



“十二五”全国普通高等教育规划教材

“十二五”全国普通高等教育规划教材编审委员会审定

高等数学

全国普通高等教育规划教材
组织编写
编 审 委 员 会



南开大学出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 郭欣红, 郑子苹主编. -- 天津: 南开大学出版社,

2012.6

面向“十二五”高等教育规划教材

ISBN 978-7-310-03926-5

I. ①高… II. ①郭… ②郑… III. ①高等数学—高等学校—教材
IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第117159号

南开大学出版社

北京旭晨印刷厂印刷 全国新华书店经销

787mm × 1092mm 16开本 17印张 412千字

2018年7月修订版第1次印刷

定价: 43.90元

责任编辑: 尹建国

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 022-23508339

读者服务部电话: 022-23668705

发行部电话: 022-23672171

本书如有印装质量问题, 请与本社联系调换

编委会

主 编

郭欣红 郑子苹

副主编

秦胜洲 黄进惯 韦建辉

第一章 函数概念	1
第一节 函数的概念	1
第二节 反函数的导数、复合函数的求导法则	5
第三节 反函数的导数	5
第四节 复合函数的求导法则	5
第五节 函数的应用	10
第六节 函数的应用	10
第七节 函数的应用	10
第八节 函数的应用	10
第九节 函数的应用	10
第十节 函数的应用	10
第十一节 函数的应用	10
第十二节 函数的应用	10
第十三节 函数的应用	10
第十四节 函数的应用	10
第十五节 函数的应用	10
第十六节 函数的应用	10
第十七节 函数的应用	10
第十八节 函数的应用	10
第十九节 函数的应用	10
第二十节 函数的应用	10
第二十一节 函数的应用	10
第二十二节 函数的应用	10
第二十三节 函数的应用	10
第二十四节 函数的应用	10
第二十五节 函数的应用	10
第二十六节 函数的应用	10
第二十七节 函数的应用	10
第二十八节 函数的应用	10
第二十九节 函数的应用	10
第三十节 函数的应用	10
第三十一节 函数的应用	10
第三十二节 函数的应用	10
第三十三节 函数的应用	10
第三十四节 函数的应用	10
第三十五节 函数的应用	10
第三十六节 函数的应用	10
第三十七节 函数的应用	10
第三十八节 函数的应用	10
第三十九节 函数的应用	10
第四十节 函数的应用	10
第四十一节 函数的应用	10
第四十二节 函数的应用	10
第四十三节 函数的应用	10
第四十四节 函数的应用	10
第四十五节 函数的应用	10
第四十六节 函数的应用	10
第四十七节 函数的应用	10
第四十八节 函数的应用	10
第四十九节 函数的应用	10
第五十节 函数的应用	10
第五十一节 函数的应用	10
第五十二节 函数的应用	10
第五十三节 函数的应用	10
第五十四节 函数的应用	10
第五十五节 函数的应用	10
第五十六节 函数的应用	10
第五十七节 函数的应用	10
第五十八节 函数的应用	10
第五十九节 函数的应用	10
第六十节 函数的应用	10
第六十一节 函数的应用	10
第六十二节 函数的应用	10
第六十三节 函数的应用	10
第六十四节 函数的应用	10
第六十五节 函数的应用	10
第六十六节 函数的应用	10
第六十七节 函数的应用	10
第六十八节 函数的应用	10
第六十九节 函数的应用	10
第七十节 函数的应用	10
第七十一节 函数的应用	10
第七十二节 函数的应用	10
第七十三节 函数的应用	10
第七十四节 函数的应用	10
第七十五节 函数的应用	10
第七十六节 函数的应用	10
第七十七节 函数的应用	10
第七十八节 函数的应用	10
第七十九节 函数的应用	10
第八十节 函数的应用	10
第八十一节 函数的应用	10
第八十二节 函数的应用	10
第八十三节 函数的应用	10
第八十四节 函数的应用	10
第八十五节 函数的应用	10
第八十六节 函数的应用	10
第八十七节 函数的应用	10
第八十八节 函数的应用	10
第八十九节 函数的应用	10
第九十节 函数的应用	10
第九十一节 函数的应用	10
第九十二节 函数的应用	10
第九十三节 函数的应用	10
第九十四节 函数的应用	10
第九十五节 函数的应用	10
第九十六节 函数的应用	10
第九十七节 函数的应用	10
第九十八节 函数的应用	10
第九十九节 函数的应用	10
第一百节 函数的应用	10

