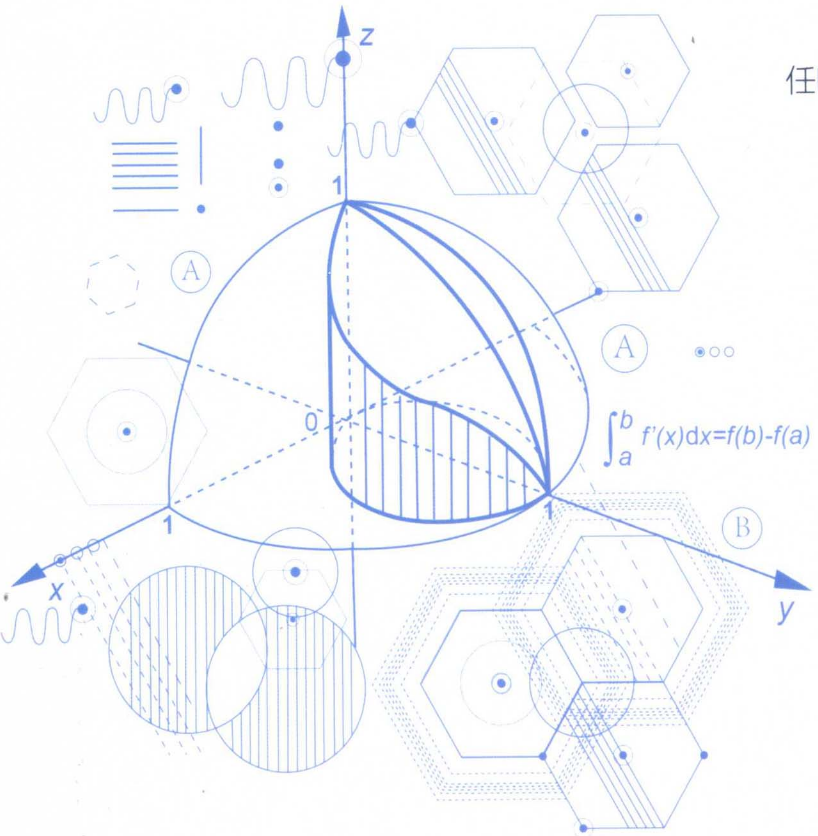
中南大学高等继续教育系列丛书
SERIES OF HIGHER CONTINUING EDUCATION IN CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

高等数学

Advanced Mathematics

郑洲顺 主 编
任叶庆 刘碧玉 副主编



中南大學出版社
www.csupress.com.cn

中南大学高等继续教育系列丛书

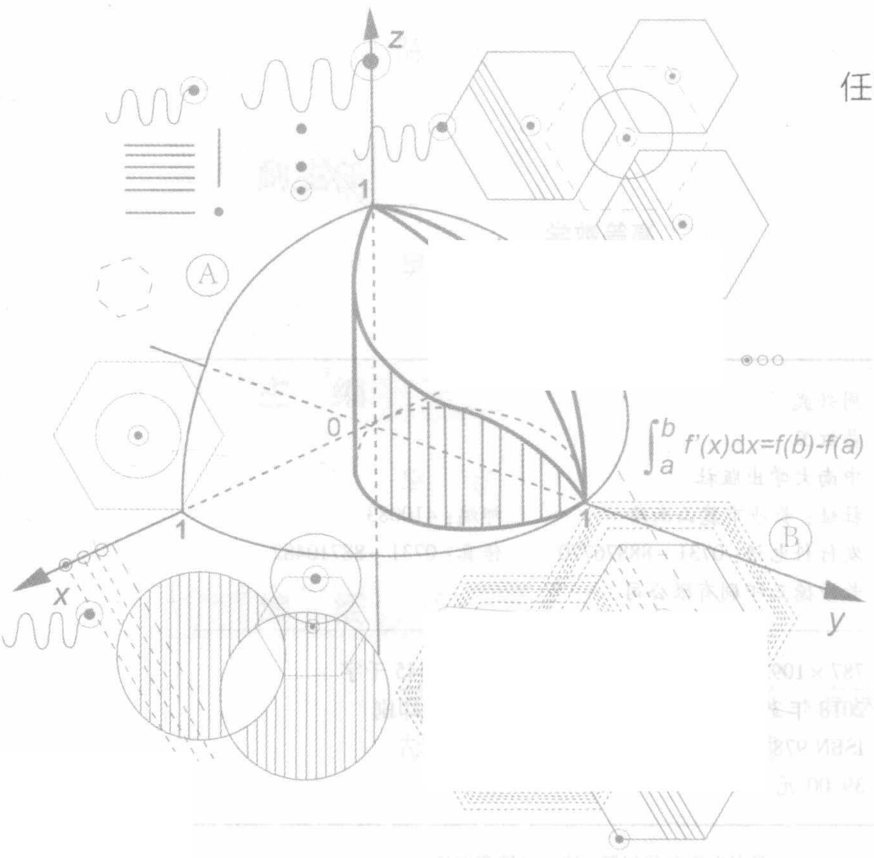
SERIES OF HIGHER CONTINUING EDUCATION IN CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

