高等数学学习指导

供同步指导、训练与考研基础训练

郑州轻工业学院高等数学教研室 编著

高等教育出版社

高等数学学习指导

供同步指导、训练与考研基础训练

郑州轻工业学院高等数学教研室 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书为同济大学数学系编写的《高等数学》第七版的配套辅导教材，共分12章，章节的划分与该书完全一致。每章内容由六部分组成：基本概念、性质与结论；典型例题分析；疑难问题解答；同步训练；自测题；同步训练及自测题参考答案与提示。书末附有2018年全国硕士研究生招生考试数学试题及参考答案。

本书可作为高等工科院校“高等数学”课程的辅导读物，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步指导与训练教程，还可作为学生考研的系统复习与基础训练用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 ：供同步指导、训练与考研基础训练 / 郑州轻工业学院高等数学教研室编著．-- 北京 ：高等教育出版社，2015.9（2018.9重印）

ISBN 978-7-04-043702-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①郑… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第183366号

高等数学学习指导：供同步指导、训练与考研基础训练
GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO: GONG TONGBU ZHIDAO XUNLIAN YU KAOYAN JICHU XUNLIAN

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 余 杨 马敬茹
插图绘制 黄建英　责任校对 陈旭颖　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 高教社（天津）印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 25
字　　数 680千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年9月第1版
印　　次 2018年9月第2次印刷
定　　价 49.00元

物 料 号 43702-A0

前　言

本书为同济大学数学系编写的《高等数学》第七版的配套辅导教材，全书共分12章，章节的划分与同济大学第七版《高等数学》完全一致。每章内容由六部分组成：第一部分“基本概念、性质与结论”，主要对本章内容进行归纳，既简洁又翔实。第二部分“典型例题分析”，对每节的内容逐个知识点进行剖析，选编的例题题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目。第三部分“疑难问题解答”，对每个章节的疑难问题给出了详细的解答。第四部分“同步训练”，旨在帮助学生通过训练，巩固基础，掌握本节的基本知识、解题方法与技巧，其中带“*”的习题多为综合试题和近年来的考研试题，供学有余力和有志于考研的学生练习使用。第五部分“自测题”，重在覆盖面，基本涵盖了本章每一个知识点，难度略高于期中、期末考试题，这样有助于检验学生对本章内容的掌握情况，发现知识的缺陷，从而为完成全部课程的学习奠定基础。第六部分“同步训练及自测题参考答案与提示”，附有答案或提示，较难的试题给出了解题的思路及方法。书末附有2018年全国硕士研究生招生考试数学试题及参考答案，便于有志继续深造的同学同步完成考研备考，达到考研的能力和要求。

本书结构严谨，条理清晰，综合性强，并有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学。本书可作为综合大学，理工科大学，高等师范学校理、工、经各专业大学生学习“高等数学”课程的辅导读物和同步训练教程。对青年教师来说，本书是一本较好的教学参考书。对报考研究生招生考试的大学生来说，本书也是一本较好的系统复习用书和基础训练教程。

本书由王霞、张新敬、郭卫华主持编著，副主编有：黄守佳、职桂珍、黄士国、朱云、赵玲玲、周永安。在编著的过程中融入了编者许多近年来的教育教学研究成果，并博采众家之长，汲取了多本参考书的精华，在此向各位作者表示感谢。由于时间仓促，水平有限，不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正。

编　者

2018.05

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、基本概念、性质与结论

1. 函数

（1）概念

1）映射：满射、单射和双射；逆映射与复合映射.

2）函数、分段函数.

3）反函数、复合函数.

4）基本初等函数、初等函数.

（2）性质

1）有界函数 $f(x)$：$x\in X\subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$.

2）单调增加（或单调减少）函数 $f(x)$：$x_1,x_2\in X\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或}\ f(x_1)>f(x_2)).$$

3）奇函数（或偶函数）$f(x)$：$x\in D$，D 关于原点对称，$f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$）.

4）周期函数 $f(x)$：$x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$.

2. 极限

（1）概念

1）数列极限、函数极限.

2）无穷小、无穷大、无穷小的阶.

（2）性质与结论

1）收敛数列极限的唯一性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

2）收敛数列的有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

3）收敛数列的保号性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

4）收敛数列与其子数列间的关系：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

5）函数极限的唯一性：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么极限唯一.

6）函数极限的局部有界性：如果 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

7）函数极限的局部保号性：如果 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

如果 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$，且 $A\neq 0$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有

$|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$.

