西安交通大學

研究生创新教育系列教材

高等计算力学

李录贤 编

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學 研究生创新教育系列教材

高等计算力学

李录贤 编

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材围绕固体力学中的结构分析问题，讲解利用有限元方法进行非线性分析的理论和方法，内容主要包括线性有限元方法基础、弹塑性分析、大变形分析以及接触分析等三类典型非线性问题的有限元求解。此外，对扩展有限元法和广义有限元法两类有限元方法的最新发展、求解无界域问题的无限元方法以及基于结点的数值方法——无网格方法——也进行了介绍。还以附录形式给出了两种线性互补问题的求解方法。

本教材可作为工学学科研究生学习之用，也可作为相关领域研究人员和工程技术人员工作中的辅助参考材料。

图书在版编目(CIP)数据

高等计算力学/李录贤编. —西安:西安交通大学出版社,2017.6

西安交通大学研究生创新教育系列教材

ISBN 978-7-5605-9880-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①计算力学-高等学校-教材

Ⅳ.①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168552 号

书　　名　高等计算力学

编　　者　李录贤

责任编辑　刘雅洁

出版发行　西安交通大学出版社

（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）

网　　址　http://www.xjtupress.com

电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)

(029)82668315　82669096(总编办)

传　　真　(029)82668280

印　　刷　陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　**印张** 12.125　**字数** 217 千字

版次印次　2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5605-9880-2

定　　价　38.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系调换。

订购热线:(029)82665248　(029)82665249

投稿热线:(029)82665640

读者信箱:lg.book@163.com

总 序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法；把以教师为中心的教学模式转变为以学生为中心、教师为主导的教学模式；把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，也是一项艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前言

本书围绕固体力学中的材料与结构分析问题，主要讲解利用有限元方法进行非线性分析的理论和方法，并对近年来数值方法的主要进展进行了较为全面的介绍，内容共分为7章。第1章介绍线性有限元方法，包括线性本构关系、线性几何关系、平衡方程、变分原理，以及有限单元形状函数构造的研究内容及发展，是后续章节的预备知识；第1至5节是本章重点，6至8节是相关内容的延伸，可选择学习。第2章以弹塑性问题为例，介绍材料(物理)非线性问题的有限元方法，包括材料的塑性行为、塑性本构关系及有限元方程的形成与求解方法。第3章介绍大变形(几何非线性)问题的有限元方法，包括大变形情形下的应变与应力描述、全拉格朗日(TL)增量法和修正拉格朗日(UL)增量法，以及大变形分析中的本构关系及载荷处理等实施细节。第4章以接触问题为例，介绍边界非线性问题的有限元方法，涉及接触问题求解的经典方法和数学规划方法。第5章至第7章，属于与有限元方法相关的专题讨论。第5章介绍有限元方法研究的最新进展和研究成果，包括扩展有限元法和广义有限元法，它们都是常规有限元方法的延伸，可在较简单、规则、粗糙的网格上对具有复杂细节的结构进行高效高精度数值计算，是有限元方法的主要最新发展。第6章介绍求解无界域问题的无限元方法，它是有限元方法的有效补充，二者可实现无缝对接。第7章主要从插值逼近角度，简单介绍基于结点的数值方法——无网格方法，该法在构造逼近时不需要引入单元的概念，因而克服了有限元方法由于单元存在所具有的局限。最后，以附录形式，给出了第4章中涉及的两种线性互补问题的求解方法。

计算科学与技术在硬件和软件方面的飞跃式发展，为计算力学的研究和应用提供了良好的外部环境和充足的内部动力。特别是有限元方法的诞生，大大提升了计算力学在各个领域科学计算和工程应用中的重要性。目前，计算力学的发展反映出多学科交叉的特点，形成了计算物理、计算化学、计算材料学、计算数学、计算声学等多种新型学科，以解决诸如多物理场、多尺度与跨尺度的大规模科学和工程问题。在计算方法上，目前出现了多尺度计算方法、生物工程计算方法、纳米材料计算方法、结构与多学科优化设计、智能材料多场耦合计算方法、计算动力学与控制数值分析方法、高性能计算、新型有限元方法、无网格(单元)方法、覆盖数值方法以及无限元方法等，都各具特色。