会委编

前言

为了适应高职高专教育发展的需要，培养造就更多的实用型、复合型人才，我们组织编写了这本《高等数学》，供全国高职高专院校各专业公共课教材教学使用。

本教材力求体现基础性、实用性和发展性三方面需求。具体体现在：第一，尊重学科，但不恪守学科性，注重教材自身的系统性、逻辑性。对难度较大的部分基础理论，注意讲清概念，简化理论，重在培养学生分析问题、解决问题的能力。第二，加强对学生理论联系实际基础知识和基本方法的教学，使学生掌握怎样运用数学知识解决实际问题。

本书在教材内容的取舍上注意了“文理科兼用”，教师可根据专业教学要求对教学内容作适当取舍。本教材在编写中，强化了将实际问题变换成数学问题的过程，这也是一个创新。其中许多章节都引用了不少实际问题，然而限于篇幅，本书不可能囊括各行各业的实际问题，因此教师们在使用时需要挖掘与本专业相关的问题加以补充。

本书是高职高专通用教材，也可以作为高等函授大学、夜大、职工大学学生的学习用书，还可供各类在职工作人员自学用书。

这本教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之数学教学改革中的一些问题还有待探索，不当之处恳请批评指正。

全国普通高等教育规划教材编审委员会

目 录

20	第一章 函数 / 1	174
15	第一节 函数的概念	198
	第二节 函数的几个基本性质	203
	第三节 基本初等函数	208
	第四节 复合函数与初等函数	210
	第五节 复数的概念及其运算	212
18	第二章 极限与连续 / 17	215
	第一节 极限	217
	第二节 两个重要极限	220
	第三节 无穷小与无穷大	223
	第四节 函数的连续性	226
18	第三章 导数与微分 / 33	233
	第一节 导数概念	233
	第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	237
	第三节 反函数的导数、复合函数的求导法则	239
	第四节 高阶导数	243
	第五节 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	244
	第六节 函数的微分	247
	第七节 微分在近似计算中的应用	252
18	第四章 导数应用 / 57	257
	第一节 拉格朗日中值定理与函数单调性判定法	257
	第二节 函数的极值及判定	259
	第三节 函数的最大值和最小值	261
	第四节 曲线的凸凹性与拐点	263
	第五节 函数图形的描绘	265

第六节	洛必达法则	68
第七节	导数在经济问题中的应用	71
第五章 不定积分与定积分 / 81		
第一节	不定积分的概念与性质	81
第二节	不定积分的积分方法	84
第三节	定积分的概念	89
第四节	定积分的性质	92
第五节	微积分学基本定理	93
第六节	定积分的换元积分法与分部积分法	96
第七节	广义积分	99
第八节	定积分的应用	102
第六章 常微分方程 / 113		
第一节	微分方程的基本概念和可分离变量微分方程	113
第二节	一阶线性微分方程	115
第三节	二阶常系数线性微分方程	117
第七章 空间解析几何 / 123		
第一节	空间直角坐标系	123
第二节	向量	124
第三节	平面与空间直线	129
第四节	曲面与空间曲线	132
第八章 多元函数微分学 / 139		
第一节	多元函数的基本概念	139
第二节	偏导数与全微分	142
第三节	多元复合函数和隐函数的微分	148
第四节	多元函数的极值	152
第九章 多元函数积分学基础 / 159		
第一节	二重积分的概念与性质	159
第二节	二重积分的计算	163
第三节	二重积分的应用	170

* 第四节 曲线积分	174
------------------	-----

第十章 无穷级数 / 187

第一节 数项级数的概念及其性质	187
第二节 正项级数的审敛法	191
第三节 任意项级数	196
第四节 幂级数	198
第五节 函数的幂级数展开	203
第六节 幂级数在近似计算中的应用	208

