Hailun Sanjiaoxing Yanjiu

海伦三角形研究

朱正元　陈伟侯 / 著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

海伦三角形研究

朱正元　陈伟侯／著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目（C I P）数据

海伦三角形研究/朱正元，陈伟侯著．—北京：中央民族大学出版社，2018．5 重印

ISBN 978－7－81108－976－9

Ⅰ．①海…　Ⅱ．①朱…　②陈…　Ⅲ．①三角形—研究　Ⅳ．①O124

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 089369 号

海伦三角形研究

著　　者　朱正元　陈伟侯
责任编辑　满福玺
封面设计　布拉格
出 版 者　中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编：100081
电话：68472815（发行部）　传真：68932751（发行部）
68932218（总编室）　68932447（办公室）
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 厂　北京建宏印刷有限公司
开　　本　880×1230（毫米）　1/32　印张：7.875
字　　数　210 千字
版　　次　2018 年 5 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－81108－976－9
定　　价　32.00 元

序言 1

三条边长度和面积都为有理数的三角形称为海伦三角形，这是以公元 1 世纪古希腊数学家海伦的名字命名的．本书中采用了三边长度和面积都为正整数的三角形称为海伦三角形这一简化定义．

海伦三角形起源于平面几何，但重要的解决手段却是一些三元二次不定方程的求解．两千多年来，这个领域一直受到人们的关注，到 19 世纪时，人们已经弄清了勾股三角形和等差海伦三角形这两大类海伦三角形的结构，分别求出了三边的双参数表达式，因此可以利用两个参数将全体本原勾股三角形和全体本原等差海伦三角形分别排成字典序．从 19 世纪末到 21 世纪初，人们在各类数学刊物上陆续发表了许多有关海伦三角形的研究成果与科普文章．

本书作者将海伦三角形这一课题分为下列五章进行比较系统的介绍与研究：整数三角形，勾股三角形，等差海伦三角形，海伦三角形的构造，海伦三角形的参数表达式．这里既综合了前人的许多经典研究成果（例如：本原等差海伦三角形的参数表达式，本原勾股三角形构成三权树，本原海伦三角形的 3 参数表达式），也收入了本书作者的研究工作（例如：最小的勾股三角形，从两种勾股方程构造 10 种新的勾股方程，二倍角海伦三角形的字典序）．从本书中，读者大体可以了解人们对海伦三角形认识的深化过程．限于我们的视野，还有一些前人的成果未收入本书中．

值得重视的是，1914 年，Carnichael R. D. 在他的书中，从有理三角形的几何事实出发，推出了有理三角形的 3 参数表达式，从

而解决了三条边和面积全为正整数的海伦三角形的表示问题．但人们对海伦三角形的研究热情并未因此而减退．本书作者猜测：勾股三角形、并集三角形和割余三角形这三者的并集就等于海伦三角形．前人提问：三条中线全为整数的海伦三角形是否存在？这样的猜测和问题还很多，需要人们继续研究．总之，海伦三角形仍是一个可供数学爱好者进行研究的领域．

本书涉及初等数学有关知识，也涉及线性代数、数论的基础知识．在本书中，列举了一些数值资料，这为数学教师构建比较简明但内容丰富的数学习题（已知条件和答案都为整数）提供了支撑．在本书中，公式变形，分类讨论，枚举法，反证法等证明方法用得比较多．有些作为出发点的事实，例如同余式方程$t^2 \equiv 3 \pmod p$的求解，已超出本书的系统架构，本书只给出说明或例证，请读者参考有关书籍．

本书是关于海伦三角形研究的专题著作．目前，作者在国内还未见有此种书籍．该书由浅入深，逻辑严谨，开启问题，留待探索．可供数学教师，大学生，优秀高中生以及数学爱好者参考．

在本书形成过程中，我们参考了本书参考文献中列出的书籍和论文，受到了它们的启发，我们向这些书籍和论文的作者致以崇高的敬意，并表示衷心的感谢．

北京师范大学的黄惟明博士审读了全部原稿，王申怀教授审读了部分原稿，他们提出了宝贵的意见，我们表示衷心地感谢．

我们还要感谢数学高级教师翟工拓，数学教授苑金臣，理学博士陈丰和管理学博士陈斌，在本书成书过程中，他们给予了长期的具体支持和帮助．

本书的出版得到了中央民族大学理学院数学硕士一级点的大力支持．

朱正元　陈伟侯

2012 年 4 月于北京

序言 2

本书与学校数学教育有一定距离，但作为学习兴趣的延伸，仍是很有益的课题．在一个课题中，学习个体的兴趣能否延伸，与其学习方法也有一定关系．

关于学习方法，前人已经讲了许多．年代久远的，如孔子的“学而时习之，不亦乐乎”；年代较近，如明朝彭端淑的“人一能之，己十能之”，都是鼓励人们刻苦学习的名言，对现代人学习数学也完全适用．对于数学来说，仅仅强调刻苦学习，往往难以持久．学习个体还必须了解学习数学的更深一层的规律，在学习进程中持续地自我培养对数学文化的兴趣．