本书以编者1997年以来承担的力学学科研究生专业学位课“高等计算力学”讲义为基础，以对力学学科硕士研究生和博士研究生的讲授实践和学生的实际效果反馈为依据，考虑到他们的知识和工作背景跨度较大，结合近几年计算力学学科的最新研究成果和发展现状，经进一步修改、补充和完善而成。注重调动学生的学习积极性和能动性是本书的主要特点；拟通过课堂讲解和对教材的自学，使力学学科研究生的计算力学知识得到有效提升，使非力学学科研究生能够获得所需的计算力学方面的知识，拓宽他们的视野，为跨学科的研究工作和今后的实际工作奠定基础，力争培养出适应快速知识更迭的创新型人才。

本书在定义教材中涉及的重要概念时，力求简单、清晰，准确反映概念本身的物理含义和概念间的本质差异；而对较基本的概念，并没有一一介绍，以保证做为研究生教材的完整性。在保证数学推理严密的条件下，力求避免繁冗的数学推导与表达形式：一方面以简单易懂的方式导出结果；另一方面，在数学表达上以更合理的形式体现出所具有的特点或特征。

计算力学离不开具体的方法实施，由于本教材主要面向研究生，因而，对业已成熟或熟知的方法不再花费或尽量少花篇幅介绍，而是针对所讨论的大类问题，如弹塑性、大变形或接触等，在方法叙述上强调各自的独特性。

本书力求运用当前编者所能掌握的最新知识，及时介绍相应方向的研究现状与发展趋势。

本书不仅面向力学学科的研究生，还将适用领域刻意向其他非力学的机、电等工学学科偏斜。拟适用的学科包括航天航空、材料、机械工程、能源与动力工程、微电子工程等。

由于编者水平所限，特别是对其中涉及的各个专题不是都做过较深入的研究，在内容上难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

特别说明的是，本书第1、2、4章的部分内容，由于相对经典和成熟，主要参照何君毅、林祥都编著的《工程结构非线性问题的数值解法》而成。编者2006年10月在上海的CAE发展论坛上有幸结识何老师并交流了一些看法，并承蒙以原作相送，再次对两位前辈致以诚挚的感谢。第3、4章的部分内容，是在编者的博士论文相关章节及相应参考文献基础上，经修改而成。第5章和第6章，是在编者发表的相关综述性文章基础上，经修改而成。第7章的无网格方法简介，是为了保持本书内容的完整性而编入的，以Belytschko等综述性文章（Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 3－47）的前言和第二节为蓝本编写而成，在此予以说明，并对原作者表示感谢。编者还感谢所有参考文献的作者，正因为有他们的先期工作做铺垫，才使本书得以顺利完稿。由于原讲义前后已历经十余年时间，有部分

参考文献难以查证，除了对这些作者表示感谢之外，还深表歉意。另外，考虑到教材的特点及内容的完整性，所引参考文献没有在文中的相应地方列出，而是以先中文后英文、依作者姓名字母顺序，全部列在各章末尾。

本书从立意、策划开始，到编写、完稿的整个过程，王铁军教授都提出了许多宝贵的建设性建议，并通过他主持的多个项目、以多种渠道对该教材的编写给予了大力支持。值此，对王铁军教授予以特别感谢。

本教材得到西安交通大学“985 工程”二期建设研究生教学平台建设项目的资助，得到国家自然科学基金(11672221，11272245，10972172，10572109，10472090，11321062，11021202)和教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0930)的资助。

编 者

2016 年 8 月于西安

目　录

第 1 章 有限元方法基础

1.1 引言

在科学计算和工程应用中已研制出许许多多的有限元商用软件，如 ANSYS、ABAQUS、MSC NASTRAN，还有早先的 SAP 和 ADINA 等。它们在处理具体问题时，一般经过三个主要步骤：①建立分析模型，即根据问题种类和结构的几何特征，选取单元类型；②施加边界条件，包括强制边界条件和自然边界条件，前者即通常所说的位移边界条件，后者即用来计算等效外加载荷的力边界条件；③方程的求解，根据问题的种类是线性还是非线性的，以及规模大小，选择恰当方法，以高效高精度地求解有限元方程。其余则全固化在软件中，对用户而言是个黑箱。

大量商用有限元软件的出现，充分说明了有限元方法的普及和被认可程度。虽然从这些软件的手册中也可点滴了解有限元方法的基本理论，但对于相关研究人员而言，这些知识显然是不够的；对软件做二次开发的工程人员，也需要更多的有限元知识。

