国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编　王梓坤

MINKOWSKI THEOREM

# Minkowski定理

朱尧辰　刘培杰数学工作室　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

MINKOWSKI THEOREM

# Minkowski定理

朱尧辰　刘培杰数学工作室　编著



哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书从一道华约自主招生试题谈起，详细地介绍了Minkowski定理的概念、证明以及Minkowski定理与其他定理的联系和在其他学科中的应用.

本书适合高等学校数学及相关专业师生使用，也适合于数学爱好者参考阅读.

**图书在版编目(CIP)数据**

Minkowski定理/朱尧辰，刘培杰数学工作室编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)
ISBN 978-7-5603-6496-4

Ⅰ.①M… Ⅱ.①朱… ②刘… Ⅲ.①闵可夫斯基问题 Ⅳ.①O156

**中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第042292号**

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 甄淼淼 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 牡丹江邮电印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张24 字数247千字
版　　次 2018年1月第1版 2018年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6496-4
定　　价 158.00元

---

## ⊙代序

### 读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

## 潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

## 抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

## 始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

## 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

## 读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

## 第一编 小试题引出的大定理


第 1 章 一道华约自主招生题//3

第 2 章 一道 Putnam 赛题和一道苏联大学生数学竞赛试题//8

第 3 章 数的几何//11

第 4 章 Blichfeldt 引理//21

第 5 章 一道 IMO 试题的格点证法//32

第 6 章 一组练习题//35

第 7 章 通过 Minkowski 定理证明 Pick 定理//42

第 8 章 椭圆中的格点//49

第 9 章 平面凸区域//56

第 10 章 圆、正方形和格子点//61

§1 引言//61

§2 Schinzel 定理//63

§3 Browkin 定理//66

§4 三维空间中的球面//71

§5 关于 $n$ 维马步问题//73

## 第二编　Minkowski 凸体定理

第 11 章　Minkowski 凸体定理($n$ 维整点情形)//85
§1　凸体//85
§2　Blichfeldt 定理//90
§3　Minkowski 凸体定理//92
§4　Minkowski 线性型定理//93
§5　例题//94
第 12 章　Minkowski 凸体定理(一般形式)//104
§1　格和格点//104
§2　Blichfeldt 定理的一般形式//111
§3　Minkowski 凸体定理的一般形式//114
§4　例题//116
§5　临界格//125
第 13 章　一些应用//129
§1　非齐次逼近//129
§2　无理数的附条件的有理逼近//135
§3　二平方和及四平方和定理//137

## 第三编　应用与进展

第 14 章　Minkowski-Hlawka 定理//154
§1　覆盖与填装//154
§2　空间中的稠密格填装//161
§3　格填装与码//164
第 15 章　二维格的覆盖半径//172
§1　引言//172
§2　最近格点//174

§3　覆盖平行四边形//178

§4　算法//180

**第 16 章　新椭球的一些性质**//183

§1　引言//183

§2　概念和预备知识//185

§3　多胞形的一个性质//187

§4　算子 $\Gamma_{-2}$ 的单调性//189

**第 17 章　对偶 Brunn-Minkowski-Firey 定理**//193

§1　引言//193

§2　对偶混合均质积分//196

§3　对偶混合 $p$ 均质积分//197

**第 18 章　凸体 Minkowski 不等式的改进**//203

§1　引言//203

§2　准备工作//207

§3　主要结果//209

**第 19 章　仿射诸群**//214

§1　仿射变换诸群//214

§2　对于特殊齐次仿射群的线性空间密度//219

§3　对于特殊非齐次仿射群的线性子空间密度//224

§4　注记与练习//227

**第 20 章　关于多胞形一个新仿射不变量的应用**//237

§1　引言//237

§2　关于 $\mathscr{H}_n$ 多胞形 $U(P)$ 的解析表达式//239

§3　$U(P)$ 对 $L_p$-Minkowski 问题的一个应用//243

第 21 章　相关链接//248
§1　平面点格//248
§2　在数论中的平面点格//255
第 22 章　空间群//265
§1　欧几里得群//266
§2　格群//270
§3　空间群//271
§4　空点阵点群 $F$ 及晶系//274
§5　布拉菲格子//276
§6　空间群的算符//281
§7　倒格矢//285
§8　格群的不可约表示//286
§9　布里渊区//288
§10　周期场中的电子态//289
§11　空间群的表示空间//290
§12　波矢群//291
§13　表象群 $G'_k$ 和 $G_k$ 及规范变换//295
§14　表象群 $G'_k$ 的不可约表示//297
§15　空间群的不可约表示和不可约基//302
§16　求波矢群 IR 基的步骤//306
§17　构造波矢群 IR 的特征标方法//311
附录　数学奥林匹克中有关整点的试题//313
编辑手记//361

# 第一编

## 小试题引出的大定理

# 第1章 一道华约自主招生题

在2008年清华大学等高校(简称华约)的自主招生考试中出现如下试题:

**试题** 定义横、纵坐标都是整数的点为格点.在平面直角坐标系中,有对称中心是原点的矩形,证明:面积大于4的该类矩形至少包含除原点以外的两个格点.

**证法一** 如图1,将平面划分成以$(2m,2n)$为中心,边长为2且四边平行于坐标轴的正方形的并集,每两个正方形最多只在一条边外相交.

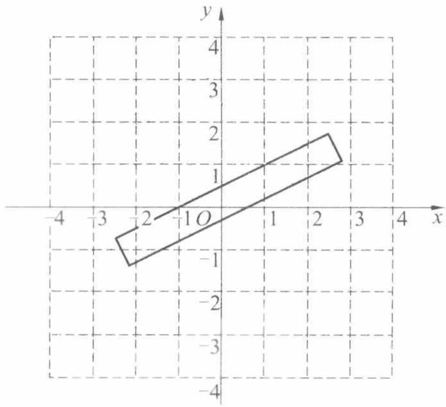


图 1

对于面积大于 4 的矩形 $R$，若某个正方形与 $R$ 的交的面积大于 0（注意，线面积为 0），令这样的正方形集合为 $S$，则将该正方形平移至与以原点为中心的正方形 $Q$ 重合，由于 $R$ 的面积大于 4，必存在 $Q$ 内部的一点是 $S$ 中两个正方形平移后的公共点.

设该点坐标为 $(x,y)$，则存在 $(m,n)\neq(i,j)$，使 $A(x+2m,y+2n)$，$B(x+2i,y+2j)$ 都在 $R$ 中.

由于 $R$ 的对称性，知 $A'=(-x-2m,-y-2n)$ 也在 $R$ 中，于是线段 $A'B$ 的中点 $M(i-m,j-n)\neq(0,0)$ 在 $R$ 中，相应的其关于原点的对称点 $M'$ 也在 $R$ 中.

**证法二** 设矩形 $ABCD$ 内部除原点外无格点（由对称性，有一个格点，必还有一个与它对称的格点）.

(1) 先考虑 4 个顶点分布在 4 个象限的情况.

令 $AB$ 与 $y$ 轴的交点为 $M(0,b)$，$AD$ 与 $x$ 轴的交点为 $N(a,0)$，由于矩形内部无格点，故 $0<a,b<1$. 注意到 $A,M,O,N$ 四点共圆，由图 2(a)，只能是 $A(1,1)$，