21世纪高等学校规划教材

线性代数

刘树德 ◎ 主编
凌婷婷 丁伯伦 孙怡川 钟家伟 ◎ 副主编

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

21世纪高等学校规划教材

线性代数

刘树德 ◎ 主编
凌婷婷 丁伯伦 孙怡川 钟家伟 ◎ 副主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（C I P）数据

线性代数 / 刘树德主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2018.2
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-47472-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第001060号

内 容 提 要

本书从应用型本科学生的实际出发，采用学生易于接受的方式，以数学考研大纲中的线性代数编排为序，系统地介绍了线性代数的行列式、矩阵及其运算、n 维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容，并配备一定数量的习题。书末附有习题参考答案。

本书编写注重思路创新，内容新颖、简明扼要、通俗易懂，基本概念和基本方法讲述清楚，简化理论证明，以激发学生阅读兴趣，增强自主学习的效果。本书可作为高等院校工科类本科教材、教学参考书或考研复习用书。

◆ 主　　编　刘树德
副 主 编　凌婷婷　丁伯伦　孙怡川　钟家伟
责任编辑　李　召
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：8　　　　　　　2018 年 2 月第 1 版
字数：197 千字　　　2018 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：28.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言 Preface

本书是根据《教育部关于本科高校向应用型转变的指导意见》，参照《工科类本科数学基础课程教学基本要求》（修订稿），在我们多年来教学实践的基础上编写而成的，适合应用型本科院校各专业学生使用。

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性。我们从应用型本科学生的实际出发，在教材编写中注重三个原则，即教学内容按照“先易后难，循序渐进”的原则；基本理论贯彻“实用为主，必须和够用为度”的原则；基础知识遵循“广而不深，学以致用”的原则。全书从学生熟悉的、背景丰富的解线性方程组讲起，以数学考研大纲中的线性代数编排为序，采用学生易于接受的方式，系统地介绍了线性代数的行列式、矩阵及其运算、n 维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等内容，因此也可作为参加硕士研究生入学统一考试的参考书。

我们编写本教材有两个目的：一是使得教材内容更加切合应用型本科院校的实际；二是抛砖引玉，促进对教材、教法的讨论。我们认为，只有以学生为中心，以教师为辅导进行讨论式教学，教学才能生动活泼；也只有集思广益，教材才能不断完善。

我们在编写中遵循如下方针：博采众家之长，在学习中提高，从继承中创新。本书既汲取了国内、国外一些教材、论文中的有关内容，又加入了我们自己在教学实践中积累起来的点滴心得、经验。我们以为无论读书、教书、编书，都应持这种态度。

本书由刘树德担任主编，编写者分别为刘树德（第 1 章）、凌婷婷（第 2 章）、丁伯伦（第 3 章、第 4 章）、孙怡川（第 5 章）、钟家伟（第 6 章），最后由主编做了认真细致的修改并定稿。编写工作得到安徽信息工程学院领导的关心和教务处的支持，谨此致谢！

限于编者水平且编写的时间比较仓促，书中不妥甚至错误之处在所难免，敬请批评指正。

编　者

2018 年 1 月

目 录 Contents

第 1 章 行列式

第 2 章 矩阵及其运算

第 3 章 n 维向量与向量空间

第 4 章 线性方程组

第 5 章 矩阵的特征值与特征向量

行列式 第 1 章

行列式是人们用来求解线性代数方程组的一个基本工具。本章在讲述二、三阶行列式的基础上，给出一般 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，并介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

§1.1 引言

1. 二阶行列式

求解线性方程组是代数学中的一个基本问题. 例如解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两边，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1.1）有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为使解的表达式简明，引入如下记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

并称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**.

数 $a_{ij}(i=1，2；j=1，2)$ 称为行列式（1.3）的**元素**或**元**. 元素的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式（1.3）的 $(i，j)$ **元**.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆. 把 a_{11} 到 a_{22} 的实联线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚联线称为**副对角线**，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式（1.2）可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组（1.1）的系数所确定的二阶行列式（称系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7,$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-7}{7} = -1.$$

2. 三阶行列式

类似地，用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

为使解的表达式简明，引入**三阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

并定义

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

从上式看出，三阶行列式（1.5）含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再

冠以正负号，其规律如图 1-1 所示的对角线法则。

图 1-1 中有三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号.

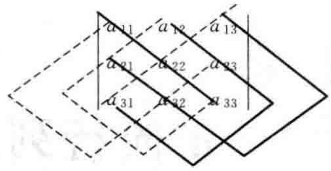

图 1-1

运用消元法解方程组（1.4）可知，当（1.5）中 $D\neq 0$ 时，方程组（1.4）有唯一解

$$x_i=\frac{D_i}{D}(i=1,\ 2,\ 3),$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

例 2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1,\\ -2x_1+2x_2+x_3=0,\\ -3x_1+4x_2-2x_3=0.\end{cases} \tag{1.7}$$

解 容易算出

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-14\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{vmatrix}=-8,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4\\ -2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & -2\end{vmatrix}=-7,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

所以方程组（1.7）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{4}{7},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{7}.$$

例 3 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & x+1 & 3\\ 1 & 2 & x+1\end{vmatrix}=0.$$

解 方程左边的三阶行列式

$$\begin{aligned} D&=(x+1)^2+6+6-3(x+1)-6-2(x+1)\\ &=x^2-3x+2,\end{aligned}$$

由

$$x^2-3x+2=0$$

解得

$$x=1 \quad 或 \quad x=2.$$

§1.2 n 阶行列式

为了研究 n 阶行列式，需要用到 n 阶排列及其逆序数的概念.