第十一章 拉普拉斯变换简介 / 213

第一节 拉式变换的概念	213
第二节 拉氏变换的性质	215
第三节 拉氏逆变换及其应用	218

部分习题参考答案 / 223

参考文献 / 264

第一章 函数

念辨的烧函,二

函数是数学中的主要研究对象。这一章内容主要介绍函数的概念和一些基本性质。由于电气等专业常会遇到复数,所以这里对实数和复数都做了一些必要的介绍。为了以后的叙述方便,本章中还介绍一些数学中常用的符号。

第一节 函数的概念

一、常用符号的集合

由一些可识别的个体组成的全体,就称为一个集合. 集合 S 中每个个体称为集合 S 的一个元素. 如果 x 是集合 S 的一个元素, 记为 $x \in S$, 读作“ x 属于 S ” 如果 x 不是集合 S 的一个元素, 记为 $x \notin S$, 读作“ x 不属于 S ”.

另外还有一个常用有关集合的符号“ \exists ”. 设 S 是一个数集, 表达式“ $\exists x \in S$ ”表示“在集合 S 中存在一个元素 x ”, 读为“存在 x 属于 S ”.

没有任何元素的集合是一种特殊的集合, 这个集合被称为空集, 记为 ϕ .

集合的表示方法一般有两种: 列举法和描述法.

【例 1】 若 A 是由方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根组成的集合, 则用描述法表示为 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 用列举法表示为 $A = \{2, 3\}$.

在数学中对一些常用的数集符号有些常用的表示习惯。

(1) 数集符号

- R**: 表示实数集; **Q**: 表示有理数集;
- R⁺**: 表示正实数集; **Q⁺**: 表示正有理数集;
- Z**: 表示整数集; **N**: 表示自然数集(包含零);
- Z⁺**: 表示正整数集.

(2) 区间

有限区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$; $(a, b) = \{x | a < x < b\}$;
 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$; $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

无限区间: $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$

$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$; $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$;

$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$; $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$.

(3) 邻域

今后经常会讨论一种称为“邻域”的特殊的集合, 它们的定义如下:

邻域: 集合 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为 a 的一个 δ -邻域, 记为 $U(a)$ 或 $[U(a, \delta)]$.

空心邻域:集合 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 称为 a 的一个空心 δ -邻域, 记为 $U_\delta(\hat{a})$.

二、函数的概念

定义 在某一变化过程中, 有两个变量 x 和 y , 如果按照某一确定的法则, 对于在 x 变化范围内的每一个值, 都有 y 的一个确定的值与它相对应, 这样的一种关系就称 y 是 x 的一个函数, 记为 $y = f(x)$.

在函数 $y = f(x)$ 中, x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量的变化范围称为函数的定义域, 一般记为 $D(f)$; 因变量的变化范围称为函数的值域, 一般记为 $R(f)$.

在函数的定义中, 函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素.

【例 2】 ①两个函数.

$$y = f_1(x) = x + 1, -\infty < x < +\infty$$

$$y = f_2(x) = \frac{x^2 + x}{x}, x \neq 0$$

它们的对应法则是相同的, 但定义域却不相同 $f_1(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, $f_2(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 因此这是两个不同的函数.

$$\textcircled{2} y = f_1(x) = x \quad x > 0; \quad y = f_2(x) = 2^{\log_2 x} \quad x > 0$$

这两个函数表面上它们的形式不尽相同, 但按照定义, x 与 y 的对应法则相同, 且定义域显然相同, 因此这是两个相同的函数.

【例 3】 求下列函数的定义域

$$\textcircled{1} f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

解: ①当 $x \geq 1$ 时, 函数都有定义, 所以, 函数的定义域是 $[1, +\infty)$.

②当 $x \neq -2$ 时, 函数都有定义, 所以, 函数的定义域是 $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

第一节 习 题

1. 用区间表示下列不等式的解集合.

$$(1) |x - 3| < 4$$

$$(2) |ax - x_0| < \delta (a > 0, \delta > 0)$$

$$(3) 0 < (x - 2)^2 \leq 4$$

$$(4) 2x + 3 > x^2$$

2. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{3x + 2}$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$$(4) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2}$$

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $g(x) = f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域.

