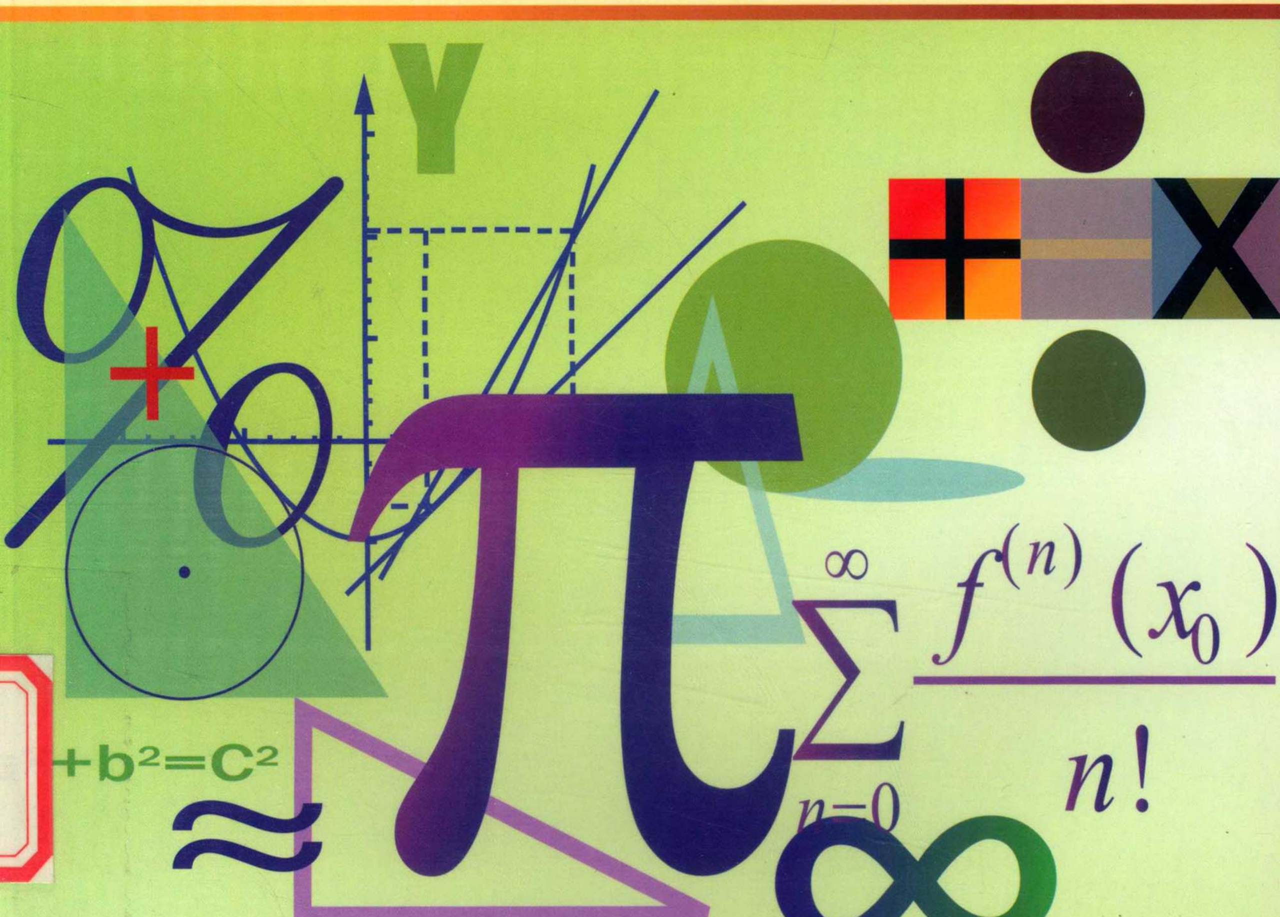
“十二五”全国普通高等教育规划教材

“十二五”全国普通高等教育规划教材编审委员会审定

高等数学

全国普通高等教育规划教材编审委员会 组织编写



南開大學出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

"十二五"全国普通高等教育规划教材

"十二五"全国普通高等教育规划教材编审委员会审定

高等数学

全国普通高等教育规划教材编审委员会 组织编写

南开大学出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 郭欣红, 郑子苹主编. -- 天津 : 南开大学出版社, 2012.6

