张景中科普文集

ZHANG JINGZHONG KEPU WENJI

100% 珍藏版

不用极限的微积分

张景中◎著

不用极限或无穷小而把微积分说清楚，曾是大师们的古老梦想。这里从一个平凡思路出发实现了大师们的愿望，让高中生就能看懂微积分。

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

张景中科普文集

ZHANG JINGZHONG KEPU WENJI

不用极限的微积分

张景中◎著

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

不用极限的微积分 / 张景中著. —武汉：湖北科学技术出版社，2016. 1

（张景中科普文集）

ISBN 978-7-5352-7205-8

Ⅰ. ①不…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①微积分—少年读物　Ⅳ. ①O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 243751 号

出版统筹：王小芳　刘志敏

责任编辑：王小芳　　封面设计：戴　旻

出版发行：湖北科学技术出版社　　电话：027—87679468

地　　址：武汉市雄楚大街 268 号　　邮编：430070

（湖北出版文化城 B 座 13—14 层）

网　　址：http://www.hbstp.com.cn

印　　刷：武汉市金港彩印有限公司　　邮编：430023

710×1010　1/16　　12.25 印张　　166 千字

2016 年 1 月第 1 版　　2016 年 1 月第 1 次印刷

定价：28.00 元

总 序

ZONGXU

感谢湖北科学技术出版社督促我将这 30 多年里写的科普作品回顾整理一下。我想人的天性是懒的，就像物体有惰性。要是没什么鞭策，没什么督促，很多事情就做不成。我的第一本科普书《数学传奇》，就是在中国少年儿童出版社的文赞阳先生督促下写成的。那是 1979 年暑假，他到成都，到我家里找我。他说你还没有出过书，就写一本数学科普书吧。这么说了几次，盛情难却，我就试着写了，自己一读又不满意，就撕掉重新写。那时没有电脑或打字机，是老老实实用笔在稿纸上写的。几个月下来，最后写了 6 万字。他给我删掉了 3 万，书就出来了。为什么要删？文先生说，他看不懂的就删，连自己都看不懂，怎么忍心印出来给小朋友看呢？书出来之后，他高兴地告诉我，很受欢迎，并动员我再写一本。

后来，其他的书都是被逼出来的。湖南教育出版社的《数学与哲学》，是我大学里高等代数老师丁石孙先生主编的套书中的一本。开策划会时我没出席，他们就留了“数学与哲学”这个题目给我。我不懂哲学，只好找几本书老老实实地学了两个月，加上自己的看法，凑出来交卷。书中对一些古老的话题如“飞矢不动”“白马非马”“先有鸡还是先有蛋”“偶然与必然”，冒昧地提出自己的看法，引起了读者的兴趣。此书后来被 3 家出版社再版。又被选用改编为数学教育方向的《数学哲学》教材。其中许多材料还被收录于一些中学的校本教材之中。

《数学家的眼光》是被陈效师先生逼出来的。他说，您给文先生写了书，他退休了，我接替他的工作，您也得给我写。我经不住他一再劝说，就答应下来。一答应，就像是欠下一笔债似的，只好想到什么就写点什么。5 年积累下来，写

成了 6 万字的一本小册子。

这是外因，另外也有内因。自己小时候接触了科普书，感到帮助很大，印象很深。比如苏联伊林的《十万个为什么》《几点钟》《不夜天》《汽车怎样会跑路》；我国顾均正的《科学趣味》和他翻译的《乌拉·波拉故事集》，刘薰宇的《马先生谈算学》和《数学的园地》，王峻岑的《数学列车》。这些书不仅读起来有趣，读后还能够带来悠长的回味和反复的思索。还有法布尔的《蜘蛛的故事》和《化学奇谈》，很有思想，有启发，本来看上去很普通的事情，竟有那么多意想不到的奥妙在里面。看了这些书，就促使自己去学习更多的科学知识，也激发了创作的欲望。那时我就想，如果有人给我出版，我也要写这样好看的书。

法布尔写的书，以十大卷的《昆虫记》为代表，不但是科普书，也可以看成是科学专著。这样的书，小朋友看起来趣味盎然，专家看了也收获颇丰。他的科学研究和科普创作是融为一体的，令人佩服。

写数学科普，想学法布尔太难了。也许根本不可能做到像《昆虫记》那样将科研和科普融为一体。但在写的过程中，总还是禁不住想把自己想出来的东西放到书里，把科研和科普结合起来。