高等数学

Advanced Mathematics

郑洲顺 主 编

任叶庆 刘碧玉 副主编



中南大學出版社

www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/郑洲顺主编. --长沙:中南大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5487-3132-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郑… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 047120 号

高等数学

主编 郑洲顺

副主编 任叶庆 刘碧玉

□责任编辑 周兴武

□责任印制 易红卫

□出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路 邮编:410083

发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482

□印 装 长沙德三印刷有限公司

□开 本 787×1092 1/16 □印张 17.5 □字数 445 千字

□版 次 2018 年 3 月第 1 版 □2018 年 3 月第 1 次印刷

□书 号 ISBN 978-7-5487-3132-0

□定 价 39.00 元

总序 Foreword

为贯彻落实党的十九大提出的“办好继续教育，加快建设学习型社会，大力提高国民素质”的要求，持续推进高等继续教育综合改革，系统推进立德树人，促进继续教育内涵式发展、提高教学质量，中南大学推出了这套高等继续教育系列丛书。

从20世纪50年代开始，人类进入社会结构和技术革新急剧变化的时期，这个变化要求人们必须不断更新观念，不断更新知识和技能，以保持适应不断变化发展的职业、家庭和社会生活的应变能力，“开始于人的生命之初，终止于人的生命之末”的终身教育思想和“学习着工作着、工作着生活着、生活着学习着”的学习型社会理念于是诞生。随着各种条件的进步与改善，人们不断高涨的优化现实生活、充实精神生活和努力达到自我完善的追求，成为终身教育迅速兴起的强大引擎。继续教育是终身教育和学习型社会的重要组成部分，高等继续教育又是继续教育的重要组成部分。我们说的高等继续教育内涵式发展，就是指高等继续教育要实现为社会经济发展和个人生活质量改善而服务的目的。

基于这个目的，本丛书在编写时突出了四个原则。

第一个原则是贴近继续教育学生的特点和需求。继续教育学生的特点是自学为主的学习方法、工余为主的学习安排、应用为主的学习要求和提升为主的学习目标，继续教育学生的需求是个性的全面发展、素质的充分提高和岗位创新能力的专门培养。作为本丛书的具体表现，就是在内容上做到必需、够用、可拓展，在叙述上做到易懂、详实、促思考。一些比较抽象或理论性比较强的内容，我们也力图用换个说法或举例解释的方法使之多一些帮助理解的侧面。但学生不能以为有了本丛书后，学习就会变得轻松潇洒，知识就可以信手拈来。因为学习是智力的垦荒开拓，是一种高强度的脑力劳动和实践活动，它可以是享受、充实和愉快，却不可能是消遣、娱乐和休闲。本丛书努力帮助你把成长的路拉得直一些，却不会代替你在这条路上前行。

第二个原则是融入立德树人根本任务。党的十九大报告提出“要全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务”，本丛书编写中结合新时代的新要求，坚持社会主义核心价值观导向和可持续发展教育，促使学生将立德树人内化为精神追求、外化为行动自觉。我们要求丛书各册编者认真梳理、充分挖掘和积极运用其蕴含的思想政治教育元素和所承载的思想政治教育功能，实现思想政治教育与知识体系教育的有机统一。这是关于“时代环境”

挑战的全程、全员、全方位的直接应对，用创新的思维开拓教育的创新，培养“不忘本来，吸收外来，面向未来”的新一代，真正做到树人成材。

第三个原则是靠近社会和科技的发展。人类知识范围越来越广，社会进步和科技进展的速度越来越快，社会科学和自然科学前沿锋面的面积成几何级数增加，各个领域的新认识、新事物已不是“涌现”出来，而是“爆炸”出来，并且迅速地又被更新的认识和更新的事物替代，达到了日新月异、目不暇接的程度。例如网络，在20年前尚属少数人群、少数地方的深奥科技，而今天，它的终端已存在于每个人的口袋中，无论男女老少，网络一旦不畅，许多哪怕是日常的事情就会做不成。所有领域都如此。所有领域今天的面目与昨日相比，都已是莺飞草长、万紫千红。本丛书力求做到靠近社会和科技进步的最前沿，即便是经典的、历史的内容，也要说明它在今天的应用和发展。通过这样的学习，学习者知道了面前的阡陌延向，完全可以考虑一下自己或许也可以站到前沿去试试创新的牛刀。

