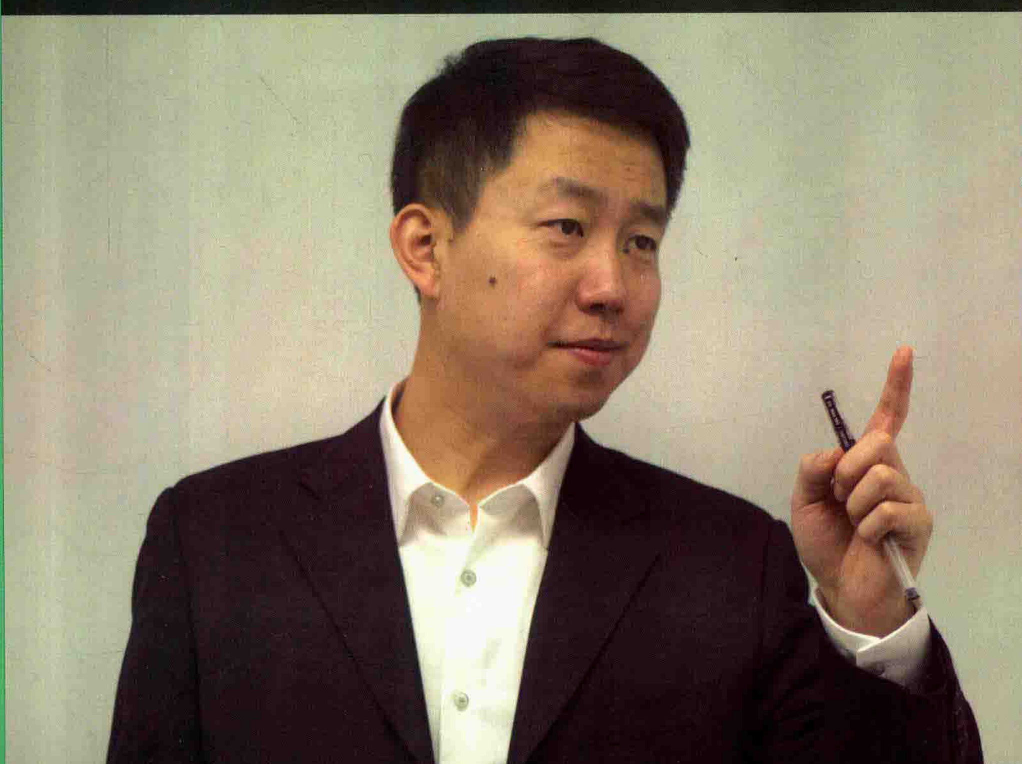
【张宇数学教育系列丛书】 时代云图 SHI DAI YUN TU

全国高校 高等数学（微积分）

期末考试过关必备与高分指南

(上册)



张宇 主编

中国政法大学出版社

书】 时代云图 SHI DAI YUN TU

全国高校 高等数学（微积分）

期末考试过关必备与高分指南

（上册）

张宇 主编

张宇数学教育系列丛书编辑委员会

（按姓氏拼音排序）

蔡燧林 陈常伟 陈静静 崔巧莲 高昆轮 郭二芳

胡金德 贾建厂 兰杰 廖家斌 刘露 柳青 田宝玉

王娜 王秀军 王玉东 吴萍 徐兵 严守权 亦一（笔名）

于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张婷婷 张心琦 张亚楠

张宇 赵乐 赵修坤 郑利娜 朱杰

中国政法大学出版社

2017・北京

图书在版编目（CIP）数据

全国高校·高等数学（微积分）期末考试过关必备与高分指南. 上册/张宇主编. —北京：中国政法大学出版社，2017.2
ISBN 978-7-5620-7357-4

Ⅰ.①全… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料②微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O13②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 035413 号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址　北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285（总编室）58908433（编辑部）58908334（邮购部）
承　印　三河市嘉科万达彩色印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　9.5
字　数　237 千字
版　次　2017 年 2 月第 1 版
印　次　2017 年 2 月第 1 次印刷
定　价　25.00 元

Preface 前言

本书的编写，主要针对两类人群：**一是全国各高校参加校高等数学(微积分)期末考试的理工学、经济学、管理学等各学科的学生；二是参加全国硕士研究生招生考试中考数学的考生**. 也可供参加各类大学数学竞赛的考生参考.