定义 1.2.1 由正整数 1，2，…，n 组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n **阶排列**（简称**排列**）.

例如，4231 是一个 4 阶排列，31524 是一个 5 阶排列.

定义 1.2.2 在一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果较大的数 j_s 排在较小的数 j_t 前面，则称 j_s 与 j_t 构成一个**逆序**. 一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如 $\tau(4231)=5$，$\tau(31524)=4$，故排列 4231 是奇排列，31524 是偶排列.

定义 1.2.3 把一个排列中某两个数的位置互换，其余的数位置不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一次**对换**.

定理 1.2.1 任意一个排列经过一次对换改变其奇偶性.

注：定理 1.2.1 的证明参阅参考文献 [1]. 本书凡未做证明的定理均可查阅书末所附参考文献。

例如，31524 是偶排列，经过 1 和 4 对换，得到排列 34521. 由于 $\tau(34521)=7$，故排列 34521 是奇排列.

定理 1.2.2 任意一个 n 阶排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

例如，三阶行列式的一般项可以写为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 j_1，j_2，j_3 是 1，2，3 的一个排列，不同排列总数为 6 个，对应定义式（1.6）中的 6 项，当 j_1，j_2，j_3 是偶排列时，对应的项在（1.6）中带正号，当 j_1，j_2，j_3 是奇排列时，对应的项带负号. 二阶行列式显然也有类似结论. 一般地，给出如下 n 阶行列式的定义.

定义 1.2.4 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.8}$$

其中 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式中取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，按行标排成自然顺

序，列标是一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$，$\tau=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

n 阶行列式通常简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为该行列式的 (i,j) 元.

注意到，数的乘法是交换的，也可以将（1.8）中 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 按列标排成自然顺序，行标是一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 而改写为 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，并且由定理 1.2.2 知 $\tau=\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 因此 n 阶行列式（1.8）也可以按列标自然顺序写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.9}$$

例 1 计算对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素都是 0.

解 行列式中第一行的元素除去位于第一列的 a_{11} 外全为零，第二行的元素除去位于第二列的 a_{22} 外全为零……第 n 行的元素除去位于第 n 列的 a_{nn} 外全为零. 因此，行列式中的项除了 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外，其余的项全为 0. 由于列标排列 $12\cdots n$ 为自然顺序，逆序数为 0，故对角行列式 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

类似得出

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按列标排列为自然顺序分析如下，并算出各项行标排列的逆序数：

$$
-1 \to \left\langle \begin{array}{l} 1 \to \left\langle \begin{array}{ll} 3 \to -1 & \tau(2134)=1, \\ 1 \to -2 & \tau(2143)=2, \end{array} \right. \\ 3 \to \left\langle \begin{array}{ll} 2 \to -2 & \tau(2413)=3, \\ 3 \to -1 & \tau(2431)=4, \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

因此

$$D=-3+2-12+9=-4.$$

§1.3 行列式的性质

把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的行与列互换得到

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 根据转置行列式的定义，行列式 D^{T} 的 (j, i) 元是行列式 D 的 (i, j) 元 a_{ij}，因此行列式 D^{T} 按式 (1.9) 展开就等于行列式 D 按式 (1.8) 展开，即

$$D^{\mathrm{T}} \overset{(1.9)}{=} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \overset{(1.8)}{=} D.$$

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立. 因此下面行列式的性质只对行讨论，对行作运算意味着对该行中所有的元素作此运算.

性质 2 以数 k 乘行列式中某一行，等于用数 k 乘此行列式.

证 设 $D=\det(a_{ij})$，以数 k 乘 D 的第 i 行，按式 (1.8) 展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=kD.$$

令 $k=0$，就有

推论 如果行列式中一行为零，则此行列式等于零.

性质 3 设 $D=\det(a_{ij})$，其中第 i 行是两组数之和：$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1, 2, \cdots n)$，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 D 等于如下两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{i1}&c_{i2}&\cdots&c_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots(c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{i1}&c_{i2}&\cdots&c_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

容易证明

性质 4 互换行列式中的两行，行列式反号.

性质 5 如果行列式中两行成比例，则此行列式等于零.

利用性质 3 和性质 5 推出

性质 6 把行列式中某一行的倍数加到另一行，行列式不变.

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{k1} & ca_{k2} & \cdots & ca_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用行列式的性质可以简化行列式的计算. 例如，运用性质 2、4、6 容易把行列式化为上三角形行列式，从而算出行列式的值.

例 1 计算 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -14 & 8 & -13 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&-14&8&-13\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&15&-20\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&3&2&-1\\0&2&-1&1\\0&0&-10&8\\0&0&-20&15\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2&-1\\0&2&-1&1\\0&0&-10&8\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=20.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 将第 2，3，…，n 列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a+(n-1)b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 3 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解 从第 4 行开始，后行减前行，得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$
$$=a^4.$$

例 4 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}\text{(已知 } abcd=1\text{)}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$
$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=0.$$

为了叙述简捷，以 r_k 表示行列式的第 k 行，c_k 表示第 k 列.

交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

交换 i，j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$；

第 i 行（列）乘以 k，记作 $r_i \times k$（$c_i \times k$）；

第 i 行（列）提出公因子 k，记作 $r_i \div k$（$c_i \div k$）；

以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j$（$c_i + kc_j$）.

例 5 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$.

证 对 D_1 作运算 $r_i + \lambda r_j$，把 D_1 化为下三角形行列式，设为

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk},$$

对 D_2 作运算 $c_i + \lambda c_j$，把 D_2 化为下三角形行列式，设为

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

于是对 D 的前 k 行作运算 $r_i + \lambda r_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + \lambda c_j$，把 D 化为

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故

$$D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$$