面向“十二五”高等教育规划教材

ISBN 978-7-310-03926-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郭… ②郑… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第117159号

南开大学出版社

北京旭晨印刷厂印刷　全国新华书店经销

787mm × 1092mm　16 开本　17 印张　412 千字

2018年7月修订版第1次印刷

定价：43.90 元

责任编辑：尹建国

编 委 会

主 编

郭欣红 郑子苹

副主编

秦胜洲 黄进惯 韦建辉

前　言

为了适应高职高专教育发展的需要，培养造就更多的实用型、复合型人才，我们组织编写了这本《高等数学》，供全国高职高专院校各专业公共课教材教学使用。

本教材力求体现基础性、实用性和发展性三方面需求。具体体现在：第一，尊重学科，但不恪守学科性，注重教材自身的系统性、逻辑性。对难度较大的部分基础理论，注意讲清概念，简化理论，重在培养学生分析问题、解决问题的能力。第二，加强对学生理论联系实际基础知识和基本方法的教学，使学生掌握怎样运用数学知识解决实际问题。

本书在教材内容的取舍上注意了“文理科兼用”，教师可根据专业教学要求对教学内容作适当取舍。本教材在编写中，强化了将实际问题变换成数学问题的过程，这也是一个创新。其中许多章节都引用了不少实际问题，然而限于篇幅，本书不可能囊括各行各业的实际问题，因此教师们在使用时需要挖掘与本专业相关的问题加以补充。

本书是高职高专通用教材，也可以作为高等函授大学、夜大、职工大学学生的学习用书，还可供各类在职工作人员自学用书。

这本教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之数学教学改革中的一些问题还有待探索，不当之处恳请批评指正。

全国普通高等教育规划教材编审委员会

目　录

第一章　函　数

函数是数学中的主要研究对象。这一章内容主要介绍函数的概念和一些基本性质。由于电气等专业常会遇到复数，所以这里对实数和复数都做了一些必要的介绍。为了以后的叙述方便，本章中还介绍一些数学中常用的符号。

第一节　函数的概念

一、常用符号的集合

由一些可识别的个体组成的全体，就称为一个集合. 集合 S 中每个个体称为集合 S 的一个元素. 如果 x 是集合 S 的一个元素，记为 $x \in S$，读作"x 属于 S" 如果 x 不是集合 S 的一个元素，记为 $x \notin S$，读作"x 不属于 S".

另外还有一个常用有关集合的符号"$\exists$". 设 S 是一个数集，表达式"$\exists x \notin S$"表示"在集合 S 中存在一个元素 x"，读为"存在 x 属于 S".

没有任何元素的集合是一种特殊的集合，这个集合被称为空集，记为 ϕ.

集合的表示方法一般有两种：列举法和描述法.

【例 1】　若 A 是由方程 $x-5x+6=0$ 的根组成的集合，则用描述法表示为 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$，用列举法表示为 $A=\{2,3\}$。

在数学中对一些常用的数集符号有些常用的表示习惯。

(1) 数集符号

R：表示实数集；　　　　**Q**：表示有理数集；

R$^+$：表示正实数集；　　　**Q**$^+$：表示正有理数集；

Z：表示整数集；　　　　**N**：表示自然数集（包含零）；

Z+：表示正整数集.

(2) 区间

有限区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

无限区间：$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

$(\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$；$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$；

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$；$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$.

(3) 邻域

今后经常会讨论一种称为"邻域"的特殊的集合，它们的定义如下：

邻域：集合 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的一个 δ－邻域，记为 $U(a)$ 或 $[U(a,\delta)]$.

空心邻域：集合$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$称为$a$的一个空心$\delta$-邻域，记为$U_\delta(\hat{a})$.