本章以固体的弹性静力学为例，介绍线性有限元方程建立过程中的关键环节，这些内容是以后章节的基础知识。

1.2 线性本构关系

固体材料的线性本构关系符合广义胡克(Hooke)定律，其张量形式的表达式为

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

其中，σ_{ij} 为二阶的应力张量；ε_{ij} 为二阶的应变张量；D_{ijkl} 为四阶的胡克弹性张量；下标 i、j、k、l 在三维问题中从 1～3 取值，在二维问题中从 1～2 取值。

对于各向同性材料，胡克弹性张量 D_{ijkl} 的 3×3×3×3=81 个元素可由 2 个独立的材料参数予以表示。这两个材料参数一般取为杨氏模量(Young's Modulus) E 及泊松比(Poisson Ratio) ν，或者体积模量 K(Bulk Modulus)及剪切模量 G(Shear Modulus)，或者拉梅常数(Lame Constants) λ 及 μ。

由于 σ_{ij} 和 ε_{ij} 均为对称的二阶张量，各有 6 个独立的分量，因而分别可用列阵

形式表示为

$$\begin{cases}\{\sigma\}^{\mathrm{T}} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}\}^{\mathrm{T}} \\ \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}\}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{1.2}$$

则(1.1)式不难写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1.3}$$

值得注意,(1.2)的两式在形式上有所不同。这种形式,一方面可保证(1.3)式中弹性矩阵$[D]$(6×6)是对称的,对于有限元方法,这一特性至关重要;另一方面,二者乘积就是应变能密度,具有明确的物理含义。

值得一提的是,有些学者将(1.2)式表示成应力和应变9个分量的列阵形式,相应地,(1.3)式中的弹性矩阵$[D]$就成为一个9×9的方阵。这种记号的优点是较易与张量形式对应,便于在应力、应变张量不对称的物理问题中应用;缺点是对占大多数的应力、应变张量对称的问题,形式不够简洁。

本章中,花括号{}表示列阵,方括号[]表示一般矩阵,上标T表示它们的转置(Transpose)。

实际上,胡克定律可用拉梅常数表示为

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.4}$$

其中,拉梅常数λ及μ与杨氏模量E及泊松比ν的关系为

$$\begin{cases}\lambda = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu)) \\ \mu = E/(2(1+\nu))\end{cases} \tag{1.5}$$

(1.4)式的逆形式为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

在塑性力学中,将上式表示成偏量形式使用起来会更方便。注意到平均正应变ε_{m}和平均正应力(或称八面体正应力)σ_{m}被分别定义为

$$\begin{cases}\varepsilon_{\mathrm{m}} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 \\ \sigma_{\mathrm{m}} = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3\end{cases} \tag{1.7}$$

应力偏量张量和应变偏量张量被定义为

$$\begin{cases}e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{\mathrm{m}}\delta_{ij} \\ S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{\mathrm{m}}\delta_{ij}\end{cases} \tag{1.8}$$

(1.6)式又可表示为

$$\begin{cases}\varepsilon_{\mathrm{m}} = \sigma_{\mathrm{m}}/(3K) \\ e_{ij} = S_{ij}/(2G)\end{cases} \tag{1.9}$$

K和G分别为体积模量和剪切模量,用E和ν可表示为

$$\begin{cases} K = E/(3(1-2\nu)) \\ G = E/(2(1+\nu)) \end{cases} \tag{1.10}$$

以上三维本构关系经适当变化可退化成平面应变、平面应力及轴对称情形。

需要说明的是，在工程中一般多采用体积应变 $\theta = 3\varepsilon_m$ 代替平均应变 ε_m，此时，(1.9)式在形式上需做相应的调整。

1.3　几何关系

张量形式的应变定义为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.11}$$

其中，“,”号后面的下标表示对该坐标分量求导。

若采用(1.2)之二式 ε_{ij} 的列阵形式，(1.11)式可表示成下列矩阵形式

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \tag{1.12}$$

易得矩阵[B]的显式为

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & & \\ & \partial/\partial y & \\ & & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & \\ & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