本书有如下特色：

一、命题的通用性

本书命制的考试试题适用于参加学校期末考试的全国各高校各专业的学生，也适用于考研基础阶段复习测评的学生. 全国各高校命制的高等数学(微积分)期末考试题虽然各有特色，但均以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据，以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考. 把握住这个关键，本书调研了全国众多高校(包括重点高校和普通高校)的高等数学(微积分)教材(包括理工科生普遍使用的同济大学数学系编写的《高等数学(第六版、第七版)》，经管类学生普遍使用的吴传生主编的《经济数学—微积分》等)和期末考试题，命制出具有通用性的考试试卷，供校内考生在考试前集中精力，高效复习，顺利过关，勇争高分，也供考研学生在基础阶段全面复习，打牢基础，测试水平.

二、考点的预测性

本书专门设置了全国高校考试通用的必考点预测，这种考点的预测、精讲，有利于备考学生迅速抓住期末考试的命题点、得大分的点. 考虑到很多学生因各种原因，未能胸有成竹地通过考试甚至取得高分，而时间又极其有限，本书有针对性地梳理出考前必须掌握的重要知识点，可以让考生在短时间内迅速把握要领，理清思路，从而通过考试并取得优异的成绩. 同时，这些点也是考研基础复习阶段考生必备的重要知识，考生需要对这些必考点反复操练、琢磨，达到熟稔于心的程度.

三、使用的便捷性

本书编者团队是一批全国著名的数学命题与教学专家，深谙命题规律和考生实际状况，**作为主编，我和我的编者团队会在网络直播平台(比如：斗鱼房间 1012132，宇哥与你面对面)不定期地免费为使用本书的学生进行本书知识点和考卷的讲解答疑**，有助于考生迅速把握考试内容，顺利过关，考出高分甚至满分.

本书编写过程中，参考了下列资料或著作：

教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲

教育部《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》

《张宇高等数学 18 讲》

感谢在调研中众多高校同事、研究生、本科生给予的帮助和支持，他们不仅提供了宝贵的试题，而且还对本书提出了不少好的意见和建议，作者表示由衷感谢. 不妥之处，作者不以水平、时间有限为遁词，诚心接受各位的批评指正.

张宇

2017 年春节 于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列（高等数学（上、下册）、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	体现了本科教学要求与考研要求的差异，列出了章节学习的知识体系，给出了所有课后习题的全面解析，精选了不同数量的经典例题.	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列（高等数学（微积分）（上、下册）、线性代数、概率论与数理统计，共4册）	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据，以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考，设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题，命题具有通用性.	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题组组长参与.	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题（数学一、数学二、数学三）	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，由易到难，利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解. 原命题组组长参与.	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解（数学一、数学二、数学三）	囊括考研数学命题以来所有考研真题，给读者提供原汁原味的实考题，有效掌握命题方向及解题思路. 原命题组组长参与.	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷（数学一、数学二、数学三）	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷（上）. 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷（数学一、数学二、数学三）	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷（下）. 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别. 出版日期见封四.

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

Contents 目录

第一章 函数与极限

必考点预测

1. 函数问题及其性质

本章的复合函数是难点. 求 $f[g(x)]$ 的步骤:先由外层函数 $f(x)$ 写出复合函数的表达式,并同时写出中间变量(内层函数 $g(x)$)的取值范围,然后再由内层函数 $g(x)$ 的分段表达过渡到自变量 x 的变化范围.

例 1 设函数 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=($ $)$.

(A)0 (B)2

(C)$\begin{cases}2, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ (D)$\begin{cases}2, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1\end{cases}$

【答案】 (D)

【解析】 由 $f(x)=\begin{cases}2,|x|\leqslant 1,\\ 0,|x|>1\end{cases}$ 可知 $f[f(x)]=\begin{cases}2,|f(x)|\leqslant 1,\\ 0,|f(x)|>1,\end{cases}$ 因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}2,|x|>1,\\ 0,|x|\leqslant 1.\end{cases}$$

故选(D).

例 2 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,则 $f(x)=$________.