我在四十多年的大学数学基础课教师生涯中形成一个观点：对绝大多数学生来说，在学习数学的过程中，存在“模仿，分析与综合，创造”三阶段的发展规律．

模仿阶段就是入门阶段，必须有足够次数的重复，才能了解基本的数学知识，逐渐形成良好的数学习惯．我曾经见过许多场合，有的学生会做许多难题，但对重要的基本定理的证明却束手无策．为什么？因为他觉得会运用就行，没有必要进行模仿，也缺乏耐心去进行模仿．事实上，对重要的基本定理证明的模仿，是学生在学习征途中不应忽略的环节，前人的许多思想方法蕴藏在证明过程中，如果不花费时间认真模仿，学习者很难体会真谛．

所谓分析，大体上是按某种原则将整体分解为若干部分，再对

每一部分进行观察研究；所谓综合，大体上是从对各部分的观察研究中，找到一些相同或不同的属性，再综合为一个整体．分析与综合是两个方向相反的过程，往往相伴而行，其效益因人而异，有时甚至有天壤之别．只有经过一定时间的足够次数的分析与综合过程，才能抓住要害，上升到创造阶段．这里所说的时间因人而异，如果你在这方面掌握的知识系统比较完善，那么经历的时间就可能比较短．古人说“温故而知新”，今人说“天才源于勤奋”，大体上是指对某一课题的足够次数的模仿，对某一课题的足够次数的分析和综合．这与中国谚语“熟能生巧”是一致的．

学习过程中的创造，基本上可以分为两类：一类是现有要素的综合运用，相当于“综合即创造”，也可称为相对创造，这是创造的初级阶段；另一类是发现新的要素，综合运用新旧要素，相当于“原创”，也可称为绝对创造，这是创造的高级阶段．学习过程中的绝大多数创造，可以称为立足于学生本身状态的绝对创造，但与人类历史发展进程相比，这仅仅是相对创造．只有极少数学生才可能立足于人类历史发展进程而作出绝对创造．

将现代的数学知识总体与学习个体的精力相比，知识无限，精力有限．绝大多数人所能学习的数学范围相当小，并且还是自己将要使用的数学．学习过程中的创造，大体上都是相对创造．给不同工作领域和不同发展方向的人以不同的数学训练，启发学习过程中的创造，既是当代数学教育的重要研究课题之一，也是教育主管部门的重要职责之一．

值得提醒的是，学生在学习数学的过程中，应该有意识地拓展自己对数学的兴趣，尊重和珍惜自己的点点滴滴的相对创造，逐渐改善自己的数学习惯，耐心地进行必要的重复活动．但不要故步自封，谨防被这种相对创造迷住前进的道路．

在学习过程中，如果人们能按照自己未来职业与生活的数学要求，自觉运用三阶段的发展规律，持续地自我培养对数学文化的兴趣，那么，在心理上就能达到积极的平衡状态，因而就比较容易掌

握自己所需要的数学知识，在工作领域中也能比较容易取得数学应用的成效．

本文关于学习方法的简述源自本人在 20 世纪 80 年代的一篇论述学习方法的文章，这只是一家之言，但可供学习者参考．

陈伟侯

2010 年 4 月于北京中国农业大学东校区

目 录

第1章　整数三角形

如果三角形的三边 a, b, c 都是正整数，我们称它为整数三角形，通常用三元组（a, b, c）表示．有一个角为直角的整数三角形，称它为勾股三角形，并且约定边 c 所对内角为直角．三边成等差数列的整数三角形，称它为等差三角形，并且约定 b 为等差中项．如果整数三角形的面积也是正整数，我们称它为海伦三角形．

为了便于研究，我们进一步定义本原整数三角形．所谓本原整数三角形（a, b, c），就是三边的最大公因数 gcd（a, b, c）是1. 此处符号 gcd 是“greatest common divisor”的缩写，意思是“最大公因数”．例如，因为 gcd（2，2，3）=1. 所以（2，2，3）是本原整数三角形．而 gcd（6，8，10）=2，所以（6，8，10）不是本原整数三角形．用类似方法，我们定义本原勾股三角形，本原等差三角形，本原海伦三角形．

