经济应用数学

刘静　李凤 /主编

Economics Applied Mathematics

山东人民出版社

Economics Applied Mathematics

经济应用数学

刘静　李凤 /主编

山东人民出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/刘静，李凤主编.--济南:山东人民出版社，2016.9（2018.8重印）
ISBN 978-7-209-09714-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①刘… ②李… Ⅲ.①经济数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第144673号

经济应用数学

刘 静　李 凤　主编

主管部门　山东出版传媒股份有限公司
出版发行　山东人民出版社
社　　址　济南市英雄山路165号
邮　　编　250002
电　　话　总编室（0531）82098914
　　　　　市场部（0531）82098027
网　　址　http://www.sd-book.com.cn
印　　装　日照报业印刷有限公司
经　　销　新华书店

规　　格　16开（184mm×260mm）
印　　张　17.25
字　　数　340千字
版　　次　2016年9月第1版
印　　次　2018年8月第3次
ISBN 978-7-209-09714-7
定　　价　48.00元

前 言

为了满足高职高专教育应用型人才培养目标的要求，适应高职院校课程改革发展的需要，以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》为指导编写了这本《经济应用数学》。在编写过程中，坚持“应用为目的，必须够用为度，学有所需，学有所用”的定位原则，以培养造就高职院校学生可持续发展的职业能力和迁移能力为目标，全面提升学生素质。作为一门面向高职学生的基础课程，重组教材结构，精选教学内容，以培养学生职业能力所需的数学知识为核心，以实际岗位能力为需求，以项目及任务教学模式为主导进行教学设计。在保证高职数学教学“必需、够用、会用”基础上，突出“两个结合、两个服务”的特色，一要结合高等数学基础知识与基本能力要求，二要结合运用现代化教学手段；一要服务于专业的应用实践，二要立足于学生的职业岗位所需的数学能力，服务于学生的后续工作。

本教材有以下特点：

一、教材采用了项目化教学模式，将经济应用数学整个内容设计分为四个项目：经济现象的描述、分析与计算；经济问题的数表处理、优化设计；经济现象的推断分析；经济问题数学实验。每一部分设计遵循“案例驱动，任务导向”的原则，体现高职特色的“任务式”教学方法，适合高职高专人才培养目标和经济管理类专业学生的实际水平及专业需求。难度适中，淡化理论重视应用，数学知识表达准确，课程内容设计新颖独特，便于教师教学和学生学习。

二、强化学生应用能力的培养，注重数学思想和方法在实际生活中的应用。教材编写重构了课程知识的教学体系，体现了数学课程教学与学生专业需求之间的关系，实际应用的案例使学生将数学知识转化为应用的技能和解决问题的能力，引导学生突显数学知识在实际问题中的应用性，展现数学运用的魅力，使数学的工具性得到充分的体现。

三、注重培养学生利用计算机和数学软件计算求解数学问题的实际应用能力，将

数学演算转变为以计算机专业软件为主的数学操作，开展数学实验。教材的编写充分体现MATLAB软件与微积分、线性代数、概率论与数理统计的教学紧密结合的特点；实现图形的可视化，进行简单的数学建模。既能提高学生的综合实践动手能力，又让学生充分认知现代工具的快捷性和实用性。

四、精选例题习题，题型注重多样化、多层次。将习题融入专业知识背景，提供了生动的实例，每节后面配有同步练习题，适合数学基础相对薄弱的高职学生；每章配有习题与自测题，自测题分基础题和提高题，以便实施分层教学，满足不同基础的学生学习的需要，拓宽了学生知识面，培养了学生解决实际问题的能力。

本书数学知识内容主要包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、行列式、矩阵、线性方程组、线性规划、随机事件与概率、随机变量的概率分布及其数字特征、数理统计初步、数学实验等内容。教材内容精炼而丰富，重点突出，层次分明。

在本书的编写过程中，参考了李润英老师《经济应用数学》教材和陈笑缘老师《经济数学》教材，参考了有关数学实验等方面的书籍，在此向作者表示衷心感谢。

另外，参加本书编写的人员还有：王红、王桂珍、杨志刚、秦国明。

由于我们水平所限，书中不当之处敬请读者和同仁给予批评指正。

编　者

2016年7月

目录

项目一

经济现象的描述、分析与计算

知识目标

1. 掌握简单的数学建模；
2. 理解极限思想，掌握运用运算法则求简单函数的极限；
3. 理解导数定义，掌握运用导数的计算公式进行导数运算；
4. 理解边际与弹性的数学原理及经济含义；掌握解决实际问题的方法；
5. 掌握不定积分与定积分的定义及计算.