8）函数极限与数列极限的关系：如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

9）极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

10）夹逼准则：

① 数列形式：若 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

② 函数形式：若在 x_0 的某去心邻域（或 $|x|>M>0$）内，满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

11）单调有界数列必有极限.

（3）两个重要极限

1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

（4）无穷小的性质

1）有限个无穷小的和（或积）也是无穷小.

2）有界函数（或常数）与无穷小的乘积是无穷小.

3）无穷小（不为 0）的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

4）β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

5）若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

3. 函数的连续性

（1）概念

1）函数在 x_0 处连续的概念：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0\to0$ 时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

2）左、右连续与连续的关系：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

3）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续.

4）函数 $f(x)$ 的间断点的类型：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$

都存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点;不是第一类间断点的任何间断点,都称为第二类间断点.在第一类间断点中,左、右极限相等者称为可去间断点,不相等者称为跳跃间断点.无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

(2) 结论

1) 初等函数的连续性:基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

2) 闭区间上连续函数的性质:

① 最大值和最小值定理:在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值 M 和最小值 m.

② 有界性定理:在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

③ 零点定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

④ 介值定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,那么,对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

二、典型例题分析

1. 函数及其性质

例 1.1 (1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,求函数 $y=f(x^2-x-1)$ 的定义域;

(2) 已知 $f(x)=\sin x$,$f[g(x)]=1-x^2$,且 $|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,求 $g(x)$ 及其定义域.

解 (1) 因为 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,所以对于函数 $f(x^2-x-1)$ 应有 $-1\leqslant x^2-x-1\leqslant 1$,即有 $\begin{cases}x^2-x\geqslant 0,\\ x^2-x-2\leqslant 0.\end{cases}$ 解不等式得到 $\begin{cases}x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0,\\ -1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 故函数 $f(x^2-x-1)$ 的定义域为 $[-1,0]\cup[1,2]$.

(2) 由题设及复合函数的定义可得 $f[g(x)]=\sin[g(x)]=1-x^2$,且 $|g(x)|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,所以 $g(x)=\arcsin(1-x^2)$.

由 $|1-x^2|\leqslant 1$ 解得 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,故 $g(x)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

评注 求初等函数的定义域有以下原则:① 分式的分母不能为零;② 根式中负数不能开偶次方;③ 对数的真数不能为零和负数;④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$,$\tan x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$,$\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;⑤ 复合函数的定义域,通常将复合函数看成一系列初等函数的复合,然后考察每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式组,就可得到复合函数的定义域;⑥ 对于应用问题中的函数,其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 把下列函数分解为最简单的函数:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(2) $y=3^{\sin^2(1+x)}$.

解 由外向里进行分解:

（1）$y=\arcsin u, u=v^{-\frac{1}{2}}, v=1+x^2$.

（2）$y=3^u, u=v^2, v=\sin w, w=1+x$.

例 1.3　函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=1+e^x$ 能否构成复合函数？为什么？

解　两个函数能否构成复合函数，取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分.这里外层函数 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域为 $D_f=\{u \mid u\leqslant 1\}$，内层函数 $u=1+e^x$ 的值域为 $R_u=\{u \mid u>1\}$，由于交集为空集，即 $D_f\cap R_u=\varnothing$，所以函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=1+e^x$ 不能构成复合函数.

例 1.4　求 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<-1,\\ x^3+1, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-15, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

解　当 $x<-1$ 时，$y=1-x^2$，得 $x=-\sqrt{1-y}, y<0$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3+1$，得到 $x=\sqrt[3]{y-1}, 0\leqslant y\leqslant 9$.

当 $x>2$ 时，$y=12x-15$，得到 $x=\dfrac{y+15}{12}, y>9$.

所以反函数 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & x<0,\\ \sqrt[3]{x-1}, & 0\leqslant x\leqslant 9,\\ \dfrac{x+15}{12}, & x>9.\end{cases}$

评注　反函数的求解方法比较固定，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换自变量与因变量的位置，即得所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.对分段函数要注意所求函数表达式所在的区间.

例 1.5　讨论函数 $f(x)=\varphi(x)\cdot\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的奇偶性，其中 $\varphi(x)$ 为奇函数.

解　因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\varphi(-x)=-\dfrac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}\varphi(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\varphi(x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

例 1.6　设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意 x, y 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$，证明 $f(x)$ 为偶函数.