整数三角形是一个比较大的范畴，在第1章，我们只介绍周长为 n 的整数三角形的个数 $T(n)$，本原二倍角整数三角形的双参数表达式等内容．勾股三角形、等差海伦三角形、海伦三角形都是整数三角形的子集．在以后各章，我们将着重研究这三类三角形的一些性质．

§1.1 关于整数三角形的一些疑问

关于整数三角形、勾股三角形、等差三角形、海伦三角形之间的联系，我们可以从概念出发，提出一些问题，例如：

1. 已知整数三角形的周长为 n，相应的整数三角形的个数 $T(n)$的表达式是什么？

2. 怎样寻求勾股三角形的三边的参数表达式？

3. 已知整数三角形的一个内角为60°或120°，分别求三边的参数表达式.

4. 内角为60°或120°的海伦三角形存在吗？

5. 已知海伦三角形的三边长度为正整数，并且构成等差数列，求三边的参数表达式.

6. 已知整数三角形的一个内角是另一个内角的两倍，求三边的参数表达式.

7. 已知海伦三角形的一个内角是另一个内角的两倍，求三边的参数表达式.

8. 周长与面积的数值相等的海伦三角形存在吗？

9. 怎样寻求海伦三角形的三边的参数表达式？

上述问题中的大多数将在本书进行研究，并得出结论.

§1.2 周长为 n 的整数三角形个数

我们将三角形的三边长度按从大到小（或从小到大）的顺序排列，构成一个三元组，用来表示这个三角形. 例如，边长为3，2，4 的三角形，既可用三元组（4，3，2）表示，也可用（2，3，4）表示. 显然，选定排列顺序后，每个三角形用且只用一个三元

组表示.

当整数三角形的周长 n 比较小时，我们可用枚举法求出整数三角形的个数 $T(n)$. 表 1－1 显示了 $1\leqslant n\leqslant 20$ 时的全部整数三角形，以及整数三角形的个数 $T(n)$.

表 1－1　枚举 $1\leqslant n\leqslant 20$ 时的整数三角形

周长 n	枚举周长为 n 的整数三角形	整数三角形的个数 $T(n)$
1	无	0
2	无	0
3	(1，1，1)	1
4	无	0
5	(2，2，1)	1
6	(2，2，2)	1
7	(3，3，1)，(3，2，2)	2
8	(3，3，2)	1
9	(4，4，1)，(4，3，2)，(3，3，3)	3
10	(4，4，2)，(4，3，3)	2
11	(5，5，1)，(5，4，2)，(5，3，3)，(4，4，3)	4
12	(5，5，2)，(5，4，3)，(4，4，4)	3
13	(6，6，1)，(6，5，2)，(6，4，3) (5，5，3)，(5，4，4)	5
14	(6，6，2)，(6，5，3) (6，4，4)，(5，5，4)	4
15	(7，7，1)，(7，6，2)，(7，5，3)，(7，4，4)，(6，6，3)，(6，5，4)，(5，5，5)	7
16	(7，7，2)，(7，6，3)，(7，5，4)，(6，6，4)，(6，5，5)	5

续表

周长 n	枚举周长为 n 的整数三角形	整数三角形的个数 T (n)
17	(8, 8, 1), (8, 7, 2), (8, 6, 3), (8, 5, 4), (7, 7, 3) (7, 6, 4), (7, 5, 5), (6, 6, 5)	8
18	(8, 8, 2), (8, 7, 3), (8, 6, 4), (8, 5, 5), (7, 7, 4) (7, 6, 5), (6, 6, 6)	7
19	(9, 9, 1), (9, 8, 2), (9, 7, 3), (9, 6, 4), (9, 5, 5) (8, 8, 3), (8, 7, 4), (8, 6, 5), (7, 7, 5), 7, 6, 6)	10
20	(9, 9, 2), (9, 8, 3), (9, 7, 4), (9, 6, 5), (8, 8, 4), (8, 7, 5), (8, 6, 6), (7, 7, 6)	8

枚举法如何操作?

我们以枚举周长为 19 的整数三角形为例来说明，方法如下：设 (a, b, c) 中，a 是最长边，并且 $a \geqslant b \geqslant c$. 固定 a，列举 $b+c$ 的全部可能.