4. 下列各对函数中相同的一对是().

A. $f(x) = \lg(3-x)(3+x)$ 与 $g(x) = \lg(3-x) + \lg(3+x)$

B. $f(x) = \frac{x(x-1)}{x}$ 与 $g(x) = x-1$

- C. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$
 D. $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$

第二节 函数的几个基本性质

一、函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是一个对称集, 如果对 $D(f)$ 中的任意一个元素 x , 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是一个偶函数; 如果对 $D(f)$ 中的任意一个元素 x , 都满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是一个奇函数.

现将几个常见的奇偶函数给出如下:

$y = x^{2n}, y = \cos x$ 等都是偶函数;

$y = x^{2n+1}, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ 等都是奇函数.

【例1】 判断函数 $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解: 函数的定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$ 是一个对称集, 对任意一个 x

$$f(-x) = \frac{3^{(-x)} + 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是一个偶函数.

函数的奇偶性有下面的一些性质:

- ① 两个偶函数的和、差、积或商都是偶函数;
- ② 两个奇函数的和、差还是奇函数;
- ③ 两个奇函数的积与商是偶函数;
- ④ 一个奇函数与一个偶函数的积或商是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 即: 如果点 (x, y) 在函数图形上, 那么, 点 $(-x, y)$ 也在函数图形上. 奇函数的图形关于原点对称, 即: 如果点 (x, y) 在函数图形上, 那么, 点 $(-x, -y)$ 也在函数图形上(图 1-1, 图 1-2).

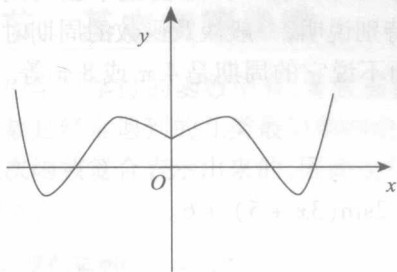


图 1-1 偶函数图像

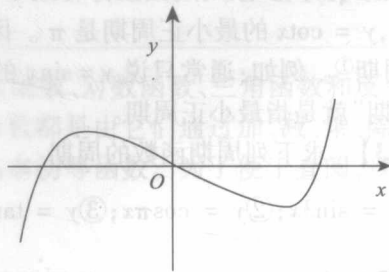


图 1-2 奇函数图像

【例2】 ① $g(x) = x^3$ 和 $h(x) = \sin x$ 是奇函数, 由以上性质 $f_1(x) = x^3 + \sin x$ 也是奇函数, 而 $f_2(x) = x^3 \sin x$ 是偶函数.

② $g(x) = x, h(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g(x)$ 是奇函数, $h(x)$ 是偶函数, 所以

$$f(x) = g(x)h(x) = x\sqrt{1+x^2}$$

是奇函数。

二、函数的单调性

定义 设 $D(f)$ 是函数 $f(x)$ 的定义域, 对 $D(f)$ 中的任意两个数 $x_1 \neq x_2$:

① 如果, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是单调增加函数;

② 如果, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是单调减少函数;

③ 如果, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是非减函数;

④ 如果, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是非增函数。

下面是一些常见的单调增加函数:

① $y = x^k$, k 是一个正奇数, 是一个单调增加函数;

② $y = \sin x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 是一个单调增加函数;

③ $y = \cos x \quad 0 < x < \pi$, 是一个单调减少函数;

④ $y = e^x$, $y = \ln x$ 和 $y = \log_a x \quad (a > 1)$, 是单调增加函数;

⑤ $y = a^x$ 和 $y = \log_a x \quad$ 当 $0 < a < 1$ 时, 是单调减少函数;

⑥ $y = \tan x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 是单调增加函数; $y = \cot x \quad 0 < x < \pi$, 是单调减少函数;

⑦ $y = \arcsin x$ 是单调增加函数; $y = \arccos x$ 是单调减少函数;

⑧ $y = \arctan x$ 是单调增加函数; $y = \operatorname{arccot} x$ 是单调减少函数。

函数单调性的判断, 一般可用上述性质进行判定。

三、函数的周期性

设 T 是一个正数, 函数 $y = f(x)$ 若满足下面的两条:

① 如果 $x \in D(f)$, 则 $x \pm T \in D(f)$;

② 对任意 $x \in D(f)$, 都有 $f(x \pm T) = f(x)$;

就称 $f(x)$ 是一个周期函数, T 称为 $f(x)$ 的一个周期。

一般来说, 大多数周期函数都有最小正周期, 例如: $y = \sin x, y = \cos$ 的最小正周期是 2π ; $y = \tan x, y = \cot x$ 的最小正周期是 π 。因此, 今后如无特别说明, 一般谈及函数的周期时, 都是指最小正周期^①。例如: 通常只说 $y = \sin x$ 的周期是 2π , 而不说它的周期是 4π 或 8π 等。这里提到的“周期”就是指最小正周期。

【例 3】 求下列周期函数的周期

① $y = \sin 3x$; ② $y = \cos \pi x$; ③ $y = \tan \frac{2x+3}{3}$; ④ $y = 2\sin(3x+5) + 6$ 。

解: ① 因为 $y = f(x) = \sin x$ 的周期是 2π , 所以 $y = f(3x) = \sin 3x$ 的周期 $\frac{2\pi}{3}$;

② 因为 $y = f(x) = \cos x$ 的周期是 2π , 所以 $y = f(\pi x) = \cos \pi x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$;

^① 也存在没有最小正周期的周期函数, 例如: 常数函数 $f(x) = c$, 它就是一个周期函数, 任意一个正实数都是它的周期, 因此, 它不存在最小正周期。

③因为 $y = f(x) = \tan x$ 的周期是 π , 所以 $y = f\left(\frac{2}{3}x + 1\right) = \tan \frac{2x+3}{3}$ 的周期是 $(\pi / \frac{2}{3}) = \frac{3\pi}{2}$.

④因为 $y = f(x) = \sin x$ 的周期是 2π , 所以 $y = 2f(3x + 5) = 2\sin(3x + 5)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$.

四、函数的有界性

定义 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义。如果存在一个正数 M , 使得对于所有的 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 或说 $f(x)$ 是 D 上的有界函数; 如果 $f(x)$ 在其定义域上有界, 就称 $f(x)$ 是有界函数。

如 $\sin x$ 是有界函数, 因为存在 $M = 1$, 使得 $|\sin x| \leq 1$;

又如 $\tan x$ 在 $[-\pi/4, \pi/4]$ 是有界函数, 而 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 是无界函数。

用定义判断一个函数是否为有界函数, 除了一些简单的函数外, 一般都很困难。今后, 当学了连续与函数间断点的概念后, 再来判断函数的有界性将简单得多! 因此, 在这里也不展开深入的讨论。

第二节 习 题

1. 判断函数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ 与函数 $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ 的奇偶性。

2. 求下列函数的周期

① $y = \cos(3x + 2)$

② $y = \cos \frac{\pi x}{2}$

③ $y = 3\tan(3x + 2) + 5$

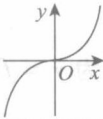
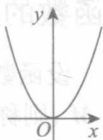
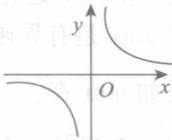
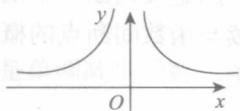
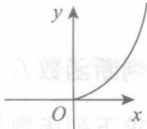
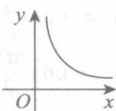
第三节 基本初等函数

在中学里学过的函数中有: 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。这些函数是经常遇到的几类最简单的函数, 并且许多函数都是由它们通过加、减、乘、除四则运算和有限次函数复合表示出来的, 因此这几类函数称为基本初等函数。为了便于查阅, 现将它简单介绍如下:

一、幂函数 $y = x^\alpha$

当 α 取不同的值时, 要注意幂函数 $y = x^\alpha$ 的定义域和函数图像的状态, 具体见表 1-1。

表 1-1 幂函数基本性质

α	定义域	单调性	函数图像
正奇数	$(-\infty, +\infty)$	单调增加	
正偶数	$(-\infty, +\infty)$	在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 单调增加	
负奇数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	分别在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调减少	
负偶数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加, 在 $(0, +\infty)$ 单调减少	
正数	$[0, +\infty)$	单调增加	
负数	$[0, +\infty)$	单调减少	

二、指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

指数函数 $y = a^x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 当 $x=0$ 时, $y=1$, 即函数的曲线通过 $(0,1)$ 点. 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 是单调增加函数; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 是单调减少函数. 函数图像如图 1-3 所示.