证　由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，用 $-y$ 代 y 得

$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y),$$

得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$，因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

评注　判定函数奇偶性的方法：

（1）根据奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质.如奇（或偶）函数的代数和仍为奇（或偶）函数；两个奇（或偶）函数的积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数等.

（2）证明 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$）.

例 1.7　设函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a, x=b\ (a<b)$ 均对称，证明 $y=f(x)$ 为周期函数.

证　由对称性可知 $f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)$，所以

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)$$
$$=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)],$$

所以 $f(x)$ 为周期函数，周期为 $T=2(b-a)$.

评注　判定函数 $f(x)$ 为周期函数的主要方法是：① 从定义出发，找到 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$；② 利用周期函数的运算性质证明.

2. 用定义证明极限

例 1.8　利用定义证明下列数列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5^n}\right)=1$；　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

证　（1）对于任给的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|1-\dfrac{1}{5^n}-1\right|=\dfrac{1}{5^n}<\varepsilon$，只要 $5^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可，两边取对数得

$$n\ln 5>\ln\frac{1}{\varepsilon}\text{，即 } n>-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 5}.$$

因此，对于任给的 $\varepsilon>0$（不妨设 $\varepsilon<1$），可取正整数 $N=\left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 5}\right]$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|1-\dfrac{1}{5^n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5^n}\right)=1$.

（2）对任给的 $\varepsilon>0$，为使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\frac{1}{2n^2}\leqslant\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

故取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

评注　用定义证明数列的极限时，关键是对任给的 $\varepsilon>0$，寻找 N，但不必找最小的 N，即 N 等于多少并不重要，重要的是是否存在 N. 找 N 的方法有两种（以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 为例）：

（1）直接解不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$，得 $n>\varphi(\varepsilon)$，取 $N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$（或 $N=[\varphi(\varepsilon)]$）.

（2）将 $|x_n-A|$ 适当放大，即 $|x_n-A|\leqslant\cdots\leqslant g(n)$（其中 $g(n)$ 为一个较简单的无穷小量），然后解不等式 $g(n)<\varepsilon$，得 $n>\varphi(\varepsilon)$，取 $N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$（或 $N=[\varphi(\varepsilon)]$）.

例 1.9　设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，

（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于 0.001.

解　（1）易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（2）对于 $\varepsilon=0.001$，由于 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$，所以只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon=0.001$ 即可. $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以

取　$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$.故当 $n>1\ 000$ 时,x_n 与 0 的差的绝对值小于 0.001.

评注　以下方法是错误的:

对任意 $\varepsilon>0$,$|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|<\varepsilon$,只要 $n>\dfrac{\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|}{\varepsilon}$,故取 $N=\left[\dfrac{\left|\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|}{\varepsilon}\right]$.

注意,N 不能与 n 有关.

例 1.10　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列选项中正确的是(　　).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散;　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界;

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小;　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

解　运用排除法,若令 $x_n=n$,$y_n=\dfrac{1}{n^2}$,则排除(A).

若令 $x_n=\begin{cases}0, n=2k+1,\\ n, n=2k,\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}n, n=2k+1,\\ 0, n=2k,\end{cases}$ 则排除(B).

若(C)成立,则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,但反过来却未必成立,例如若取 $x_n=\dfrac{1}{n^2}$,$y_n=n$,就有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则排除(C).

综上所述应选(D),若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,事实上,$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}\to 0\ (n\to\infty)$.

评注　解选择题切忌一一进行求证,应运用综合排除法、特殊值法、反证法等.

例 1.11　利用定义证明下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{3x+1}=\dfrac{1}{3}$.

证　(1) 考察 $|x^2-4|=|x-2||x+2|$,在 $x\to 2$ 的过程中,x 只在 2 附近取值,故可限制 $|x-2|<1$,于是 $1<x<3$,$|x+2|<5$,因此 $|x^2-4|=|x-2||x+2|<5|x-2|$.