【答案】 $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(x>0)$

【解析】 设 $u=\sin^2 x$,则 $\sin x=\pm\sqrt{u}$. 当 $\sin x=\sqrt{u}$ 时,$x=\arcsin\sqrt{u}$;当 $\sin x=-\sqrt{u}$ 时,$\sin(-x)=\sqrt{u}$,$x=-\arcsin\sqrt{u}$. 因此有 $f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$,$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(x>0)$.

2. 数列极限

数列极限定义与极限存在的充要条件是考研的重点与难点.

定理 1(单调有界准则) 单调有界数列必定收敛.

常用的结论有:

1. 若 $\{x_n\}$ 递增,且有上界 M,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant M$;

2. 若 $\{x_n\}$ 递减,且有下界 m,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant m$.

定理 2(夹逼准则) 设数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$ 满足:

$$(1)\ y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots);(2)\ \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 3 “对任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{3}$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的(　　).

(A)充分条件但非必要条件　　　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　　　(D)既非充分条件也非必要条件

【答案】 (C)

【解析】 对照数列极限的定义:“对任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数N,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$收敛于a.”仔细分析题设条件知命题的提法与定义相比要弱些,但实质是等价的,由定义可知对任意给定$\varepsilon_1>0$,必定存在正整数N_1,当$n>N_1$时,总有$|x_n-a|<\varepsilon_1$.其逆命题也正确,取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$,存在正整数$N_2$,当$n>N_2$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$.因此选(C).

例 4 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,则(　　).

(A)对任意n,$a_n<b_n$成立　　　　(B)存在N,当$n>N$时,总有$a_n<b_n$

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$必定存在　　　　(D)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$可能不存在

【答案】 (B)

【解析】 数列极限的概念是描述变量在给定过程中的变化趋势,数列极限存在与否与前有限项的值无关,因此可以排除(A).

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,由极限运算法则可知$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$必定存在,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$不符合极限法则,由无穷小量性质可知其肯定不存在.因此可以排除(C),(D).故由排除法,应选(B).

3. 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

注意形式上的广义化.

例 5 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=$________.

【答案】 e^3

【解析】
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right]^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^3.$$

【说明】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+d}=\mathrm{e}^{ab}$是常用的公式,应熟记.

相仿,
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{2a}.$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧,为固定模式的求解方法,应熟记.

例 6 下列各式正确的是( ).

(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

【答案】 (B)

【解析】 (A) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=0$,排除;

(B) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$,正确;

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$,无穷小乘以无穷小还是无穷小,排除;

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$,无穷小乘以有界变量还是无穷小,故排除.

4. 求极限(包括反问题)

(1)求极限的方法有:

①极限的定义;

②连续的定义;

③导数的定义(增量比的极限);

④定积分的定义(积分和的极限);

⑤两个重要极限(类型与形式的统一:$\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}\xrightarrow{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}}1$,$[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\xrightarrow{\text{“}1^{\infty}\text{”型}}\mathrm{e}$($\varphi(x)\to0$ 且 $\varphi(x)\neq0$));

⑥无穷小与有界函数的乘积是无穷小;

⑦单调有界准则(用于证明极限存在,然后用递推公式求极限);

⑧夹逼准则(适当放缩);

⑨极限存在的充要条件(极限存在的充要条件是左、右极限存在且相等);

⑩初等变形(根式有理化、对数恒等式等);

⑪变量替换(倒代换、线性代换等);

⑫极限的四则运算法则、幂指函数极限法则、复合函数极限法则(注意条件);

⑬等价无穷小代换;

⑭洛必达法则(适用于“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型且导数之比的极限存在或者为∞);

⑮微分中值定理(增量型极限);

⑯泰勒公式(五个函数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$的麦克劳林公式);

⑰积分中值定理(积分型极限).

(2)求极限反问题:

要确定极限式中的常数,关键是找到所求常数满足的等式(方程),除了利用已知极限外,还要善于发现极限式中隐含的信息,如

①若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$;

②若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}$.

【解析】　所给极限为“$\dfrac{0}{0}$”型，先进行等价无穷小代换，再分组，可简化运算.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(2+x^2)\ln(1+x)}\xlongequal{(1)}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x^2}\cdot\frac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}$$

$$\xlongequal{(2)}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

【说明】　在上述运算中(1)处利用等价无穷小代换. 在(2)中将非零因子$\dfrac{1}{2+x^2}$单独求极限，将表达式分组，前者利用重要极限公式，后者利用“有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量”的性质.