第四个原则是科技与人文精神的结合。在强调知识实用的历史年代，科技教育与人文精神教育基本上是分离的，理工、医药、经管和文史等是相互并行的路，它们之间虽然没有藩篱，但在其上行驶的车辆却是不会变道的。今天，我们已经认识到了包括思想、才能、志趣和道德品质在内的人的全面发展，也就是德、智、体、美全面发展的意义和价值。科技教育与人文精神教育的结合，体现的不仅仅是教育的内涵式发展，更重要的是社会文明和人的全面发展的内涵式发展。科技教育与人文精神教育在本质上是相通的，在教化意义上是互补的，是人类文化前行的左足和右足。本丛书尝试在编写时将这两方面有机结合，做到理技合一、润物无声，而不是简单地堆出一个拼盘杂烩。

在编写中，我们强调丛书无论在架构的设定、内容的取舍还是在体例的安排、叙述的方式，都要做到思想性、知识性、可读性和启发性的融汇。丛书中的任一册，都能使读者获得知识的扩充、能力的提升、视野的拓宽和美感的体悟，使阅读成为愉悦的享受。

改革开放以来，经过四十年的发展，学历继续教育已不仅仅只是学历教育的一条补充支流，它已从外延发展阶段走到了内涵发展阶段。学历继续教育的奔向不再是满足职务、职位等简单的刚性需求，而是要满足创业、转岗、自我实现等复杂的弹性需求。学历继续教育必将和非学历继续教育一起成为“加快建设学习型社会，大力提高国民素质”洪流中的重要水系，本丛书力争成为这个水系中的一股激流——我们期待着。

本丛书不但适用于学历继续教育，也适合自考助学和非学历继续教育培训，以及对丛书内容有兴趣的读者使用。

吕诚

2018年1月

前言 Preface

“高等数学”是理工农医及经管类成人高等教育各专业中一门重要的基础理论课程，是理工农医及经管类等各专业后续课程学习的基础。

读者首先就会疑问：学习高等数学到底有何用处？对我将来从事的工作有帮助吗？对自我的提升有何帮助？为此先引用两句耐人寻味的话：

一个人不识字可以生活，但是若不识数，就很难生活了；

一个国家科技的进步，可以用它消耗的数学来度量。

前一句比较通俗，却颇为深刻；后一句比较高雅，又非常精彩！

一个人的学历教育，从小学一年级到大学一年级，一般要学13年的数学课程，但许多人并未因为学得时间长而掌握了数学的精髓，相反，大多数人对数学的思想、精神了解得比较肤浅，误以为学数学就是会做题，能应付考试，不知道数学思维的重大价值。实际上，学生大学毕业后走入社会，如果不是在与数学相关的领域工作，他们学过的具体数学公式、定理可能大多用不上，以至很快就会忘记了。但不管从事什么行业，从数学课程学习中获得的数学素养、数学的思维方法和看问题的着眼点等，会随时随地发生作用，使人们在实践中终身受益。

数学不仅是现代科技的重要工具，也是一种思维模式；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化；数学不仅是一些知识，也是一种素养，即数学素养。在提高人的推理能力、抽象能力、分析能力与创新能力方面，数学训练的作用是其他训练难以替代的。

本书主要从实际问题中的内在规律抽象成数学概念，经方法演绎，用数学语言将现实问题的内在规律呈现在读者的眼前，意在提高读者的数学素养、分析与创新能力，以至帮助读者学以致用。

本书编者从事高等数学课程教学多年，编写此教材的基本思想是注重数学思想与方法的理解与掌握，结合数学文化史与背景知识以及应用案例提高读者发现问题、分析问题和解决问题的能力。根据全国教学指导委员会理工农医及经管类成人高等教育对高等数学这门课程的要求，编者收集了一些数学在各专业中的应用案例，将数学文化史等引入教材，提倡从了解数学文化与解决实际问题入手，在建立数学模型解决实际问题的过程中引入数学的概念、思想和方法，旨在服务于各专业学生创新发展的需求，提升职业能力。

教材具有以下几个方面的特色。

(1)强调高等数学基础理论的重要性，基本概念和基本理论尽可能从实际应用案例引入，加强基本理论和基本方法的应用，淡化复杂的理论推导，增强教材的可读性和可接受性，培养学生熟练地用准确、简明、规范的数学语言表达、处理、解决实际问题。