从一开始，写《数学传奇》时，我就努力尝试让读者分享自己体验过的思考的乐趣。书里提到的“五猴分桃”问题，在世界上流传已久。20 世纪 80 年代，诺贝尔奖获得者李政道访问中国科学技术大学，和少年班的学生们座谈时提到这个问题，少年大学生们一时都没有做出来。李政道介绍了著名数学家怀德海的一个巧妙解答，用到了高阶差分方程特解的概念。基于函数相似变换的思想，我设计了“先借后还”的情景，给出一个小学生能够懂的简单解法。这个小小的成功给了我很大的启发：写科普不仅仅是搬运和解读知识，也要深深地思考。

在《数学家的眼光》书中，提到了祖冲之的密率 355/113 有什么好处的问题。数学大师华罗庚在《数论导引》书中用丢番图理论证明了，所有分母不超过 366 的分数中，355/113 最接近圆周率 π。另一位数学家夏道行，在他的《e 和 π》书中用连分数理论推出，分母不超过 8000 的分数中，355/113 最接近圆周率

π。在学习了这些方法的基础上我做了进一步探索，只用初中数学中的不等式知识，不多几行的推导就能证明，分母不超过 16586 的分数中，355/113 是最接近 π 的冠军。而 52163/16604 比 355/113 在小数后第七位上略精确一点，但分母却大了上百倍！

我的北京大学老师程庆民教授在一篇书评中，特别称赞了五猴分桃的新解法。著名数学家王元院士，则在书评中对我在密率问题的处理表示欣赏。学术前辈的鼓励，是对自己的鞭策，也是自己能够长期坚持科普创作的动力之一。

在科普创作时做过的数学题中，我认为最有趣的是生锈圆规作图问题。这个问题是美国著名几何学家佩多教授在国外刊物上提出来的，我们给圆满地解决了。先在国内作为科普文章发表，后来写成英文刊登在国外的学术期刊《几何学报》上。这是数学科普与科研相融合的不多的例子之一。佩多教授就此事发表过一篇短文，盛赞中国几何学者的工作，说这是他最愉快的数学经验之一。

1974 年我在新疆当过中学数学教师。一些教学心得成为后来科普写作的素材。文集中多处涉及面积方法解题，如《从数学教育到教育数学》《新概念几何》《几何的新方法和新体系》等，系源于教学经验的启发。面积方法古今中外早已有了。我所做的，主要是提出两个基本工具（共边定理和共角定理），并发现了面积方法是具有普遍意义的几何解题方法。1992 年应周咸青邀请访美合作时，从共边定理的一则应用中提炼出消点算法，发展出几何定理机器证明的新思路。接着和周咸青、高小山合作，系统地建立了几何定理可读证明自动生成的理论和算法。杨路进一步把这个方法推广到非欧几何，并发现了一批非欧几何新定理。国际著名计算机科学家保伊尔（Robert S. Boyer）将此誉为计算机处理几何问题发展道路上的里程碑。这一工作获 1995 年中国科学院自然科学一等奖和 1997 年国家自然科学二等奖。从教学到科普又到科学研究，20 年的发展变化实在出乎自己的意料！

在《数学家的眼光》中，用一个例子说明，用有误差的计算可能获得准确的结果。基于这一想法，最近几年开辟了"零误差计算"的新的研究方向，初步有

了不错的结果。例如，用这个思想建立的因式分解新算法，对于两个变元的情形，比现有方法效率有上千倍的提高。这个方向的研究还在发展之中。

1979—1985 年，我在中国科学技术大学先后为少年班和数学系讲微积分。在教学中对极限概念和实数理论做了较深入的思考，提出了一种比较容易理解的极限定义方法——“非 ε 语言极限定义”，还发现了类似于数学归纳法的“连续归纳法”。这些想法，连同面积方法的部分例子，构成了 1989 年出版的《从数学教育到教育数学》的主要内容。这本书是在四川教育出版社余秉本女士督促下写出来的。书中第一次提出了“教育数学”的概念，认为教育数学的任务是“为了数学教育的需要，对数学的成果进行再创造。”这一理念渐渐被更多的学者和老师们认同，导致 2004 年教育数学学会（全名是“中国高等教育学会教育数学专业委员会”）的诞生。此后每年举行一次教育数学年会，交流切磋为教育而改进数学的心得。这本书先后由三家出版社发行，从此面积方法在国内被编入多种奥数培训读物。师范院校的教材《初等几何研究》（左铨如、季素月编著，上海科技教育出版社 1991 年出版）中详细介绍了系统面积方法的基本原理。已故的著名数学家和数学教育家，西南师大陈重穆教授在主持编写的《高效初中数学实验教材》中，把面积方法的两个基本工具“共边定理”和“共角定理”作为重要定理，教学实验效果很好。1993 年，四川都江教育学院刘宗贵老师根据此书中的想法编写的教材《非 ε 语言一元微积分学》在贵州教育出版社出版。在教学实践中效果明显，后来还发表了论文。此后，重庆师范学院陈文立先生和广州师范学院萧治经先生所编写的微积分教材，也都采用了此书中提出的“非 ε 语言极限定义”。