能力目标

1. 能根据收入、成本、利润等实际问题进行简单的数学建模；
2. 根据运算法则会求简单函数的极限；
3. 根据导数的计算公式会求导数；
4. 能根据边际与弹性的数学原理分析边际的经济含义，并会解决实际问题；
5. 能根据公式求不定积分与定积分；并能根据积分的思想解决实际经济问题.

本项目共有三个任务：任务一：极限与连续

任务二：导数与微分

任务三：不定积分与定积分

任务一 极限与连续

1-1 函数建模与经济数学模型

创设情境

在社会经济活动中,往往会涉及一些经济变量,它们之间有着各种依存关系.用数学方法解决问题时,就要找出这些经济变量之间的函数关系,然后利用微积分等知识分析这些经济函数的特性,建立数学模型.下面介绍一些常见的经济函数模型.

案 例 某商品当售价为每件70元时,市场需求量为0.9万件,若该商品每件降低3元,需求量将增加0.03万件;当售价为每件70元时,生产厂商愿意向市场提供1万件商品,若该商品每件增加3元,生产厂商就多提供0.06万件商品,当商品售价为多少元时,商品的需求与供给达到平衡?(设需求与供给均为线性函数)

任务导入 任务一:由实际问题建立需求、价格与供给函数模型;

任务二:运用函数模型探讨实际经济问题的解决.

知识掌握

一、需求函数、价格函数与供给函数模型

(一)需求函数

消费者愿意购买而且有支付能力购买的商品数量称为需求(或需求量).消费者对某种商品的需求量,与消费者的人数、收入、习惯、嗜好、季节以及该商品的价格等诸多因素有关.为简化分析,假定其他因素不变,只考虑商品的价格对需求量的影响,为此建立商品的需求量 Q 与该商品价格 p 的函数关系,称其为需求函数,记为 $Q=Q(p)$,其中价格 p 是自变量,$p\geqslant 0$.

一般地,需求量随价格上涨而减少,因此需求函数是价格的单调递减函数.在企业管理和经济学中常见的需求函数有:

线性需求函数：$Q=a-bp$，其中 $b\geqslant 0, a\geqslant 0$ 均为常数；

二次曲线需求函数：$Q=a-bp-cp^2$，其中 $b\geqslant 0, a\geqslant 0, c\geqslant 0$ 均为常数；

指数需求函数：$Q=Ae^{-bp}$，其中 $A\geqslant 0, b\geqslant 0$ 均为常数.

（二）价格函数

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数就是价格函数，记作 $p=p(Q)$.

价格函数也反映商品的需求与价格的关系，所以它也称为需求函数.

（三）供给函数

在市场经济规律作用下，市场上某种商品的供应量（称为商品供给量）的大小依赖于该商品的价格高低. 影响商品供给量的因素很多，通常情况下最重要的因素是商品价格，记商品供给量为 S，p 为商品的价格，则商品供给量 S 是价格 p 的函数，称为供给函数，记作 $S=S(p)$.

一般地，商品供给量随商品价格的上涨而增加. 商品供给函数 S 是商品价格 p 的单调递增函数. 常见的供给函数有：

线性供给函数：$S=ap-b(a>0, b>0)$；

二次供给函数：$S=ap^2+bp-c(a>0, b\geqslant 0, c>0)$；

指数供给函数：$S=Ae^{kP}-B(B>A>0, k>0)$.

需求函数与供给函数可以用来分析市场规律. 若把需求曲线和供给曲线（供给函数的图形）画在同一坐标系中（如图 1-1-1），则由于需求函数 Q 是单调递减函数，供给函数 S 是单调递增函数，所以它们将相交于一点 (p_0, Q_0). 这里的 p_0 就是使供、需平衡的价格，叫作均衡价格，Q_0 就是均衡商品量.