最长边不能≥10;

最长边为 9，则只有 (9, 9, 1), (9, 8, 2), (9, 7, 3), (9, 6, 4), (9, 5, 5);

最长边为 8，则只有 (8, 8, 3), (8, 7, 4), (8, 6, 5);

最长边为 7，则只有 (7, 7, 5), (7, 6, 6);

最长边不能≤6.

于是，周长为 19 的整数三角形共 10 个.

观察上面的表 1-1，自然产生一个问题：如何将 T (n) 表示为以 n 为变元的公式?

2000 年，Mathematics Magazine 的第 1 期发表了一篇题目为 *Triangles with integer sides, Revisited* 的文章，该文不加证明地引用了一

个计算 $T(n)$ 的公式：

$T(n)=\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$，当 n 为奇数；$T(n)=\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$，当 n 为偶数.

此处 $\langle x \rangle$ 表示最接近 x 的整数. 例如，$\langle 5.1 \rangle =5$，$\langle -3.49 \rangle =-3$，$\langle -3.51 \rangle =-4$.

利用这一公式（证明见 §1.3），我们将 $1\leqslant n\leqslant 20$ 的 $T(n)$ 值列成表 1－2：

表 1－2　$1\leqslant n\leqslant 20$ 时，$T(n)$ 的值

n 为奇数	$\left\langle \frac{(n+3)^2}{48} \right\rangle$	$T(n)$	n 为偶数	$\left\langle \frac{n^2}{48} \right\rangle$	$T(n)$
1	$\left\langle \frac{16}{48} \right\rangle$	0	2	$\left\langle \frac{4}{48} \right\rangle$	0
3	$\left\langle \frac{36}{48} \right\rangle$	1	4	$\left\langle \frac{16}{48} \right\rangle$	0
5	$\left\langle \frac{64}{48} \right\rangle$	1	6	$\left\langle \frac{36}{48} \right\rangle$	1
7	$\left\langle \frac{100}{48} \right\rangle$	2	8	$\left\langle \frac{64}{48} \right\rangle$	1
9	$\left\langle \frac{144}{48} \right\rangle$	3	10	$\left\langle \frac{100}{48} \right\rangle$	2
11	$\left\langle \frac{196}{48} \right\rangle$	4	12	$\left\langle \frac{144}{48} \right\rangle$	3
13	$\left\langle \frac{256}{48} \right\rangle$	5	14	$\left\langle \frac{196}{48} \right\rangle$	4
15	$\left\langle \frac{324}{48} \right\rangle$	7	16	$\left\langle \frac{256}{48} \right\rangle$	5
17	$\left\langle \frac{400}{48} \right\rangle$	8	18	$\left\langle \frac{324}{48} \right\rangle$	7
19	$\left\langle \frac{484}{48} \right\rangle$	10	20	$\left\langle \frac{400}{48} \right\rangle$	8

表 1-2 与前面用枚举法产生的表 1-1，显然一致.

我们观察上述用公式产生的表格，自然会产生下面的疑问：如果 $x=k+\frac{1}{2}$，k 为整数. 那么，取 $<x>=k$，还是取 $<x>=k+1$? 本书作者经过研究，得出结论：在这个公式中的 x 不可能取 $k+\frac{1}{2}$ 的值.

（本节内容是参考文献［47］的缩写）

§1.3　周长为 n 的整数三角形个数计算公式

上一节中 $T(n)$ 的计算公式如何证明？这一节将给出它的证明过程.

定义　三角形周长 n 给定时，我们记相应的整数三角形的个数为 $T(n)$，相应的不等边整数三角形（三边中，没有两边相等）个数为 S_n，相应的等腰整数三角形（三边中，至少有两边相等）个数为 I_n.

引理 1　当 $n\geqslant 0$，有 $T(n)=S_n+I_n$.

证明　按照前述定义，以 n 为周长的整数三角形集合，可以剖分为以 n 为周长的不等边整数三角形和等腰整数三角形，这是两个没有公共元素的子集. 于是，从集合所含的元素个数来考察，有 $T(n)=S_n+I_n$. ▌

例 1　前面用枚举法可得到以 18 为周长的整数三角形为下列 7 个：(8，8，2)，(8，7，3)，(8，6，4)，(8，5，5)，(7，7，4)，(7，6，5)，(6，6，6). 我们从中找出 $T(18)=7$，$S_{18}=3$，$I_{18}=4$. 显然，有 $T(18)=S_{18}+I_{18}$. ▌

引理 2　不等边整数三角形的最短边不小于 2，其周长不小