10 多年之后，受林群先生研究工作的启发带动，我重启了关于微积分教学改革的思考。文集中有关不用极限的微积分的内容，是 2005 年以来的心得。这方面的见解，得到著名数学教育家张奠宙先生的首肯，使我坚定了投入教学实践的信心。我曾经在高中尝试过用 5 个课时讲不用极限的微积分初步。又在南方科技大学试讲，用 16 个课时不用极限讲一元微积分，严谨论证了所有的基本定理。

初步实验的，效果尚可，系统的教学实践尚待开展。

也是在2005年后，自己对教育数学的具体努力方向有了新的认识。长期以来，几何教学是国际上数学教育关注的焦点之一，我也因此致力于研究更为简便有力的几何解题方法。后来看到大家都在删减传统的初等几何内容，促使我作战略调整的思考，把关注的重点从几何转向三角。2006年发表了有关重建三角的两篇文章，得到张奠宙先生热情的鼓励支持。这方面的想法，就是《一线串通的初等数学》一书的主要内容。书里面提出，初中一年级就可以学习正弦，然后以三角带动几何，串联代数，用知识的纵横联系驱动学生的思考，促进其学习兴趣与数学素质的提高。初一学三角的方案可行吗？宁波教育学院崔雪芳教授先吃螃蟹，做了一节课的反复试验。她得出的结论是可行！但是，学习内容和国家教材不一致，统考能过关吗？做这样的教学实验有一定风险，需要极大的勇气，也要有行政方面的保护支持。2012年，在广州市科协开展的“千师万苗工程”支持下，经广州海珠区教育局立项，海珠实验中学组织了两个班的初中全程的实验。两个实验班有105名学生，入学分班平均成绩为62分和64分，测试中有三分之二的学生不会作三角形的钝角边上的高，可见数学基础属于一般水平。实验班由一位青年教师张东方负责备课讲课。她把《一线串通的初等数学》的内容分成5章92课时，整合到人教版初中数学教材之中。整合的结果节省了60个课时，5个学期内不仅讲完了按课程标准6个学期应学的内容，还用书中的新方法从一年级下学期讲正弦和正弦定理，以后陆续讲了正弦和角公式，余弦定理这些按常规属于高中课程的内容。教师教得顺利轻松，学生学得积极愉快。其间经历了区里的3次期末统考，张东方老师汇报的情况如下：

从成绩看效果

期间经过三次全区期末统考。实验班学生做题如果用了教材以外的知识，必须对所用的公式给出推导过程。在全区80个班级中，实验班的成绩突出，比区平均分高很多。满分为150分，实验一班有4位同获满分，其中最差的个人成绩120多分。

	实验 1 班平均分	实验 2 班平均分	区平均分	全区所有班级排名
七年级下期末	140	138	91	第一名和第八名
八年级上期末	136	133	87.76	第一名和第五名
八年级下期末	145	141	96.83	第一名和第三名

这样的实验效果是出乎我意料的。目前，广州市教育研究院正在总结研究经验，并组织更多的学校准备进行更大规模的教学实验。

科普作品，以“普”为贵。科普作品中的内容若能进入基础教育阶段的教材，被社会认可为青少年普遍要学的知识，就普得不能再普了。当然，一旦成为教材，科普书也就失去了自己作为科普的意义，只是作为历史记录而存在。这是作者的希望，也是多年努力的目标。

文集编辑工作即将完成之际，湖北科学技术出版社刘虹老师建议我写个总序。我从记忆中检索出一些与文集中某些内容有关的往事杂感，勉强塞责。书中不当之处，欢迎读者指正。

湖北科学技术出版社何龙社长热心鼓励我出版文集；还有华中师范大学国家数字化学习工程中心彭翕成老师（《绕来绕去的向量法》作者之一，该书中绝大多数例题和题解由他提供）为文集的出版付出了辛勤劳动，在此谨表示衷心的感谢。

张景中

2014 年 10 月 14 日

目 录

MULU

开　篇

计算面积是最古老的数学问题之一. 但如何计算任意曲线包围的面积，直到17世纪初还是数学家面前的难题.

