率论的语言说：事件"$A \cap B$"表示"A 与 B 同时发生的事件".

推广 "n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"，这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记为：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

类似地，称

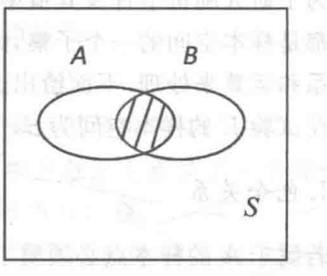

图 1-1-3 事件 A 与事件 B 的积事件 $A \cap B$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

为可列个数事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 的积事件.

5. 事件的差

"由在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成新事件",称为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$. 由于 $A-B=\{\omega \mid \omega \in A 且 \omega \notin B\}$,故用概率论语言说:事件"$A-B$"表示"$A$ 发生且 B 不发生的事件".

如在投掷一颗骰子试验中,记事件 $A=\{1,3,5\}$,事件 $B=\{1,2,3\}$,则 A 与 B 的差事件 $A-B=\{5\}$.

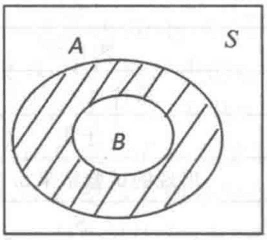

图 1-1-4　$A-B(A \supset B)$

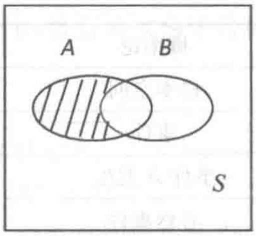

图 1-1-5　$A-B(AB \neq \varnothing)$

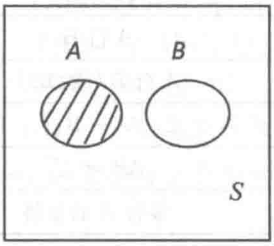

图 1-1-6　$A-B=A(AB=\varnothing)$

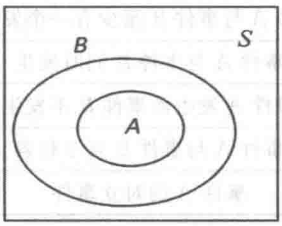

图 1-1-7　$A-B=\varnothing(A \subset B)$

6. 互不相容事件(互斥事件)

如果事件 A 与事件 B 不同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容(互斥),否则称为相容(不互斥).

易知,互斥事件是指两个事件,同一样本空间中,全体基本事件两两互斥.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即则称这 n 个事件是两两互不相容的(两两互斥的).

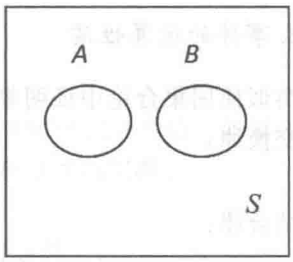

图 1-1-8　事件 A 与事件 B 互斥

7. 对立事件

"事件 A 不发生"这一事件称为事件 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$,易见 $\overline{A}=S-A, A\overline{A}=\varnothing$,

$A \cup \overline{A} = S, \overline{\overline{A}} = A$，即在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个事件发生.

易知必然事件 S 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{S} = \varnothing, \overline{\varnothing} = S$. 对立的两事件必互不相容，反之未必.

今后常用到的一个重要公式：

$$A - B = A\overline{B} = A - AB \text{（证明略）}$$

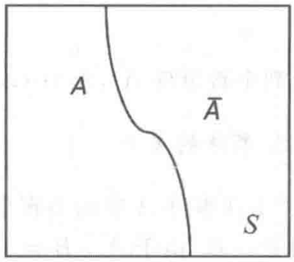

图 1-1-9　事件 A 的对立事件 $\overline{A}$

在集合论知识的基础上，我们会发现事件间的关系及运算与集合间的关系及运算之间是完全可以互相类比的. 下面给出这种类比的对应关系（表 1-1-1）：

表 1-1-1　类比的对应关系

概率论	集合论
样本空间	集合 $S = \{\omega\}$
事件	子集
事件 A 发生	出现的试验结果 $\omega \in A$
必然事件	S
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生导致事件 B 发生	$A \subset B$
事件 A 与事件 B 至少有一个发生	$A \cup B$
事件 A 与事件 B 同时发生	$A \cap B$（或 AB）
事件 A 发生而事件 B 不发生	$A - B$
事件 A 与事件 B 互不相容	$AB = \varnothing$
事件 A 的对立事件	集合 A 的余集

在许多场合，用集合论的表达方式显得简练些，也更容易理解，但对初学概率论的读者来说，重要的是要学会用概率论的语言来理解集合间的关系及运算，并能运用它们.

8. 事件的运算性质

类似使用集合论中证明集合相等的方法，可证明揭示如下事件的运算性质：

交换律：

$$A \cup B = B \cup A, AB = BA$$

结合律：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$$

分配律：

$$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC,$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

对偶律（德摩根律）：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

对偶律可推广到多个事件及可数个事件的情形：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

例 1-1-5 一名射手连续向一个目标射击三次，设 A_i 表示"第 i 次射击命中目标"，$i=1,2,3$，则：

(1) $A_1 \cup A_2$ 表示"前两次射击至少有一次击中"；

(2) $\overline{A_2}$ 表示"第二次射击未击中目标"；

(3) $\overline{A_1 \cup A_2}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ 表示"前两次射击均未击中目标"；

(4) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ 表示"三次射击中，至少有一次未击中目标"；

(5) $A_1A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3$ 表示"三次射击中，恰有两次命中目标".

例 1-1-6 设 A,B,C 是 S 中的随机事件，则：

(1)事件"A 与 B 发生，C 不发生"可表示成 $AB\overline{C}$；

(2)事件"A,B,C 至少有一个发生"可表示为 $A\cup B\cup C$；

(3)事件"A,B,C 至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$.

事实上"至少有两个发生"包含"恰有两个发生"与"三个事件同时发生"两种情况，故所求事件可表示为：

$$\begin{aligned}&(AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C)\cup ABC\\&=(AB\overline{C}\cup ABC)\cup(\overline{A}BC\cup ABC)\cup(A\overline{B}C\cup ABC)\\&=AB\cup BC\cup AC\end{aligned}$$

推广 "$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有两个发生"可表示为：$\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} A_iA_j$，

"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有三个发生"可表示为：$\bigcup\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} A_iA_jA_k$.

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1)依次独立地抛掷三枚硬币，观察正反面；

(2)在某十字路口，观察一小时内通过的机动车辆数；

(3)观察某城市一天内的用电量；

(4)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品". 如果连续检查出了 2 件次品就停止检查，或检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果；

(5)在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

2. 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A,B,C 中至少有一个发生；

(3) A,B,C 中不多于一个发生；

(4) A,B,C 中至少有两个发生；

(5) A,B,C 中不多于两个发生；