



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

LYAPUNOV STABILITY THEOREM

Lyapunov 稳定性定理

刘培杰数学工作室 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

LYAPUNOV STABILITY THEOREM

Lyapunov 稳定性定理

刘培杰数学工作室



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了在数学和自动控制领域中一个重要的内容——李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性定理. 本书分别从线性动态系统的稳定性、常微分方程的稳定性等几方面详细介绍李雅普诺夫稳定性,并结合实例,使理论知识更易理解.

本书适合相关专业本科生、研究生及对此有兴趣的读者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Lyapunov 稳定性定理/刘培杰数学工作室编著. —
哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5816-1

I. ①L… II. ①刘… III. ①常微分方程—运动
稳定性理论 IV. ①O175.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 262242 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 李子江 聂兆慈

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 24.75 字数 276 千字

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5816-1

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 代 序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。

真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘。有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓。想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过。但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强。我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎
目

录

引言 从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起 // 1

第一章 稳定性 // 8

§ 1 李雅普诺夫定理 // 10

§ 2 离心调速器 // 24

§ 3 极限圈 // 32

§ 4 电子管振荡器 // 51

§ 5 二阶自治系统的平衡位置 // 60

§ 6 周期解的稳定性 // 82

第二章 线性动态系统的稳定性 // 100

§ 1 稳定的基本概念 // 100

§ 2 劳斯判据 // 107

§ 3 赫维茨判据 // 110

§ 4 稳定的频率判据 // 117

§ 5 米哈伊洛夫判据 // 119

§ 6 幅相稳定判据 // 126

- § 7 根据开周系统的倒幅相特性判别稳定性 // 132
- § 8 根据振幅和相角特性判别稳定性 // 133
- § 9 同数左侧根区域和稳定区域的划分 // 135
- § 10 在一个复参数平面中的稳定区域 // 140
- § 11 在两个参数的平面中作稳定区域 // 143
- § 12 维施聂格拉茨基问题 // 147

第三章 研究自动调整系统稳定性的例子 // 153

- § 1 单回路系统 // 153
- § 2 计算选定线路中元件的参数. 校验系统的稳定性(例) // 166
- § 3 一些镇定的方法 // 173
- § 4 直流随动系统的镇定(例) // 176
- § 5 一阶对象的直接调整 // 186
- § 6 具有一个自由度的对象和变速液力伺服马达的间接调整 // 191
- § 7 具有一个自由度的对象的恒行调整 // 197
- § 8 用频率特性来研究调整系统的例子——具有磁性放大器的自动驾驶仪组件 // 198
- § 9 有迟延的系统 // 202
- § 10 关于分布参数系统的稳定性分析 // 211

第四章 常微分方程的稳定性 // 218

- § 1 常微分方程方面的苏联学派 // 218
- § 2 解的解析表示(算法可解性问题) // 224
- § 3 微分方程解的渐近性 // 230
- § 4 连续延拓法(小参数法) // 241
- § 5 求周期解与殆周期解以及其他有界解的“小参数”法 // 245

§ 6 退化微分方程组 // 254

§ 7 李雅普诺夫稳定性 // 258

§ 8 存在定理及一般定性理论 // 271

§ 9 动力系统理论及常微分方程理论的其他推广 // 286

§ 10 振型耦合原理 // 293

第五章 中国学者对李雅普诺夫方法的若干改进
// 302

§ 1 关于李雅普诺夫方法的若干定理 // 302

§ 2 关于稳定性定理的一点补充 // 322

§ 3 微分方程渐近稳定性定理的推广及应用
// 327

§ 4 关于稳定性的几个基本定理 // 344

§ 5 两类稳定性定理的改进 // 356

编辑手记 // 364

从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起

引

言

据中国科技大学苏淳教授撰文介绍:

俄罗斯数学奥林匹克的举办经历了若干个不同的阶段. 在最早的年代里, 由于莫斯科的首都地位, 莫斯科数学奥林匹克与列宁格勒数学奥林匹克并列为苏联的两大数学竞赛, 竞赛组委会都是由当年苏联最著名的数学家组成的, 这些专家们不仅参与命题, 而且参与竞赛辅导, 一直保持着很高的学术水平. 1960 年莫斯科数学奥林匹克还一度成为全俄罗斯竞赛的替代品, 被称为“第 0 届全俄罗斯数学奥林匹克”. 在此之后, 莫斯科数学奥林匹克都兼具双重功能: 既是独立的数学竞赛, 又是全苏和全俄数学奥林匹克中的一轮比赛, 承担着选拔参加全苏和全俄竞赛的莫斯

科选手的功能. 这一状况到了第 72 届(2009 年)有所改变. 根据俄罗斯教育与科学部的决定, 莫斯科竞赛不再作为全俄竞赛的一个阶段. 这不能不说是莫斯科数学竞赛活动中的一个重大转折点.

完全独立后的莫斯科数学奥林匹克不仅没有退化, 相反地, 却是越办越好, 越办越出彩, 不仅题目出得越来越漂亮, 而且解答做得也越来越深刻. 它已经超越了为竞赛而竞赛的境界, 到达了让学生享受数学之美的层面, 学生参加这个竞赛完全是出于对数学的热爱. 因为它不再兼具选拔功能, 即使考了第一, 也不能取得参加全俄竞赛的决赛资格, 完全去除了功利色彩. 或许正因为如此, 它才有了昂首绽放的机会!

支撑着这个竞赛的不仅是莫斯科数学会, 不仅是莫斯科大学, 而且还有一个闻名遐迩的莫斯科不间断数学教育中心. 这个中心不仅为中学生开设讲座, 拥有自己的书店和出版社, 而且是莫斯科数学界精英们的聚会场所. 每当闲暇时光, 尤其是到了周末, 莫斯科的数学爱好者们纷纷云集这里, 开设讨论班, 毫无拘束地闲聊, 他们海阔天空地高谈阔论, 随心所欲地古道论今. 其中不乏争论, 不乏独到的见解, 一些极具创新性的想法便在这种争论之中涓涓流出. 他们不拘小节, 不拘形式, 就像一群数学疯子. 只要看看他们是如何布置餐厅的墙壁的, 就可以知道他们是何等热爱数学、何等痴迷数学了. 正是这样一批一心热爱数学的人引导了这样一个丝毫不带功利色彩的竞赛活动, 才使得它办得越来越精彩, 越来越生动活泼.

在 2010 年举行的第 73 届莫斯科数学奥林匹克的十一年级试题中有一道题如下:

【题目】 函数 f 使得每个(以坐标原点为起点的)空间向量 v 都对应一个数 $f(v)$, 并且对任何两个向量 u, v 和任何两个实数 α 与 β , 函数值 $f(\alpha u + \beta v)$ 至少不大于 $f(u)$ 与 $f(v)$ 中的一个. 试问, 这种函数 f 至多可能取多少个不同的值?

【解答】 满足题中条件的函数 f 最多可取 4 个不同的值.

先来依次证明, 题中所描述的函数 f 具有下述各种性质:

(1) f 在任何(经过点 O 的)直线上至多取两个不同的值. 事实上, 如果它在一条直线上的 3 个向量处取互不相同的值, 并且在向量 v 处的值最大, 在某个非零向量 u 处的值最小, 则对某个数 α , 我们得到如下矛盾

$$v = \alpha u \Rightarrow f(v) = f(\alpha u + 0u) \leq \max\{f(u), f(u)\} = f(u)$$

(2) f 在任何(经过点 O 的)平面上至多取三个不同的值. 事实上, 如果它在一个平面上的 4 个向量处取互不相同的值, 并且在向量 v 处的值最大, 在某两个不共线(根据前一条件, 可以找到这样两个)的向量 u_1 和 u_2 处取较小的值, 于是, 对任意两个实数 α_1 与 α_2 , 我们得到如下矛盾

$$\begin{aligned} v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 &\Rightarrow f(v) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \\ &\leq \max\{f(u_1), f(u_2)\} \end{aligned}$$