老问题没完全解决，新问题又层出不穷.

求作任意曲线的切线，求任意曲线的长度，这是来自几何的问题.

求变速运动物体的速度，求物体的重心，求液体对物体表面的压力，这是来自物理的问题.

判断各种函数的增减，求函数的最大值和最小值，这些问题既来自几何，又来自物理，也来自生活、工商业和许多科技领域，更是数学理论发展的需求.

数学历史上戏剧性的一幕出现了：微积分的创建，为上面几大类问题提供了巧夺天工的统一解决方案.

这是科学的大丰收，是人类精神的伟大胜利！

这场伟大胜利，奠基于无穷小方法或极限理论的建立与发展. 学习微积分就要先学极限，似乎已成定论.

无穷小方法或极限理论的繁琐，使微积分成为艰深的学问.

历史上一些数学大师相信，不借助于无穷小方法或极限理论也能把微积分说清楚. 拉格朗日为此写出其名著《解析函数论》. 但他们的愿望一直未能实现. 能严谨而简明地说清楚微积分的著作，因而长期未见出现.

我国数学家林群十几年来倡导微积分的改革，在此方向孜孜以求. 他所撰写的《微积分快餐》(科学出版社，2009)、《微积分减肥快跑》(科学普及出版社，2011)等书，开创了绕过极限运算直接推导出微积分公式的新路. 本书则通过另一思路，试图实现拉格朗日等大师的梦想.

第一讲

探求瞬时速度大师引入导数

有句古话，叫做“强弩之末势不能穿鲁缟”. 字面上是说射出的箭尽管开始很有力，也就是很快，但后来速度会慢下来，到了射程之末连细绢也穿不透了. 当然，这是由于空气阻力的作用.

其实，强弩之末速度到底如何，还要具体分析. 如果从高高的城门楼上射下来，像三国演义里陈宫向曹操射的一箭，由于重力，箭会越来越快；如果从下向上“弯弓射大雕”，初速再大，也会越高越慢；到了最高处回头下落，又会越来越快.

总之，箭的运动速度时时刻刻在变化，这在物理上叫做非匀速运动. 求非匀速运动物体每时每刻的速度，是物理学家关心的问题.

意大利物理学家伽利略(G. Galilei，1564—1642)研究了重力作用下物体的运动规律. 他经过反复实验，总结出小球在光滑斜面上滚下的距离 S 和所用的时间 t 之间有函数关系 $S=S(t)=at^2$，这个式子叫做小球的运动方程. 其中系数 a 和斜面坡度以及计量单位有关.

有了运动方程，在时间段 $[u,v]$ 上小球滚过的距离很好算，就是 $S(v)-S(u)=av^2-au^2$. 滚过这段距离的时间是 $v-u$，于是在时间区间 $[u,v]$ 上小球的平均速度

就是

$$V_p=\frac{S(v)-S(u)}{v-u}$$

$$=\frac{av^2-au^2}{v-u}$$

$$=a(u+v). \quad (1-1)$$

知道了任意时间段上的平均速度，如何求任一时刻的速度，即所谓瞬时速度呢？

伽利略没能解决这个问题. 他遭遇到了概念上的困难.

要算速度，就要知道物体在一段时间走过的距离. 只看一个时刻，时间和走过的距离都等于 0，通常的速度概念失去了意义！

英国科学家牛顿(Isaac Newton，1642—1727)设想，如果在(1—1)中让时刻 v 越来越接近 u，即让时间区间缩小到非常非常接近于 0，则右端的 $a(u+v)$ 越来越接近 $2au$. 所以时刻 $t=u$ 的瞬时速度应当是 $2au$.

例如，自由落体开始下落 t 秒时经过的距离为 $\frac{1}{2}gt^2$，即 $a=\frac{g}{2}$，这里 $g=9.8$ (m/s^2)是重力加速度，易算出下落 3 秒时其瞬时速度为 29.4(m/s). 这和物理学中按能量守恒定律算出来的结果一致.