二、函数的概念

定义 在某一变化过程中，有两个变量x和y，如果按照某一确定的法则，对于在x变化范围内的每一个值，都有y的一个确定的值与它相对应，这样的一种关系就称y是x的一个函数，记为$y=f(x)$.

在函数$y=f(x)$中，x称为自变量，y称为因变量.自变量的变化范围称为函数的定义域，一般记为$D(f)$；因变量的变化范围称为函数的值域，一般记为$R(f)$.

在函数的定义中，函数的对应法则和函数的定义域是函数的两个要素.

【例2】 ①两个函数.

$$y=f_1(x)=x+1,\ -\infty<x<+\infty$$

$$y=f_2(x)=\frac{x^2+x}{x},x\neq 0$$

它们的对应法则是相同的，但定义域却不相同$f_1(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，$f_2(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此这是两个不同的函数.

② $y=f_1(x)=x\quad x>0$； $y=f_2(x)=2^{\log 2^x}\ x>0$

这两个函数表面上它们的形式不尽相同，但按照定义，x与y的对应法则相同，且定义域显然相同，因此这是两个相同的函数.

【例3】 求下列函数的定义域

①$f(x)=\sqrt{x-1}$

②$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

解：①当$x\geqslant 1$时，函数都有定义，所以，函数的定义域是$[1,+\infty)$.

② 当$x\neq-2$时，函数都有定义，所以，函数的定义域是$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

第一节 习 题

1. 用区间表示下列不等式的解集合.

(1) $|x-3|<4$ (2) $|ax-x_0|<\delta(a>0,\delta>0)$

(3) $0<(x-2)^2\leqslant 4$ (4) $2x+3>x^2$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+2}$ (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$ (4) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

3. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求$g(x)=f(x+\dfrac{1}{4})+f(x-\dfrac{1}{4})$的定义域.

4. 下列各对函数中相同的一对是(　　).

A. $f(x)=\lg(3-x)(3+x)$与$g(x)=\lg(3-x)+\lg(3+x)$

B. $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$与$g(x)=x-1$

C. $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

D. $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$

第二节 函数的几个基本性质

一、函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 是一个对称集，如果对 $D(f)$ 中的任意一个元素 x，都满足 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个偶函数；如果对 $D(f)$ 中的任意一个元素 x，都满足 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是一个奇函数.

现将几个常见的奇偶函数给出如下：

$y = x^{2n}, y = \cos x$ 等都是偶函数；

$y = x^{2n+1}, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ 等都是奇函数.

【例 1】 判断函数 $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解：函数的定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$ 是一个对称集，对任意一个 x

$$f(-x) = \frac{3^{(-x)} + 3^{-(-x)}}{2} = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是一个偶函数.

函数的奇偶性有下面的一些性质：

①两个偶函数的和、差、积或商都是偶函数；

②两个奇函数的和、差还是奇函数；

③两个奇函数的积与商是偶函数；

④一个奇函数与一个偶函数的积或商是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，即：如果点 (x,y) 在函数图形上，那么，点 $(-x,y)$ 也在函数图形上. 奇函数的图形关于原点对称，即：如果点 (x,y) 在函数图形上，那么，点 $(-x,-y)$ 也在函数图形上（图 1－1，图 1－2）.