对于任给的 $\varepsilon>0$,欲使 $|x^2-4|<\varepsilon$,只要 $5|x-2|<\varepsilon$,即 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$.取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有 $|x^2-4|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$,要证存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,有

$$\left|\frac{x+1}{3x+1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3|3x+1|}<\frac{1}{|3x+1|}\leqslant\frac{1}{3|x|-1}<\varepsilon,$$

只需 $|x|>\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right)$,取 $X=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right)$,则对任意 $\varepsilon>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $\left|\dfrac{x+1}{3x}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x+1}=\frac{1}{3}.$$

评注　证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$）的关键在于，对于任给的$\varepsilon>0$，找相应的$\delta>0$（或$X>0$），使得当$0<|x-x_0|<\delta$（或$|x|>X$）时，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立．因此找$\delta$（或$X$）时，一般从解$|f(x)-A|<\varepsilon$入手，尽量将上述不等式转化为关于$|x-x_0|$（或$|x|$）的不等式，将$|x-x_0|$（或$|x|$）视为未知数来解．注意切莫在解不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$的过程中，将$x$视为未知数来解，否则无法找到相应的$\delta$（或$X$）．

在上述(1)中，用了这样的手法：当$x\to x_0$时，可将x限制在x_0的一个邻域内，即限制x满足$|x-x_0|<r$（在(1)中$r=1$），在此限制条件下，就可推出$|f(x)-A|<c|x-x_0|$（其中c为某一确定的常数），于是由$c|x-x_0|<\varepsilon$，就可保证$|f(x)-A|<\varepsilon$．

3. 利用四则运算法则求极限

例 1.12　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n}-n]$；

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}$，其中$|a|<1$，$|b|<1$．

解　(1) 分子有理化，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=2.$$

(2) $$原式=\lim_{x\to1}\frac{x^n-1+x^{n-1}-1+\cdots+x^2-1+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right).$$

因为　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=n$，所以

$$原式=n+n-1+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(3) $$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(4) 由于积的极限等于极限的积这一法则只对有限个因子的积成立，因此，求解本题时，先用公式将其变形．由于

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$
$$=\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}),$$

当 $n\to\infty$ 时，$2^{n+1}\to+\infty$，而 $|a|<1$，故 $a^{2^{n+1}}\to0^+$，从而

$$原式=\frac{1}{1-a}.$$

(5) 由于分子、分母均为无穷多项的和，应当先求出其和，再求极限. 利用等比数列求和公式，有

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},\ 1+b+b^2+\cdots+b^{2n}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b},$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\Big/\frac{1-b^{2n+1}}{1-b}=\frac{1}{1-a}\Big/\frac{1}{1-b}=\frac{1-b}{1-a}.$$

评注　(1) 对于有理函数或无理函数的"$\frac{0}{0}$"型极限，可通过分解因式及分子或分母有理化析出并消去致零因子，化为定式求极限.

(2) 对于有理函数或无理函数及相应数列的"$\frac{\infty}{\infty}$"型极限，应采取"抓大放小"原则，关注分子、分母的最高次项. 当分子与分母次数相同时，极限为分子与分母最高次项的系数之商；当分子的次数低于分母的次数时极限为 0；当分子的次数高于分母的次数时极限为 ∞.

4. 利用"无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量"求极限

例 1.13　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cos\frac{1}{x+x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解　(1) 当 $x\to0$ 时，x 是无穷小量，虽然 $\cos\frac{1}{x+x^2}$ 的极限不存在，但因 $\left|\cos\frac{1}{x+x^2}\right|\leqslant1$，即它是有界的，因此

$$\lim_{x\to0}x\cdot\cos\frac{1}{x+x^2}=0.$$

(2) $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$.

因为 $\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant2$，故 $2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ 为有界函数，而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to0,x\to+\infty,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0,$$
因此
$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

评注　本题(1)易犯的错误是：

$$\lim_{x\to0}x\cdot\cos\frac{1}{x+x^2}=\lim_{x\to0}x\cdot\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x+x^2}=0,$$

错误在于，$\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x+x^2}$不存在，所以不能运用极限的四则运算法则.

5. 利用函数极限与数列极限的关系求极限

例 1.14　求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}$.

解　由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，取$x_n=\frac{1}{2^n}$，则$x_n\to0\ (n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

例 1.15　证明$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在.

证　取两个趋于0的数列，

$$x_n^{(1)}=\frac{1}{2n\pi},\ x_n^{(2)}=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},$$

则$n\to\infty$时，$x_n^{(1)}\to0$，$x_n^{(2)}\to0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0,\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}$，故$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$不存在.

例 1.16　证明$f(x)=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内无界，但当$x\to\infty$时，$f(x)$并不是无穷大.

证　$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界是指：对于任意$M>0$，总存在$x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得$|f(x_0)|>M$.

事实上，对任意$M>0$(设$M>1$)，取$x_0=2[M]\pi$，则$f|(x_0)|=2[M]\pi>M$，这说明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

当$x\to\infty$时，$f(x)$是无穷大是指：对任意$M>0$，总存在$Z_0>0$，使当$|x|>Z_0$时，恒有$|f(x)|>M$，因此当$x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大是指：存在$M>0$，使对于任意$Z_0>0$，总有x_0满足条件$|x_0|>Z_0$，但$|f(x_0)|\leqslant M$.