为了强调要计算的是时刻 $t=u$ 处的瞬时速度，记 $v-u=h$，从而 $v=u+h$，于是(1—1)成为

$$V_p=\frac{S(u+h)-S(u)}{h}$$

$$=\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}$$

$$=\frac{2auh+ah^2}{h}$$

$$=2au+ah. \quad (1-2)$$

从上面的等式容易看出，不论 h 是正是负，当它无限接近于 0 时，平均速度 V_p

$=\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}=2au+ah$ 就会无限接近于 $2au$. 因此，认为 $2au$ 是时刻 $t=u$ 的瞬时速度，直观上看是合理的.

能不能简单点，干脆在(1—2)中取 $h=0$ 呢？仔细看看，不行！原来 h 在等式中还要充当分母，所以不能为 0，只能接近于 0. 多么接近于 0 都可以，就是不能等于 0.

"当 h 无限接近于 0 时，$\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 就会无限接近于 $2au$"这句话，用现代数学的极限符号表示，就是

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}=2au. \tag{1—3}$$

这个式子读作"当 h 趋于 0 时，$\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 的极限为 $2au$"，或简单地说"当 h 趋于 0 时，$\frac{a(u+h)^2-au^2}{h}$ 趋于 $2au$".

牛顿这样得出的答案，数学上不够严谨，当时引起了怀疑和争论.

怀疑这个方法的人问：让 h 无限接近 0，接近到什么程度呢？如果 $h\neq 0$，就只能得到平均速度而非瞬时速度；如果 $h=0$，以它为分母的分式就失去了意义！

在长达 150 多年间，数学家说不清极限概念，无法回答质疑.

尽管道理说不清，一大批出色的数学家仍然沿着牛顿的思路前进，解决了科学技术中提出的大量问题，取得了辉煌的成果.

直到 19 世纪 20～70 年代，经过柯西(A. L. Cauchy，1789—1851)、魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass，1815—1897)、戴德金(R. Dedekind，1831—1916)、康托(G. Cantor，1845—1918)等一批卓越的数学家的工作，才建立了严谨的极限概念和理论，为微积分打下了坚实的数学基础.

运动方程 $S(t)$ 是一般函数 $f(x)$ 的特例. 举一反三，把平均速度的表达式 $\frac{S(v)-S(u)}{v-u}$ 里的路程 $S(v)$ 和 $S(u)$ 换成一般函数值 $f(v)$ 和 $f(u)$，得到的比值

$\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$叫做$f(x)$在区间$[u,v]$上的“平均变化率”，这是我国近年来中学教材上的说法. 按国内外数学书刊上通常的术语，这个比值叫做函数$f(x)$在u和v两点的“差商”(quotient of difference). 这个词不但简单，而且具体明确：它是两点处函数值的差除以自变量的差所得的商. 有些书上差商也叫“增量比”，所谓增量就是差，比就是商.

在$y=f(x)$的曲线上取两点$A(u,f(v))$和$B(v,f(v))$，差商$\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$就是直线AB的斜率，如图1—1.

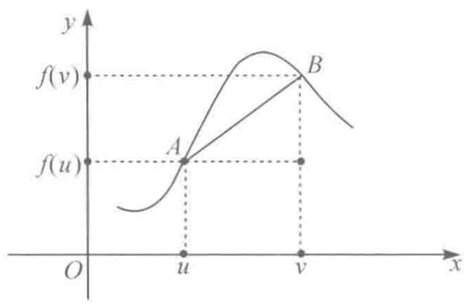

图1—1　差商的几何意义

将牛顿关于瞬时速度的想法一般化，引出一个重要的定义.

定义1　设函数$y=f(x)$在包含点u的某个区间上有定义. 如果在h趋于0的过程中差商$\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}=\dfrac{f(u+h)-f(u)}{h}$趋于一个确定的数$A$，这个数就叫做函数$f(x)$在点$x=u$处的微商或导数，记作$f'(u)=A$或$y'|_{x=u}=A$，并且称$f(x)$在点$x=u$处可导；$f'(u)=A$也叫$f(x)$在点$x=u$处的瞬时变化率.

如果$y=f(x)$在区间I的每个点x处都有导数$f'(x)$，称$f(x)$在区间I可导或点点可导，这时$f'(x)$(简单记作y')也是在区间I上有定义的函数，也叫做$f(x)$在区间I上的导函数，用极限记号表达为

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h}=f'(u). \tag{1—4}$$

简单地说，当分母趋于0时若差商有极限，这极限叫做导数.