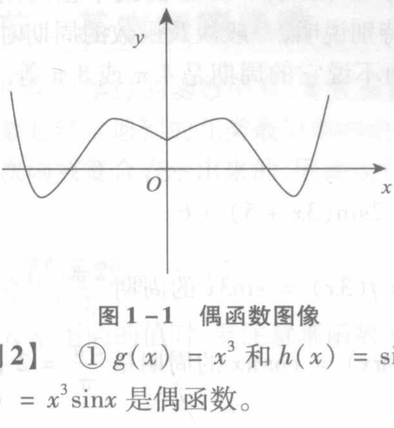


图 1－1 偶函数图像

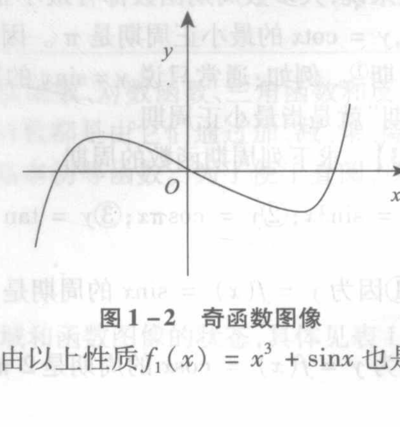


图 1－2 奇函数图像

【例 2】 ① $g(x) = x^3$ 和 $h(x) = \sin x$ 是奇函数，由以上性质 $f_1(x) = x^3 + \sin x$ 也是奇函数，而 $f_2(x) = x^3 \sin x$ 是偶函数。

② $g(x) = x$，$h(x) = \sqrt{1 + x^2}$，$g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，所以

$$f(x) = g(x)h(x) = x\sqrt{1 + x^2}$$

是奇函数。

二、函数的单调性

定义 设 $D(f)$ 是函数 $f(x)$ 的定义域,对 $D(f)$ 中的任意两个数 $x_1 \neq x_2$:

①如果,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是单调增加函数;

②如果,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是单调减少函数;

③如果,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是非减函数;

④如果,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 是非增函数。

下面是一些常见的单调增加函数:

① $y = x^k$,k 是一个正奇数,是一个单调增加函数;

② $y = \sin x \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$,是一个单调增加函数;

③ $y = \cos x \quad 0 < x < \pi$,是一个单调减少函数;

④ $y = e^x$,$y = \ln x$ 和 $y = \log_a x \quad (a > 1)$,是单调增加函数;

⑤ $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 当 $0 < a < 1$ 时,是单调减少函数;

⑥ $y = \tan x \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$,是单调增加函数;$y = \cot x \ 0 < x < \pi$,是单调减少函数;

⑦ $y = \arcsin x$ 是单调增加函数;$y = \arccos x$ 是单调减少函数;

⑧ $y = \arctan x$ 是单调增加函数;$y = \operatorname{arccot} x$ 是单调减少函数。

函数单调性的判断,一般可用上述性质进行判定。

三、函数的周期性

设 T 是一个正数,函数 $y = f(x)$ 若满足下面的两条:

①如果 $x \in D(f)$,则 $x \pm T \in D(f)$;

②对任意 $x \in D(f)$,都有 $f(x \pm T) = f(x)$

就称 $f(x)$ 是一个周期函数,T 称为 $f(x)$ 的一个周期。

一般来说,大多数周期函数都有最小正周期,例如:$y = \sin x$,$y = \cos$ 的最小正周期是 2π;$y = \tan x$,$y = \cot x$ 的最小正周期是 π。因此,今后如无特别说明,一般谈及函数的周期时,都是指最小正周期①。例如:通常只说 $y = \sin x$ 的周期是 2π,而不说它的周期是 4π 或 8π 等。这里提到的"周期"就是指最小正周期。

【例3】 求下列周期函数的周期

① $y = \sin 3x$;② $y = \cos \pi x$;③ $y = \tan \dfrac{2x+3}{3}$;④ $y = 2\sin(3x+5)+6$。

解:①因为 $y = f(x) = \sin x$ 的周期是 2π,所以 $y = f(3x) = \sin 3x$ 的周期 $\dfrac{2\pi}{3}$;

②因为 $y = f(x) = \cos x$ 的周期是 2π,所以 $y = f(\pi x) = \cos \pi x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$;

---

① 也存在没有最小正周期的周期函数,例如:常数函数 $f(x) = c$,它就是一个周期函数,任意一个正实数都是它的周期,因此,它不存在最小正周期。

③因为 $y=f(x)=\tan x$ 的周期是 π，所以 $y=f(\frac{2}{3}x+1)=\tan\frac{2x+3}{3}$ 的周期是 $(\pi/\frac{2}{3})=\frac{3\pi}{2}$.