例 8　若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b.

【解析】　所给问题为求极限的反问题.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax(x+1)-b(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-(b-1)}{x+1}=0,$$

因此应有 $1-a=0,-(a+b)=0$，即 $a=1,b=-1$.

5. 无穷大与无穷小

所谓无穷小比较就是比较无穷小趋于零的速度的快慢，进行无穷小比较，关键是求它们比值的极限 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

设 α,β 是在自变量的同一变化过程中的两个无穷小，

(1)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(3)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则称 β 是与 α 同阶的无穷小；

(4)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价的无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$；

(5)若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$ 则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

在比较多个无穷小的阶时，

(1)将它们逐个与基本无穷小比较；

(2)若 $x\to a$ 时，$\alpha(x)$是基本无穷小 $x-a$ 的 k 阶无穷小，则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{(x-a)^k}=\lim\frac{\alpha'(x)}{k(x-a)^{k-1}}=c\neq0,$$

即 $\alpha'(x)$是 $x-a$ 的 $k-1$ 阶无穷小，故无穷小阶的比较可以转化为它们的导数的阶的比较.

例 9　当 $x\to0^+$ 时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A) $e^{-\sqrt{x}}-1$　　　(B) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(C) $\ln\sqrt{1+x}$　　　(D) $\ln(1-\sqrt{x})$

【答案】 (B)

【解析】 注意等价无穷小量公式：当 $x\to0^+$ 时

$$e^{-\sqrt{x}}-1\sim-\sqrt{x},\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x},\ln\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x,\ln(1-\sqrt{x})\sim-\sqrt{x}.$$

可知应排除(A),(C),(D),故选(B).

例 10 若当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $\sin^2x$ 为等价无穷小，求 a.

【解析】 由于当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $\sin^2x$ 为等价无穷小，因此

$$1=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{a}{2}x^2}{x^2}=\frac{a}{2},$$

从而可得 $a=2$.

例 11 若 $\lim\limits_{x\to0}\left[-\dfrac{f(x)}{x^3}+\dfrac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，则 $f(x)$ 是 x 的(　　).

(A)等价无穷小量　　　(B)同阶但不等价的无穷小量

(C)高阶无穷小量　　　(D)低阶无穷小量

【答案】 (C)

【解析】 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[-\dfrac{f(x)}{x^3}+\dfrac{\sin x^3}{x^4}\right]=5$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3-xf(x)}{x^4}=5$，

可知

$$f(x)=\frac{\sin x^3-5x^4+o(x^4)}{x},$$

则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3-5x^4+o(x^4)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{x^2}-5\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^4)}{x^2}=0,$$

所以 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量，故选(C).

6. 连续与间断点

判断函数连续性的依据是：

(1)函数在一点连续和在一个区间上连续的定义.

①函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$；

②函数在一个区间上连续是指它在这个区间上每一点都连续(在区间端点指单侧连续).

(2)连续函数的运算.

①连续函数的和、差、积、商(分母不为零)也连续；

②连续函数的复合函数也连续；

③连续、单调增加函数的反函数也连续、单调增加.

(3)初等函数在其定义区间上连续.

重点是判断分段函数在分段点处的连续性.

间断点分类标准是：间断点 x_0 处的左、右极限是否都存在.

若函数在间断点 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 为第一类间断点(可去间断点、跳跃间断点)，

否则称 x_0 为第二类间断点(无穷间断点、振荡间断点等).

要判断间断点类型,关键是求出间断点处的左、右极限.

例 12 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$,则(　　).

(A)$x=-1$ 为可去间断点,$x=1$ 为无穷间断点

(B)$x=-1$ 为无穷间断点,$x=1$ 为可去间断点

(C)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为可去间断点

(D)$x=-1$ 和 $x=1$ 均为无穷间断点

【答案】 (B)

【解析】 所给表达式为分式,当 $x^2-1=0$ 时,可解得 $x_1=-1,x_2=1$,即 $f(x)$有两个间断点 $x_1=-1,x_2=1$,因

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\infty,\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

故 $x_1=-1$ 为无穷间断点,$x_2=1$ 为可去间断点.故选(B).

例 13 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

【答案】 -2

【解析】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(ae^{2x})=a,$$

所以 $a=-2$.