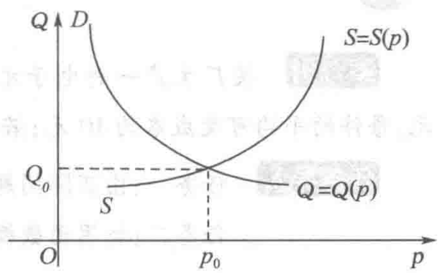

图 1-1-1

在市场经济中，当某种商品的价格小于均衡价格时，反映在市场上就会出现 $Q>Q_0$，即出现“供不应求”的局面，这时将会导致该商品的价格上涨；当商品的价格大于均衡价格时，反映在市场上就会出现 $Q<Q_0$，即出现“供过于求”的局面，这时将会导致该商品的价格下跌. 在纯粹的市场经济中，商品的价格 p 的变动取决于市场的供需关系，它总是围绕着均衡价格 p_0 左右摆动，这就是所谓的供求规律.

案例的讨论解决

讨论分析：该案例分为三步解决

（1）求该商品的线性需求函数；

（2）求该商品的线性供给函数；

（3）求当商品售价为多少元时，商品的需求与供给达到平衡？

解:(1)设线性需求函数为 $Q=a-bp$,

则$\begin{cases}0.9=a-70b,\\0.93=a-67b,\end{cases}$

解得 $a=1.6,b=0.01$,所以需求函数为 $Q=1.6-0.01p$.

(2)设线性供给函数为 $S=ap-b$,

则$\begin{cases}1=70a-b,\\1.06=73a-b,\end{cases}$ 解得 $a=0.02,b=0.4$,

所以供给函数为 $S=0.02p-0.4$.

(3)由供需均衡条件 $S=Q$,得 $1.6p-0.01p=0.02p-0.4$,解得 $p=66.7$,即当商品售价为 66.7 元时,商品的需求与供给达到平衡.

应用训练:

例 1 设需求函数 $Q=53-2p^2$,供给函数 $S=p-2$,求均衡价格和均衡商品量.

解:根据供需均衡的条件,则 $p-2=53-2p^2$,解得 $p_1=-5.5,p_2=5$.

由于价格不取负值,故得均衡价格 $p=5$,均衡商品量 $Q=5-2=3$.

创设情境

案 例 某厂生产一种电子元件,设计能力为日产 100 件,每日的固定成本为 150 元,每件的平均可变成本为 10 元;若每件售价 14 元,求该商品经营活动的无盈亏点.

任务导入 任务一:由实际问题建立常见的成本、收益与利润函数模型;

任务二:运用函数模型探讨实际经济问题的解决.

知识掌握

二、成本函数、收益函数与利润函数

(一)成本函数

产品的生产需要有场地(厂房)、机器设备、劳动力、能源、原材料等投入,称之为生产成本. 在成本投入中可分为两部分,一是不随产品产量变化而变化的固定成本,如厂房、设备等,常用 C_0 表示;二是随产品产量的变化而变化的可变成本,如原材料、能源等,常用 $C_1(q)$表示,q 是产品产量.

生产 q 个单位产品时的可变成本 $C_1(q)$ 与固定成本 C_0 之和,称为总成本函数,记作 $C(q)=C_0+C_1(q)$;总成本函数是一个单调递增函数.

只给出总成本不能说明企业生产的好坏,经济分析中常用到平均成本. 生产 q 个单位产品时的平均成本,记作 $\overline{C}(q)$,即 $\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_0}{q}+\frac{C_1(q)}{q}$.

(二)收益函数

总收益是销售者售出一定数量商品所得的全部收入,常用 $R(q)$ 表示;设商品的销售量为 q,单位价格为 p,则总收益函数 $R(q)=pq$;平均收益是单位商品的销售价格,常用 $\overline{R}(q)=\frac{R(q)}{q}=p$ 表示.

(三)利润函数

生产一定数量产品的总收益与总成本之差就是它的总利润,记作 $L(q)=R(q)-C(q)$,其中 q 是产品销量;它的平均利润记作 $\overline{L}=\overline{L}(q)$.

利润函数 $L(q)$ 出现了三种情形:

(1)$L(q)=R(q)-C(q)>0$,此时称为有盈余生产,即生产处于有利润状态;

(2)$L(q)=R(q)-C(q)<0$,此时称为亏损生产,即生产处于亏损状态;

(3)$L(q)=R(q)-C(q)=0$,此时称为无盈亏生产,则把无盈亏生产时的产量记为 q_0,称为盈亏转折点或保本点. 无盈亏分析常用于企业经营管理和经济学中分析各种定价和生产决算.