④因为 $y=f(x)=\sin x$ 的周期是 2π，所以 $y=2f(3x+5)=2\sin(3x+5)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3}$。

四、函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义。如果存在一个正数 M，使得对于所有的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leq M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或说 $f(x)$ 是 D 上的有界函数；如果 $f(x)$ 在其定义域上有界，就称 $f(x)$ 是有界函数。

如 $\sin x$ 是有界函数，因为存在 $M=1$，使得 $|\sin x|\leq 1$；

又如 $\tan x$ 在 $[-\pi/4,\pi/4]$ 是有界函数，而 $\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 是无界函数。

用定义判断一个函数是否为有界函数，除了一些简单的函数外，一般都很困难。今后，当学了连续与函数间断点的概念后，再来判断函数的有界性将简单得多！因此，在这里也不展开深入的讨论。

第二节　习　题

1. 判断函数 $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$ 与函数 $g(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$ 的奇偶性。

2. 求下列函数的周期

①$y=\cos(3x+2)$

②$y=\cos\frac{\pi x}{2}$

③$y=3\tan(3x+2)+5$

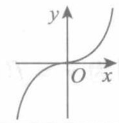
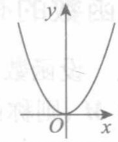
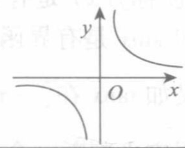
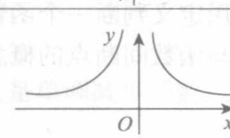
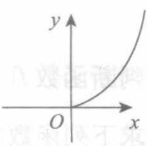
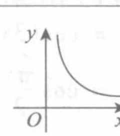
第三节　基本初等函数

在中学里学过的函数中有：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。这些函数是经常遇到的几类最简单的函数，并且许多函数都是由它们通过加、减、乘、除四则运算和有限次函数复合表示出来的，因此这几类函数称为基本初等函数。为了便于查阅，现将它简单介绍如下：

一、幂函数 $y=x^{\alpha}$

当 α 取不同的值时，要注意幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域和函数图像的状态，具体见表 1－1.

表 1-1 幂函数基本性质

α	定义域	单调性	函数图像
正奇数	$(-\infty, +\infty)$	单调增加	
正偶数	$(-\infty, +\infty)$	在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，在 $(0, +\infty)$ 单调增加	
负奇数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	分别在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调减少	
负偶数	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	在 $(-\infty, 0)$ 内单调增加，在 $(0, +\infty)$ 单调减少	
正数	$[0, +\infty)$	单调增加	
负数	$[0, +\infty)$	单调减少	

二、指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

指数函数 $y = a^x$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，当 $x = 0$ 时，$y = 1$，即函数的曲线通过 $(0,1)$ 点. 当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 是单调增加函数；当 $0 < a < 1$ 时，)，$y = a^x$ 是单调减少学数. 函数图像如图1-3所示.

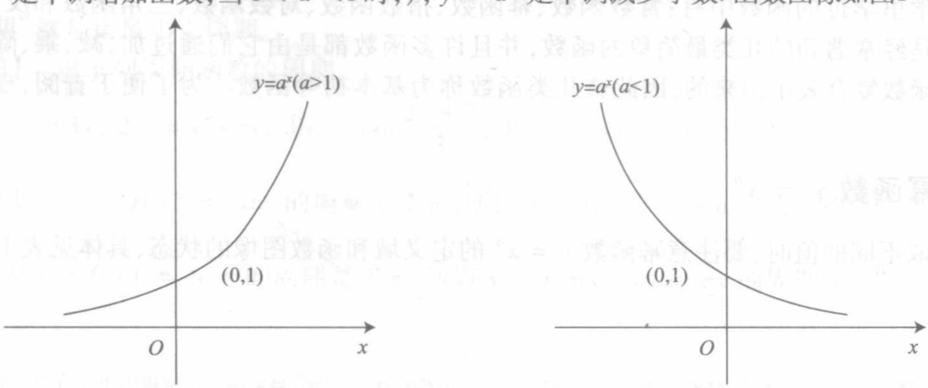


图 1-3 指数函数的图像

指数函数的主要性质有两条：

① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$； ② $(a^x)^y = a^{xy}$.