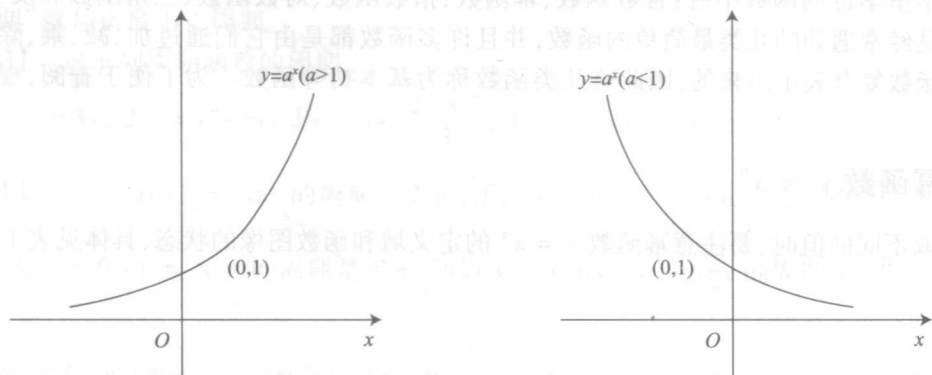


图 1-3 指数函数的图像

指数函数的主要性质有两条:

$$\textcircled{1} a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \textcircled{2} (a^x)^y = a^{xy}.$$

三、对数函数 $y = \log_a x$

对数函数的定义为: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 当且仅当 $a^y = x$. 它是指数函数的反函数, 定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $x=1$ 时 $y=0$, 因此函数曲线通过点 $(1, 0)$; 当 $a > 1$ 时, 对数函数 $y = \log_a x$ 是单调增加函数, 当 $0 < a < 1$ 时, 它是单调减少函数. 函数图像如图 1-4 所示.



图 1-4 对数函数图像

对数函数有如下性质:

$$\textcircled{1} y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \text{ (定义)};$$

$$\textcircled{2} \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \text{ (注意: } \log_a x \cdot \log_a y \neq \log_a (x + y) \text{)};$$

$$\textcircled{3} x = a^{\log_a x}, x = \log_a a^x;$$

$$\textcircled{4} \log_a x^k = k \log_a x;$$

$$\textcircled{5} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$$

$$\textcircled{6} \log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$$

在中学里, 使用最多的对数是以 10 为底的“常用对数”, 即 $\log_{10} x$. 因为常用, 所以称为“常用对数”, 也因为常用, 就给了它一个特别的符号“ $\lg x$ ”. 而在理论上, 还有一个重要的对数——自然对数“ $\ln x$ ”, e 是一个无理数, 它的值是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$$

自然对数就是以这个常数 e 为底的对数, 即: $\ln x = \log_e x$, 自然界里的许多自然规律都与这个神秘的数“ e ”有关, e 通常称为自然对数底.

四、三角函数

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 且都是周期为 2π 的周期函数. 其函数图像见图 1-5 所示.