(2)编排上采取“基本要求—基本内容叙述—数学文化园地—习题—本章小结”的章节结构，与之相对应的教学环节是“网上预习—系统面授—同步练习—每章归纳总结”，并配有相应的网络资源与习题练习，难易适当。

(3)教材具有系统性、科学性和渐进性，内容通俗易懂，例题适当，叙述清晰，方便读者自学。

本教材是由郑洲顺教授组织具有丰富教学经验的一线教师编写，其中刘碧玉负责编写第1、3、6章，任叶庆负责编写第2、4、5章。各章的案例导入、知识导航以及二维码资源由任叶庆统一编写，刘碧玉负责全书的统稿。本书配套有相应的网络资源，便于读者学习与练习。

由于时间仓促和编者学识有限，书中存在问题及不妥之处，真诚地欢迎读者批评指正，以期不断完善。

郑洲顺

2018年3月

目录
Contents

第1章 函数与极限

第4章 空间解析几何与多元函数微分学

第1章 函数与极限

音乐能激起或平静人的心灵，绘画能愉悦人的视觉，诗歌能激发人的感情，哲学能使思想得到满足，工程技术能改善人的物质生活，而数学则能做到所有这一切.

——克莱因

克莱因(Felix Christian Klein，1849—1925)，德国数学家，在函数理论上做出过重要贡献.

本章的主要内容与基本要求见下表：

内容提要	函数概念，极限概念，极限的四则运算法则，复合函数的极限，极限存在准则，两个重要极限，函数的连续性，间断点的分类，无穷小与无穷大的概念，无穷小的阶
基本要求	1. 了解函数及极限的概念，掌握求极限的常用方法； 2. 理解函数连续的概念并会判断间断点的类型，了解初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质
重点难点	**重点**：极限的求法，函数连续性讨论，间断点的分类 **难点**：函数极限的求法，闭区间上连续函数性质的运用

本章介绍高等数学的主要研究对象：函数；然后介绍高等数学的主要研究方法：极限理论；最后讨论函数的一个重要特性：连续性.

客观世界中很多现象或对象存在着相互依存的联系，这种依存的关系粗略地抽象来说就是函数关系.

例如：为了保护水资源，提倡节约用水，某市对居民生活用水收费标准如下：每户每月用水不超过6吨时每吨3元，当用水超过6吨但不超过15吨时，超过部分每吨5元，当用水超过15吨时，超过部分每吨10元.

对某户居民能看到其某月所交水费为93元，该用户如果想知道该月的用水量，如何解决呢?

实际上，如果引入以下两个变量，令该月水费为y(元)，用水量为x(吨)，找出两个变量之间存在的函数关系式 $y=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 6\\ 18+5(x-6), & 6<x\leqslant 15\\ 63+10(x-15), & x>15\end{cases}$，该用户当月所交水费超过63元，由该函数关系式的第三个表达式，$63+10(x-15)=93$，即可计算其当月用水吨数：$x=18$(吨).

若两个现象或对象有这种依存关系，那么一个现象或对象在某种变化过程中，会引起另一个现象或对象的变化，探讨另一个现象或对象的变化趋势的问题，就是极限问题. 若一个现象或对象的变化引起另一个现象或对象变化不大，这个特性就是函数的连续性.

这些规律在自然界或人们的生产实践活动中普遍存在. 本章就是尝试用抽象的数学语言来揭示这些规律. 相信读者从逻辑思维的高度来理解自然界的这些内在规律，会对自身价值有更高的提升.

1.1 函数及其性质

【知识引领】

1. 构成函数的要素是什么？

2. 函数是如何分类的？

3. 分段函数是初等函数吗？

自然界以及人类的生产实践活动处处存在着函数关系. 比如，石拱桥的涵洞、汽车发动机的保养和维护、市场业务的开辟、建筑设计与机械设计等. 再比如，发工资时交个人所得税的计算就是一个函数，它对于不同的工资有不同的计算方法，工资高的所得税交的多，而工资低的所得税交的少. 函数实际上就是用数学方法描述自然界两个或两个以上的要素之间的固定关系. 具体讲这些要素相互关联，相互影响，但必定一个是结果，另一个或几个是原因，他们之间的这种关系在确定的条件下是固定的，只要一个原因变化必然会影响结果. 有了函数我们就可以用它来计算和观察分析这些要素. 看它的变化规律，继而把它运用到实际生活中，造福人类，函数的意义就在于此. 我们看以下具体的案例.