[B]称为应变-位移关系矩阵，它是一个微分算子矩阵。在有限元方法中，单元内的位移场可通过单元结点位移 q 和单元形状函数 N 插值为

$$\{u\} = [N]\{q\} \tag{1.14}$$

因而，[B]矩阵中的微分算子实际上作用于它后面紧跟的单元形状函数。这样，为了数学上更严格，在以后的有限元方程中，[B]矩阵经常以[B][N]的形式出现。

当然，与胡克弹性矩阵[D]一样，[B]矩阵的具体形式依问题类型而异。

1.4　控制方程

微分形式的弹性静力学平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{1.15}$$

其中，b_i 为体积力。上式用列阵形式表示即为

$$[B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} + \{b\} = 0 \tag{1.16}$$

弹性力学边值问题的边界条件分为两种：一种是自然（非本质）边界条件，即面力边界条件，可以表示为

$$\sigma_{ij} n_j - t_{ei} = 0, \quad 在 S_\sigma 上 \tag{1.17}$$

其中，S_σ 为受力作用的边界；t_{ei} 为给定表面力。借用（1.16）式的记号，（1.17）式可重写为

$$[T]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} - \{t_{\mathrm{e}}\} = 0 \tag{1.18}$$

$[T]$在形式上与$[B]$相似，只是将其中的$\partial/\partial x$、$\partial/\partial y$ 和$\partial/\partial z$ 分别换成方向余弦 n_x、n_y 和 n_z 即可。

另一种是强制（本质）边界条件，即位移边界条件，可以表示为

$$u_i - u_{i0} = 0, \quad 在 S_u 上 \tag{1.19}$$

其中，S_u 为受位移约束的边界；u_{i0} 为给定位移。

数值方法一般将平衡方程的强（微分）形式（1.15）式变成积分意义上的弱（积分）形式来求解。下面介绍固体力学有限元方法中常用的几种弱形式。

1.4.1 虚功原理

虚功原理认为，一个处于平衡的物体，对于任意满足位移边界条件的虚位移，其外力虚功等于物体应力在虚应变上产生的虚变形能，用数学表达即为

$$\int_V \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \,\mathrm{d}V = \int_V b_i \delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} t_{ei} \delta u_i \,\mathrm{d}S \tag{1.20}$$

其中，V 为物体的体积；δu_i 和 $\delta\varepsilon_{ij}$ 为虚位移及由此产生的虚应变。上式写成列向量形式为

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V = \int_V \delta\{u\}^{\mathrm{T}}\{b\}\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \delta\{u\}^{\mathrm{T}}\{t_{\mathrm{e}}\}\mathrm{d}S \tag{1.21}$$

1.4.2 势能原理

势能原理认为，对于一个处于平衡的物体，在满足几何关系（1.12）式及位移边界条件（1.19）式的所有位移中，真实解使物体的总势能取最小值。

变形体的总势能为

$$\Pi = U - W \tag{1.22}$$

这样，势能原理的数学表达为

$$\delta\Pi \triangleq \delta U - \delta W = 0 \tag{1.23}$$

其中

$$\begin{cases} U = \displaystyle\int_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \\ W = \displaystyle\int_V b_i u_i \,\mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} t_{ei} u_i \,\mathrm{d}S \end{cases} \tag{1.24}$$

虚功原理和势能原理实际上是从不同角度描述同一种物理规律。

1.4.3 广义变分原理

虚功原理和势能原理都属于仅以位移作为基本求解变量的位移法。这种单一位移法，仅能保证位移有足够的精度，而对诸如应力、应变等物理量的计算精度则较低。

为了克服位移法有限元的上述不足，先后出现了混合法和杂交法。混合法中基本求解变量不仅含有位移，还含有应力或结点内力等；而杂交法虽然基本求解变量仍为位移，但此时位移除了遵守边界约束外，还须受单元边界上的应力/应变的约束。这些方法的有限元方程建立，从数学角度来看是泛函的约束极值问题，从力学角度称为广义变分原理。

1. 胡海昌-鹫津(HW)变分原理

若视 ε、σ 和 u 都为基本独立变量，其对应的广义变分原理称为胡海昌-鹫津(Hu-Washizu，HW)变分原理，其广义泛函的形式为

$$\Pi(\varepsilon,\sigma,u)=\int_V\left(\{\sigma\}^{\mathrm{T}}([B]\{u\}-\{\varepsilon\})+\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon\}\right)\mathrm{d}V$$
$$-\int_V\{b\}^{\mathrm{T}}\{u\}\mathrm{d}V-\int_S\{t_{\mathrm{e}}\}^{\mathrm{T}}\{u\}\mathrm{d}S \tag{1.25}$$