正弦函数与余弦函数有如下公式:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

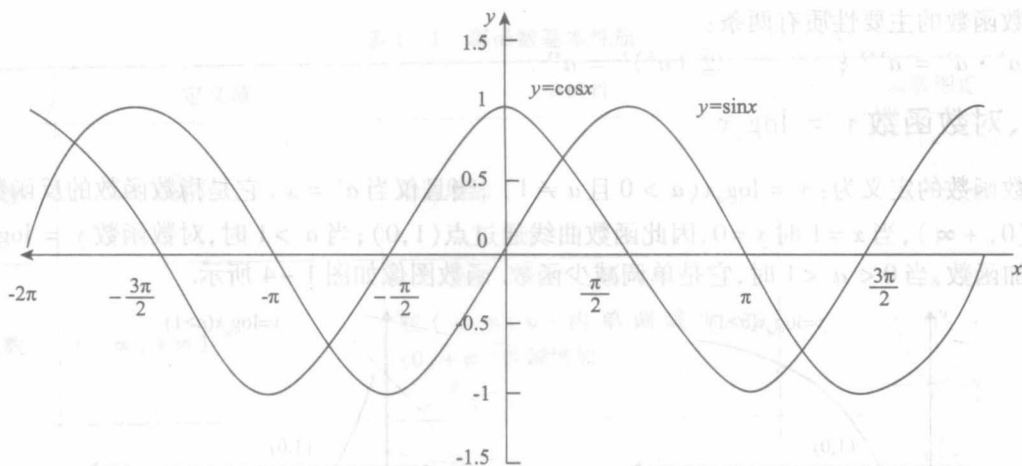


图 1-5 正弦函数与余弦函数图像

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

当 $x=y$, 时

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

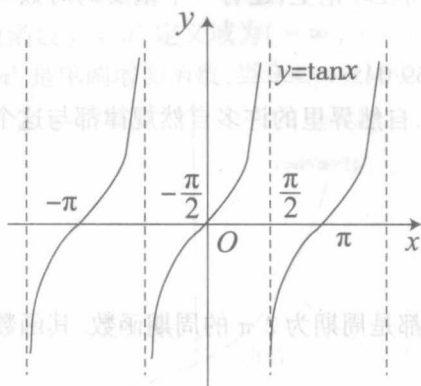
(2) 正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$

正切函数和余切函数的定义为

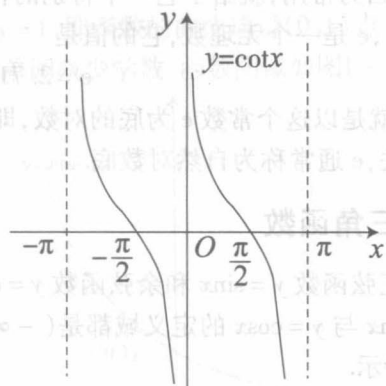
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

显然, 当 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $y = \tan x$ 无定义; 当 $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

时, $y = \cot x$ 无定义. 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, $y = \tan x$ 是单调增加函数; 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $y = \cot x$ 是单调减少函数, 见图 1-6 所示.



(a) 正切函数图像



(b) 余切函数图像

图 1-6 正切、余切函数图像

(3) 正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$

正割函数和余割函数定义为: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

正割函数、余割函数与正切函数、余切函数有如下重要关系:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

五、反三角函数

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R . 若存在一个函数 $x = g(y)$, 它的定义域为 R , 值域为 D , 对任意 $y_0 \in R$, 存在一个 $x_0 = g(y_0) \in D$, 且 $f(x_0) = y_0$, 则称函数 $x = g(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

由于函数是两个变量之间相互变化关系的一种表达形式, 与变量的符号无关, 习惯上函数的自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 所以函数 $y = f(x)$ 的反函数也表示为 $y = f^{-1}(x)$.

求解函数 $y = f(x)$ 的反函数, 一般可以从函数的解析式 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$, 然后将变量 x 与 y 交换就得反函数 $y = f^{-1}(x)$.

【例1】 求函数 $y = \frac{x}{1+x}$ 的反函数.

解: 由 $y = \frac{x}{1+x}$ 得

$$y(x+1) = x, x(y-1) = -y, x = \frac{y}{1-y}$$

交换变量 x 与 y , 得 $y = \frac{x}{1+x}$ 的反函数为 $y = \frac{x}{1-x}$.

【例2】 正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数在整个区间上是不存在的, 选择它的一个单调区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 正弦函数 $y = \sin x$ 在这个区间上的反函数称为反正弦函数, 记为 $y = \arcsin x$. 其他的反三角函数也有类似的情况, 具体地列表如下:

函数	反函数	反函数定义域	反函数值域	单调性
$y = \sin x$ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	单调增加
$y = \cos x$ $0 \leq x \leq \pi$	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	单调减少
$y = \tan x$ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	反正切函数 $y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	单调增加
$y = \cot x$ $0 < x < \pi$	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$	单调减少

四个反三角函数的简单图像见图1-7所示.