7. 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质是微积分理论的重要组成部分,它们是证明微分中值定理和积分中值定理的基础.

例 14 设 $f(x)$在(a,b)内连续,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为(a,b)内任意 n 个点,证明:存在$\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$.

【解析】 不妨设 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 由于 $f(x)$在(a,b)内连续,因此 $f(x)$在$[x_1,x_n]$上连续,设 M,m 分别表示 $f(x)$在$[x_1,x_n]$上的最大值与最小值,则

$$nm\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant nM,\text{即 } m\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的介值定理可知,在$[x_1,x_n]$上至少存在一点 ξ,使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i),\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b).$$

可知命题正确.

例 15 试证方程$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=0$ 有两个实根,并判定这两个根的范围.

【解析】 证明方程根的存在性,可以转化为函数的零点问题,先将方程两端同乘以$(x-1)(x-2)(x-3)$,可得

$$(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)=0.$$

令 $F(x)=(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)$,则 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续. 取闭区间$[a,b]=[1,2]$,则

$$F(1)>0,F(2)<0,$$

由闭区间上连续函数的零点定理可知,$(1,2)$内至少存在一点 x_1,使 $F(x_1)=0$.

再取$[a,b]=[2,3]$,则

$$F(2)<0,F(3)>0,$$

同理可知,在$(2,3)$内至少存在一点 x_2,使 $F(x_2)=0$.

易见 $x_1\neq x_2$,由于 $F(x)=0$ 为一元二次方程,根据代数知识可知,一元二次方程至多有两个实根,因此 x_1,x_2 就是原方程的两个不同实根,且分别位于$(1,2)$与$(2,3)$内.

过关测试卷

得分______

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-1$,则当 n 充分大时有(　　).

(A)$|a_n|>\dfrac{1}{2}$　(B)$|a_n|<\dfrac{1}{2}$　(C)$a_n>-1-\dfrac{1}{n}$　(D)$a_n<-1+\dfrac{1}{n}$

(2)当 $x\to1$ 时,$2e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A)等于 2　(B)等于 0　(C)为∞　(D)不存在但不为∞

(3)设当 $x\to0$ 时,$(e^{x^2}-1)\cdot\ln(1+x^2)$是比 $x^n\sin x$ 高阶的无穷小量,而 $x^n\sin x$ 是比 $1-\cos x$ 高阶的无穷小量,则正整数 n 等于(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(4)$y=|x-x_0|$在点 x_0 处(　　).

(A)不存在极限,也不连续　(B)不存在极限,但连续

(C)存在极限,但不连续　(D)存在极限,且连续

(5)当 $x\to0$ 时,$\dfrac{\cos x-1}{\sin 3x}$是(　　).

(A)比 x 高阶的无穷小量　(B)比 x 低阶的无穷小量

(C)与 x 同阶但不等价的无穷小量　(D)与 x 等价的无穷小量

(6)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x^{2n}}$,讨论 $f(x)$的间断点,其正确的结论为(　　).

(A)不存在间断点　(B)存在间断点 $x=1$　(C)存在间断点 $x=0$　(D)存在间断点 $x=-1$

(7)设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{[\ln(1+x^a)]\cdot\sin x}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则(　　).

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$的连续点

(D)$g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

(8)在下列区间内函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$有界的是(　　).

(A)$(-1,0)$　(B)$(0,1)$　(C)$(1,2)$　(D)$(2,3)$

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9)设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则 $f(x)=$______.

(10)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n=$______.

(11)当 $x\to0$ 时,$\sqrt{1-ax^2}-1$ 与 $\sin 3x^2$ 是等价无穷小量,则 $a=$______.

(12)设 $f(x-2)=x^2+2x+1$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=$______.

(13)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{\arcsin x}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$______.

(14)设 $c>0$,且函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ 5, & |x|>c\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则$c=$______.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,在区间$[0,2]$上 $f(x)=x(x^2-4)$.若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数,写出 $f(x)$在$[-2,0]$上的表达式.

(16)(本题满分 10 分)

设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^{2x}-1}=3$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 2x+b, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 试判定在什么条件下 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

(18)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

(19)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$.

(20)(本题满分 11 分)

当 $x\to 0$ 时,若 $\sin x^a$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量,求 a 的取值范围.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x^2-1)|x|}$,求其间断点,并指出其类型.