案例的讨论解决

讨论分析:该案例分为三步解决

(1)求该商品的总成本函数;

(2)求该商品的收益函数;

(3)求该商品的产量为多少时,商品的成本与收益达到平衡?

解:(1)总成本函数为 $C(q)=150+10q,q\in[0,100]$;

(2)收益函数为 $R(q)=14q,q\in[0,100]$;

(3)根据题意得:$C(q)=R(q)$,即 $150+10q=14q$,解得 $q=37.5$,故该商品经营活动的无盈亏点为 $q=37.5$.

应用训练:

例 2　某厂生产某种产品的最大生产能力为 5000 个单位,至少要生产 1000 个单位;固定成本为 2000 元,每生产 1 个单位产品,变动费用增加 10 元,试求总成本函数和平均成本函数.

解:根据题意,生产 q 个单位产品的可变成本为 $10q$ 元,而固定成本为 2000 元,所以总成本函数为

$$C(q)=2000+10q,q\in[1000,5000].$$

平均成本函数为

$$\overline{C}(q)=\frac{2000}{q}+10,q\in[1000,5000].$$

例 3　设某商品的价格函数是 $p=50-\frac{1}{5}q$，试求该商品的收益函数，并求出销售 10 件商品时的总收益和平均收益.

解：收益函数为 $R=pq=50q-\frac{1}{5}q^2$，

平均收益 $\overline{R}=\frac{R}{q}=p=50-\frac{1}{5}q$.

由此得到销售 10 件商品时的总收益和平均收益分别为

$$R(10)=50\times10-\frac{1}{5}\times10^2=480,$$

$$\overline{R}(10)=50-\frac{1}{5}\times10=48.$$

例 4　已知生产某种商品 q 件时的总成本（单位：万元）为 $C(q)=10+6q+0.1q^2$，如果该商品的销售单价为 9 万元，试求：

(1)该商品的总利润函数；

(2)生产 10 件该商品时的总利润和平均利润；

(3)生产 30 件该商品时的总利润.

解：(1)该商品的总收益函数 $R(q)=9q$，从而总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=3q-10-0.1q^2.$$

(2)生产 10 件该商品时的总利润为

$$L(10)=3\times10-10-0.1\times10^2=10(\text{万元}),$$

此时的平均利润为

$$\overline{L}(10)=\frac{L(10)}{10}=\frac{10}{10}=1(\text{万元/件}).$$

(3)生产 30 件该商品时的总利润为

$$L(30)=3\times30-10-0.1\times30^2=-10(\text{万元}).$$

例 5　已知某一商品销售 q 件的成本函数为 $C(q)=12+3q+q^2$，若销售单价为 11 元/件，试求：

(1)该商品经营活动的无盈亏点；

(2)若每天销售 10 件该商品，为了不亏本，销售单价应定为多少才合适？

解：(1)利润函数

$$\begin{aligned} L(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 11q - (12 + 3q + q^2) \\ &= 8q - 12 - q^2. \end{aligned}$$

由 $L(q)=0$，即 $8q-12-q^2=0$，解得两个盈亏点 $q_1=2$ 和 $q_2=6$.

由 $L(q)=(2-q)(q-6)$ 可以看出，当 $q<2$ 或 $q>6$ 时，都有 $L(q)<0$，这时生产经营是亏损的；当 $2<q<6$ 时 $L(q)>0$，生产经营是赢利的. 因此，$q=2$ 件和 $q=6$ 件分别是盈利的最低产量和最高产量.

(2) 设定价为 p 元/件，则利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=pq-(12+3q+q^2)$，为使生产经营不亏本，须有 $L(10)\geqslant 0$，即 $10p-142\geqslant 0$，也就是 $p\geqslant 14.2$.

所以，为了不亏本，销售单价应不低于 14.2 元/件.

同步练习 1-1

1. 某厂生产一种元器件，设计能力为日产 120 件. 每日的固定成本为 200 元，每件的平均可变成本为 10 元.

   (1) 试求该厂此元器件的日成本函数及平均成本函数；

   (2) 若每件售价 15 元，试写出总收入函数；

   (3) 试写出利润函数并求盈亏转折点.