事实上，取 $M=1$，任意 $Z_0>0$（设 $Z_0>1$），记 $x_0=2[Z_0]\pi+\frac{\pi}{2}>Z_0$，而 $|f(x_0)|=0<1$，利用极限的归并性可将上述过程简化为：

取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，则 $f(x_n)=2n\pi\cos 2n\pi\to+\infty$；

取 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$，则 $f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\to 0$，

这说明 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 并不是无穷大。

评注 （1）为证明极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在，只要寻找两个趋于 a 的数列 $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})$ 即可。

（2）为证明 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时不是无穷大量，即证 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq\infty$，只要寻找一个趋于 a 的数列 x_n^*，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^*)\neq\infty$ 即可。

6. 利用极限存在的两个准则求极限

例 1.17 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

解 （1）因为 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+k\pi}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}\ (k=1,2,\cdots,n)$，

所以
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n\pi}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k\pi}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+\pi}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n\pi}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+\pi}}=1$，所以，原式 $=1$.

（2）因为
$$\frac{k}{n^2+n}\leqslant\frac{k}{n^2+k}\leqslant\frac{k}{n^2+1}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

所以
$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}$，所以，原式 $=\frac{1}{2}$.

评注 利用夹逼定理求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的要点是：将 x_n 适当放大及缩小，即找两个数列 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$，使 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 y_n 与 z_n 的极限都存在并且相等，即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

例 1.18 利用单调有界准则证明下列数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求极限值：

（1）设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0\ (n=1,2,\cdots)$；

（2）$x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$（$n=1,2,\cdots$）.

证　（1）显然 $x_n>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，即数列$\{x_n\}$有下界.

又因为 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，数列$\{x_n\}$单调减少，故由单调有界准则，知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ 两边令 $n\to\infty$，取极限得 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，解得 $A=\pm\sqrt{a}$（负值舍去），故得 $A=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

（2）先证数列$\{x_n\}$有上界.因为 $x_1=\sqrt{3}<3$，由数学归纳法，假设 $x_n<3$，则 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}<\sqrt{3+3}<3$，所以数列$\{x_n\}$有上界.

再证$\{x_n\}$单调.因为 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}$，则 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}>\sqrt{3+x_{n-1}}=x_n$，所以数列$\{x_n\}$为单调递增数列.

由单调递增有上界数列必有极限的准则知$\{x_n\}$的极限存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_n^2=3+x_{n-1}$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_{n-1})$，即 $A^2=3+A$，解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$（舍去），即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

评注　（1）在证明$\{x_n\}$单调有界时，常使用数学归纳法.

（2）为证明数列$\{x_n\}$单调，只需证 $x_{n+1}-x_n\geqslant 0$（或 $x_{n+1}-x_n\leqslant 0$），$n=1,2,\cdots$.

（3）证明了$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在后，为求此极限值 A，可在 x_n 的递推式的两端取极限，得关于 A 的方程，解方程即得极限值 A.

7. 利用两个重要极限和等价无穷小求极限

例 1.19　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$（$m,n$ 为正整数）；

（3）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x\cdot\sin x}{\pi-x}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解　（1）利用和差化积公式有

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}}{x^2},$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}=\frac{3}{2}.$$

（2）作变量替换，令 $t=x-\pi$，将 $x\to\pi$ 化为 $t\to 0$，得

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{\sin nt}$$

$$=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{nt}{\sin nt}\cdot\frac{m}{n}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x\cdot\sin(\pi-x)}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\tan x\cdot\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=0.$

(4) 当 $x=0$ 时,$\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1.$

当 $x\neq 0$ 时,化简

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}},$$

故原式$=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$

评注 利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$计算极限时,必须具备两个条件:① 给定的极限为"$\dfrac{0}{0}$"型;② 形如$\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x)\to 0)$.计算时把求极限算式凑成以上形式即得结果.

例 1.20 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+a)-\ln x]$ $(a>0)$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\arctan x}{x^2}\right)^x$.

解 (1) **解法一** 利用复合函数的连续性和重要极限.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a=\ln e^a=a.$$

解法二 利用等价无穷小代换.因为 $x\to+\infty$ 时,$\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)\sim\dfrac{a}{x}$,所以

$$原式=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{a}{x}=a.$$