三、对数函数 $y = \log_a x$

对数函数的定义为：$y = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$，当且仅当 $a^y = x$. 它是指数函数的反函数，定义域为 $(0, +\infty)$，当 $x = 1$ 时 $y = 0$，因此函数曲线通过点 $(1,0)$；当 $a > 1$ 时，对数函数 $y = \log_a x$ 是单调增加函数，当 $0 < a < 1$ 时，它是单调减少函数. 函数图像如图 1-4 所示.

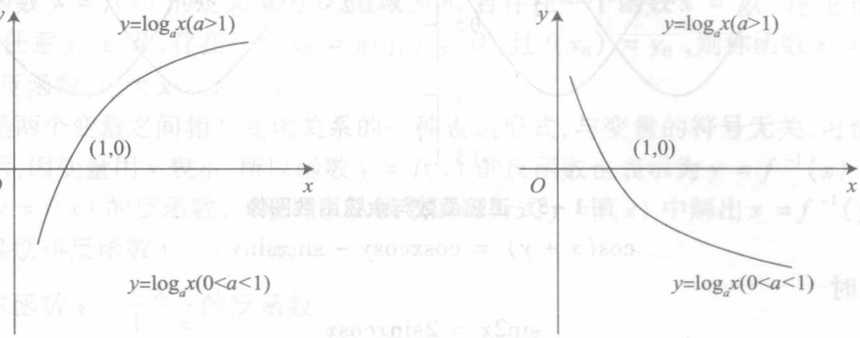


图 1-4 对数函数图像

对数函数有如下性质：

① $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$（定义）；

② $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$（注意：$\log_a x \cdot \log_a y \neq \log_a (x + y)$）；

③ $x = a^{\log_a x}$，$x = \log_a a^x$；

④ $\log_a x^k = k\log_a x$；

⑤ $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；

⑥ $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$.

在中学里，使用最多的对数是以 10 为底的“常用对数”，即 $\log_{10} x$. 因为常用，所以称为“常用对数”，也因为常用，就给了它一个特别的符号“ $\lg x$ ”. 而在理论上，还有一个重要的对数——自然对数“$\ln x$”，e 是一个无理数，它的值是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$$

自然对数就是以这个常数 e 为底的对数，即：$\ln x = \log_e x$，自然界里的许多自然规律都与这个神秘的数“e”有关，e 通常称为自然对数底.

四、三角函数

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，且都是周期为 2π 的周期函数. 其函数图像见图 1-5 所示.