2. 某商品的成本函数(单位:元)为 $C=81+3q$，其中 q 为该商品的数量. 问:

   (1) 如果商品的售价为 12 元/件，该商品的保本点是多少?

   (2) 售价为 12 元/件时，售出 10 件商品的利润为多少?

   (3) 该商品的售价为什么不应定为 2 元/件?

3. 某商品的需求函数为 $Q=20-3p$，供给函数 $S=5p-4$，求:

   (1) 该商品的总收益函数；

   (2) 该商品的均衡价格及此时的总收入.

1-2 无限中的有限

创设情境

案例 1 公元前三百年左右，我国战国时期的哲学著作《庄子》记载:“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”意思是说:一根一尺长的木棒，每天截去一半，永远也截不完. 我们用

数学的思想去理解，如果令天数为 n，第 n 天后剩下的部分为 a_n，这样就得到一个数列

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots,$$

问剩余的棒长 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的变化趋势如何？

案例 2　考察一个人沿直线朝着路灯正方向走时，其影子的长度如何变化？

任务导入　极限的概念及运算

知识掌握

一、极限的概念

（一）数列的极限

在案例 1 中，显然木棒的长度越来越少，可以想象当天数 n 无限增大时，剩余的棒长无限趋近于 0，这个例子反映了一类数列的共同特性——收敛性. 这就是我们要讨论的数列的极限问题.

定义 1　设有数列 $\{a_n\}$，如果当 n 无限增大时，a_n 无限趋近于某一常数 A，则称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A(n\to\infty).$$

案例1的讨论解决

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ 或 $\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty)$.

应用训练：

例 1　考察下列数列，写出它们的极限：

(1) 数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$；

(2) 数列 $\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$；

(3) 数列 $\{2n-1\}$；

(4) 数列 $\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$.

解：数列趋近于某常数的方式有多种情况，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 趋近 1 的方式是从 1 的左侧向 1 趋近；$\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 趋近于 2 的方式是从 2 的左右两侧向 2 趋近；数列 $\{2n-1\}$ 当 $n\to\infty$ 时，数

列各项的值也无限增大，从而不能趋近于任何一个常数；而数列$\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right\}$当$n\to\infty$时，它的各项在1、0这两个数值之间跳跃，即随着$n$的无限增大，数列也不趋近于任何常数，所以这两个数列都没有极限.

若一个数列没有极限，则称这个数列不收敛或称其为发散数列.

（二）函数的极限

函数的极限分为两类：一类是当自变量x的绝对值无限增大（记为$x\to\infty$）时，函数$f(x)$的极限；另一类是当自变量x无限趋近于一个定点x_0（记为$x\to x_0$）时，函数$f(x)$的极限.

1. $x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

在数列极限中，记号$n\to\infty$的意义是指数列的项数按自然数的顺序无限增大. 而函数的自变量$x\to\infty$是指x的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

(1) x取正值无限增大，记为$x\to+\infty$；

(2) x取负值，其绝对值无限增大，记为$x\to-\infty$.

如果$x\to+\infty$和$x\to-\infty$两种情况都存在，则可以合并记为$x\to\infty$.

例如观察一下函数$f(x)=\frac{1}{x}$，当$x\to\infty$时它的变化趋势.

由图1-2-1可以看出，不论当$x\to+\infty$还是当$x\to-\infty$时，$f(x)=\frac{1}{x}$都无限趋近于常数0，即当自变量$x\to\infty$时，函数$f(x)=\frac{1}{x}$的极限是0.

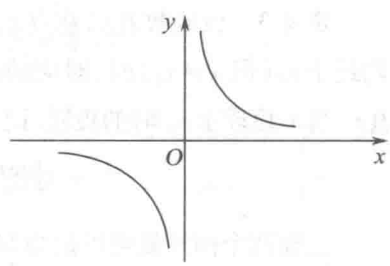

图1-2-1

定义2　如果当x的绝对值无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于常数A，则称常数A为函数$f(x)$当x趋于无穷大时的极限. 记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

对于$f(x)=\frac{1}{x}$有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

类似地，如果当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时，函数$f(x)$无限趋近于一个常数A，那么常数A就叫作当$x\to+\infty$（或$x\to-\infty$）时，函数$f(x)$的极限. 记为

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例如，由函数$y=\arctan x$的图像知（附录1）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

例2　作下列函数的图像并判断是否有极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$；(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$.