上式右端第一项对 u 变分，并应用分部积分可得到

$$\int_V\{\sigma\}^{\mathrm{T}}[B]\{\delta u\}\mathrm{d}V=\int_{S_\sigma}\delta\{u\}^{\mathrm{T}}\{t\}\mathrm{d}S-\int_V\delta\{u\}^{\mathrm{T}}[B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\mathrm{d}V \tag{1.26}$$

其中，$\{t\}$ 为应力在表面的合成，表达式为

$$t_i=\sigma_{ij}n_j \tag{1.27}$$

于是，(1.25)式经对各宗量(即 ε、σ 和 u)施以变分成为

$$\delta\Pi(\varepsilon,\sigma,u)=\int_V\delta\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}([D]\{\varepsilon\}-\{\sigma\})\mathrm{d}V+\int_V\delta\{\sigma\}^{\mathrm{T}}([B]\{u\}-\{\varepsilon\})\mathrm{d}V$$
$$-\int_V\delta\{u\}^{\mathrm{T}}([B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}+\{b\})\mathrm{d}V+\int_{S_\sigma}\delta\{u\}^{\mathrm{T}}(\{t\}-\{t_{\mathrm{e}}\})\mathrm{d}S \tag{1.28}$$

与(1.23)式比较发现，HW 变分原理的第一项描述弹性本构关系(1.3)式；第二项描述几何关系(1.12)式；第三项描述微分形式的平衡方程(1.16)式；第四项表示力的边界条件，即自然边界条件。

实际上，广义变分原理都必须能够描述这四种形式的关系或条件。它们的恰当形式也都是通过引入拉格朗日(Lagrange)乘子(简称拉氏乘子)，解除以上四种关系或条件的约束，最终识别拉氏乘子而获得的。

对实际问题，同时使用 ε、σ 和 u 三个作为基本变量必要性不大，一般来说，本构方程容易满足，因此，可以将其做精确处理。如果将 σ 用本构关系表示，那么，(1.28)式变成下列修正的 HW 变分原理

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi(u,\varepsilon) = & \int_V \delta\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}([D][B]\{u\} - [D]\{\varepsilon\})\mathrm{d}V \\
& - \int_V \delta\{u\}^{\mathrm{T}}([B]^{\mathrm{T}}[D]\{\varepsilon\} + \{b\})\mathrm{d}V \\
& + \int_{S_\sigma} \delta\{u\}^{\mathrm{T}}(\{t\} - \{t_e\})\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

根据上式，可导出位移杂交模型。

2. 赫林格-赖斯纳(HR)变分原理

如果使用应力 σ 和位移 u 为基本变量，而 ε 由本构方程给出，那么(1.28)式变为

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi(u,\sigma) = & \int_V \delta\{\sigma\}^{\mathrm{T}}([B]\{u\} - [D]^{-1}\{\sigma\})\mathrm{d}V \\
& - \int_V \delta\{u\}^{\mathrm{T}}([B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\} + \{b\})\mathrm{d}V \\
& + \int_{S_\sigma} \delta\{u\}^{\mathrm{T}}(\{t\} - \{t_e\})\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

上式即著名的赫林格-赖斯纳(Hellinger-Reissner，HR)变分原理，它是由位移与应力(或等价内力)为基本变量的混合模型。当然，可利用本构关系和几何关系消去应力，得到类似位移法的变分原理。另外，利用 HR 变分原理，在接触问题中可得到混合型接触控制方程。

需要注意的是，由于位移也是这两种广义变分原理的基本变量之一，因而，这里认为位移约束可以精确满足，故去除了位移约束部分对广义泛函的贡献。

1.4.4 余能原理

以上讨论的变分原理的基本变量中都含有位移，因此是以势能为基础的。若以结构的内力或应力为基本变量，而视位移为因变量，那么构成的变形能则称余能，得到相应的余能原理。

余能原理认为，对于一个处于平衡的物体，满足几何关系(1.12)式和应力边界条件(1.18)式的所有力和应力中，真实解使余能取最小值。

用数学表达为

$$
\delta\Pi_c \triangleq \delta U_c - \delta W_c = 0 \tag{1.31}
$$

其中，虚余变形能 U_c 和虚外载余能 W_c 分别由下式给出