正弦函数与余弦函数有如下公式：

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

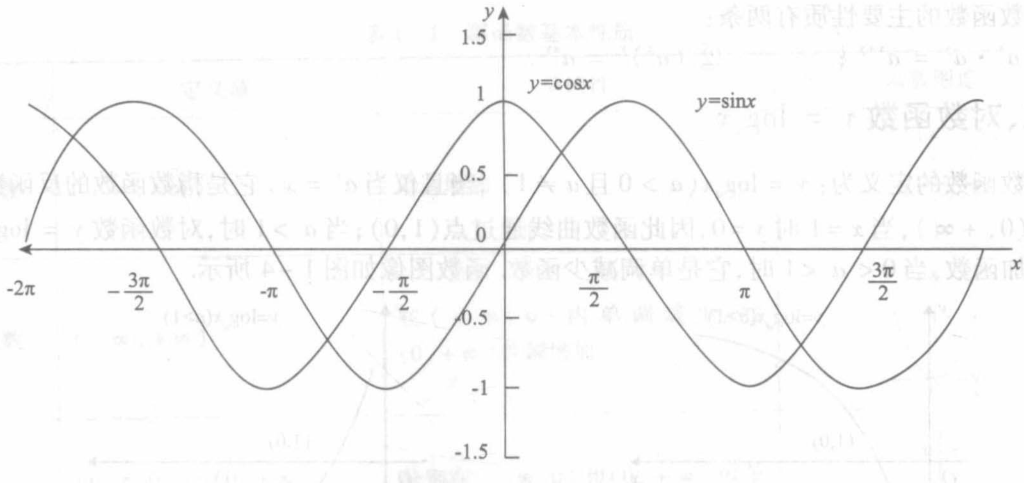


图 1－5　正弦函数与余弦函数图像

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

当 $x=y$，时

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

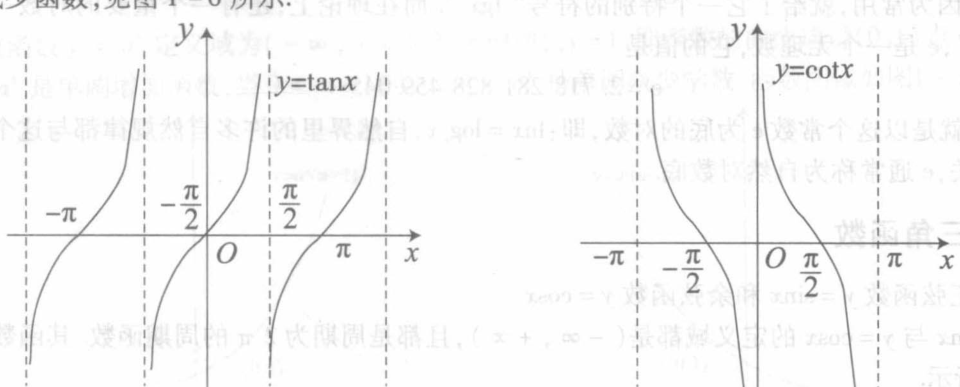
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(2) 正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$

正切函数和余切函数的定义为

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

显然，当 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，$y = \tan x$ 无定义；当 $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，$y = \cot x$ 无定义. 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y = \tan x$ 是单调增加函数；当 $x \in (0,\pi)$ 时，$y = \cot x$ 是单调减少函数，见图 1－6 所示.



(a) 正切函数图像　　(b) 余切函数图像

图 1－6　正切、余切函数图像

(3) 正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$

正割函数和余割函数定义为：$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

正割函数、余割函数与正切函数、余切函数有如下重要关系：

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

五、反三角函数

定义　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 若存在一个函数 $x = g(y)$，它的定义域为 R，值域为 D，对任意 $y_0 \in R$，存在一个 $x_0 = g(y_0) \in D$，且 $f(x_0) = y_0$，则称函数 $x = g(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

由于函数是两个变量之间相互变化关系的一种表达形式，与变量的符号无关，习惯上函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以函数 $y = f(x)$ 的反函数也表示为 $y = f^{-1}(x)$.

求解函数 $y = f(x)$ 的反函数，一般可以从函数的解析式 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$，然后将变量 x 与 y 交换就得反函数 $y = f^{-1}(x)$.

【例 1】　求函数 $y = \dfrac{x}{1+x}$ 的反函数.

解：由 $y = \dfrac{x}{1+x}$ 得

$$y(x+1) = x, x(y-1) = -y, x = \frac{y}{1-y}$$

交换变量 x 与 y，得 $y = \dfrac{x}{1+x}$ 的反函数为 $y = \dfrac{x}{1-x}$.

【例 2】　正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数在整个区间上是不存在的，选择它的一个单调区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，正弦函数 $y = \sin x$ 在这个区间上的反函数称为反正弦函数，记为 $y = \arcsin x$. 其他的反三角函数也有类似的情况，具体地列表如下：

函数	反函数	反函数定义域	反函数值域	单调性
$y = \sin x$ $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$	单调增加
$y = \cos x$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调减少
$y = \tan x$ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$	反正切函数 $y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$	单调增加
$y = \cot x$ $0 < x < \pi$	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0,\pi)$	单调减少

四个反三角函数的简单图像见图1－7所示.