【案例导入】

(学号问题) 分析某校学生的学号编制方案，请为某校 2018 级新同学设计新的学号编制方案，说明每个学生与其学号的对应关系应该具备哪些特征?

借用函数的概念，以上问题很容易用数学的方式表达. 如，对案例 1，可以借助表格的形式表示每个学生的学号及其对应关系.

下面用数学的语言来描述函数的定义，并进一步讨论函数的表示法及其性质.

1.1.1 函数的概念

函数概念的历史发展

【定义 1】 设 D 是实数集，对于 D 中每一个数 x，按照某个法则 f，有唯一确定的数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的函数，简记为

$$y=f(x),\ x\in D,\ 或\ f:\ x\mapsto y=f(x),\ x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 $D(f)$，即 $D(f)=D$.

函数定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $R(f)$ 或 $f(D)$，即

$$R(f)=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数.

函数一语，起源于公元 1692 年，最早见自德国数学家莱布尼兹的著作. 记号 $y=f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉于公元 1724 年首次使用的. 上面我们所讲的函数定义，属于德国数学家黎曼（Riemann，1826—1866），我国引进函数概念，始于 1859 年，首见于清代数学家李善兰（1811—1882）的译著.

函数的定义域通常按以下两种情况确定：一种是对有实际背景的函数，函数的定义域要根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,\ T]$$

这个函数的定义域就是闭区间 $[0,\ T]$.

另一种是在理论研究中，对应法则是用数学公式表示的函数，这种函数的定义域通常规定是使数学公式有意义的自变量 x 的所有值构成的实数集. 这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种情况下，用数学公式表示的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必表达定义域 D.

例 1　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解　要使上述数学公式有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}|x|\leqslant 2,\\ x>1,\end{cases}$$

于是有

$$1<x\leqslant 2,$$

因此函数的定义域 $D=(1,\ 2]$.

表示函数关系式的方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）. 举几个例子如下.

例 2　某种牌号的收音机，当单价为 120 元时，每月可销售 2000 台，如果单价每降低 5 元，则可多销售 20 台. 单价不得低于 90 元. 销量 Q 与单价 P 有如下关系：

P	120	115	110	105	100	95	90
Q	2000	2020	2040	2060	2080	2100	2120

显然当 P 在允许的降价范围内变化时，销售量 Q 也随之有一个确定的值与之对应. 因此销售量 Q 是单价 P 的函数，这种函数就是用表格法表示的.

例 3 气象台为了掌握某地气温的变化，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图 1.1 所示的曲线. 图中有两个变量：时间 t 和气温 T. 对从 0 到 24 小时内的任意一个确定的时刻 t，都有一个确定的气温 T 与之对应，因此气温 T 是时间 t 的函数，即 $T=T(t)$，它们之间的对应关系就是如图的曲线. 这种函数就是用图形法表示的. 显然，当时间 $t=t_0$ 时，通过图中的曲线可以找到对应的函数值 T_0.

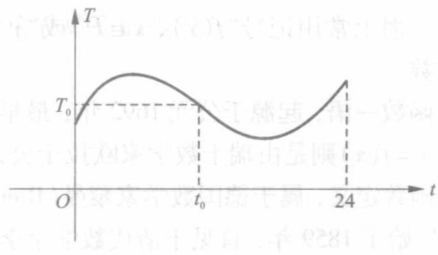


图 1.1 气温变化

但在理论研究中所遇到的函数多数是用数学公式表示的函数，例如，初等数学中所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数都是用公式法表示的函数.

有时一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的数学表达式来表示其对应关系，这种函数称为分段函数. 下面给出一些今后常用的分段函数.

例 4 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R(f)=[0, +\infty)$，如图 1.2 所示，这个函数称为绝对值函数.

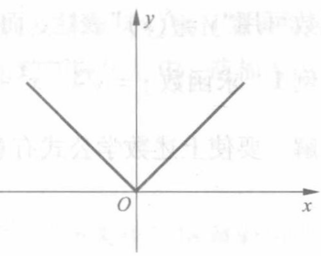


图 1.2 绝对值函数

例 5 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $R(f)=\{-1, 0, 1\}$，如图 1.3 所示，这个函数称为符号函数. 对于任何实数 x，下列关系成立

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

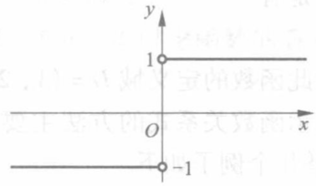


图 1.3 符号函数

例 6 设 x 为任意实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如