(3) f 在整个空间中至多取 4 个不同的值. 事实上, 如果它在 5 个向量处取互不相同的值, 并且在向量 v 处的值最大, 在某 3 个不共线(根据前一条件, 可以找到这样 3 个)的向量 u_1, u_2 和 u_3 处取较小的值, 于是, 对某 3 个实数 α_1, α_2 与 α_3 , 我们得到如下矛盾

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(\alpha_1 u_1 + (\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)) \\
 &\leq \max\{f(u_1), f(\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)\} \\
 &\leq \max\{f(u_1), \max\{f(u_2), f(u_3)\}\} \\
 &= \max\{f(u_1), f(u_2), f(u_3)\}
 \end{aligned}$$

下面再给出一个满足题中条件的函数 f 的例子, 它刚好取 4 个不同的值. 引入以 O 为原点的空间直角坐标系, 定义

$$v = (x, y, z) \Rightarrow f(v) = \begin{cases} 0, & x = y = z = 0 \\ 1, & x = y = 0 \neq z \\ 2, & x = 0 \neq y \\ 3, & 0 \neq x \end{cases}$$

本题中所涉及的函数产生于俄罗斯著名数学家李雅普诺夫(Lyapunov) 关于运动稳定性的研究: 向量 v 是形成 n 维空间(本题中为 3 维) 的线性系统的解, 而函数 f 的值则是它的李雅普诺夫指数.

此类函数满足本题中所陈述的不等式条件

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \max\{f(u), f(v)\}$$

因此可以推知, 在一个系统的解中不可能有多于 n 个不同的李雅普诺夫指数(不把根据定义等于 $-\infty$ 的非零解算作指数).

为了证明这一事实, 只需注意: 任意一条闭射线 $(-\infty, y]$ 在函数 f 之下, 在原空间中的逆象是一个线性子空间, 因此

$$f(u), f(v) \leq y \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) \leq y$$

这就意味着如果函数可取 $n+2$ 个不同值

$$y_0 < y_1 < \cdots < y_{n+1}$$

则与它们所代表的射线相应的逆象构成 $n+2$ 个维数递增的子空间

$$L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \cdots \subsetneq L_n \subsetneq L_{n+1}$$

从而与原空间是 n 维的事实相矛盾.

下面我们首先介绍一下李雅普诺夫,然后再介绍一下有关稳定性的理论.

李雅普诺夫(Ляпунов, Александр Михайлович)是俄国人. 1857年6月6日生于俄罗斯的雅罗斯拉夫. 其父是当地一所高级中学的校长,曾任喀山大学天文台负责人. 他从小就接受父亲给予的良好的科学启蒙教育. 但好景不长,7岁那年,其父双目失明,辞去公职,全家迁到其母的家乡西姆比尔斯克的乡村. 4年后,其父病故,李雅普诺夫被送到姑妈家抚养. 1870年全家又搬到下诺夫哥罗德,他也回到家里,插班进了当地中学的三年级,学习感到很轻松,于是读了大量的文学、历史和自然科学方面的作品. 1876年中学毕业时获金质奖章. 同年考入彼得堡大学数学物理系的数学专业. 1879年,其母去世,全家的生活负担就落到他身上,一面要为自己和弟弟的生计操劳,一面又要准备毕业论文. 其间完成了两篇论文,题为“重物在固定容器所盛重液体中的平衡问题”和“液体静压的势问题”,并于1881年发表在《俄国物理化学学会通讯》上. 1880年他以优异的成绩大学毕业,并留在该校力学教研室工作. 与此同时,他用两年时间学完了硕士课程,并于1884年完成了硕士论文,1885年通过答辩. 由于论文出色,不仅获硕士学位,而且同年被聘为该校讲师. 1885年秋,他应聘到哈尔科夫大学主持力学讲座,同时研究动力学系统的平衡形状的稳定性问题. 这是一个要根据微分方程组的结构来研究解的属性或确定曲线的分布状况的问题. 1888年他发表了题为“具有有