


“十三五”国家重点出版物出版规划项目

 名校名家基础学科系列
Textbooks of Base Disciplines from Top Universities and Experts

53段微课视频

过万题目题库

24个扩展阅读

(资源持续更新)

配套PPT课件
(仅向任课教师提供)

大学数学教程

主编 马锐



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十三五”国家重点出版物出版规划项目
名校名家基础学科系列

大学数学教程

主 编	马 锐				
副主编	成蓉华	罗兆富	陈 斌	梅 莹	
参 编	王 彬	罗秋瑾	吕军亮	赵子雪	贾丽丽
	吴 迪	王云秋	宗 琮	杨 胜	杜荣川
	洪晓春	李树伟	蒋 辉	王海燕	陈龙伟
	纳 静	赵文静	杨朝丽	杨春晓	葛兴会
	张雪琳	李小刚	朴丽莎		



机械工业出版社

本书是传统课本与“互联网”（手机）相结合的立体教材。本书的编写主要基于以下几点。一是满足少学时大学数学教学的需要。二是涵盖大学数学教学的三门基础课：微积分、线性代数、概率论与数理统计的主要知识点及其应用。三是“互联网”与大学数学教学的结合。

本书课程内容如下：第一篇微积分包含预备知识与函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分、微分方程初步及各部分的应用实例，共7章内容；第二篇线性代数包含行列式、矩阵、线性方程组及各部分的应用实例，共3章内容；第三篇概率论与数理统计包含随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计初步，共4章内容。每章均配有习题和部分参考答案。教师可根据学生的实际需求灵活选择教学内容。

本书内容的主要特点：一是数学基础部分概念准确，难度适中，题型简练，便于学生掌握数学基础知识。二是数学应用取材适当，言简意赅，可读性强，通俗易懂，有利于激发学生的学习兴趣。

本书有“互联网”支持的教学资源：重点概念讲解视频、题库讲解视频、相关数学文化知识学习、自主学习与测试。

本书可供大学数学课堂学时较少和自主学习大学数学的师生使用，也可以作为在职人员继续教育学习的数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学教程/马锐主编. —北京：机械工业出版社，2018.6

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 名校名家基础学科系列

ISBN 978-7-111-59674-5

I. ①大… II. ①马… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第073190号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱 郑 玫

责任校对：王 延 封面设计：鞠 杨

责任印制：孙 炜

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

2018年7月第1版第1次印刷

184mm×260mm·17.75印张·432千字

标准书号：ISBN 978-7-111-59674-5

定价：39.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88379833

机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649

机工官博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网：www.golden-book.com



前 言

本书是由云南财经大学、楚雄师范学院、云南财经职业学院、云南大学滇池学院等高等院校一批长期从事数学教学的一线教师编写的。本书涉及内容广泛，涵盖高等数学的三门基础课：微积分、线性代数和概率论与数理统计。主要针对大学数学教学学时较少及自主学习数学的同学们编写。因此为了充分调动同学们学习数学的积极性，本书的编写力图达到概念准确、言简意赅，尽量避免烦琐的理论推导及证明，例题的题型精炼、难度适中，便于同学们掌握数学基础知识。着重强调数学应用，应用实例取材适当、丰富实用，便于同学们学以致用。

同学们在学习数学时，要注意针对不同层次不同类型的学习目标把握学习要点，特别是知识型和技能型两种学习目标。学习活动当然无法严格分为知识型和技能型，多数情况下是多种特征兼有的。对于具体的学习者来说，同一个知识点，常常是先完成知识型目标，在一定基础上才能完成技能型目标。

达成知识型学习目标是本课程学习的重要基础。为了提高同学们对知识型学习目标的完成度，本书特别针对重要知识点配有作者团队录制的“微课”短视频。在本书刚刚出版时，视频数量已经配有超过 50 个，后续还会陆续增加。为了帮助同学们对新知识的历史沿革有所了解，本书特别编写了部分数学文化类阅读材料和“短视频”课程。这部分内容在出版时也超过 20 个，后续持续更新。本书联合“书伴”APP 一起来为同学们提供这部分网上学习功能，软件的使用方式见本书封面介绍。

达成技能型学习目标是课程学习有效性的关键，即同学们完成课程后要求具备一定的解决问题的能力。为了提高同学们对技能型学习目标的完成度，本书编写团队特别邀请“基于大数据的大学数学基础自主学习与考试平台”的开发团队来为同学们提供额外的在线练习的机会。同学们需要关注微信公众号“锐通互动”，在公众号首页点击“课程分类”，选择“大学数学基础”，即可进入本课程的学习模块。目前包括“概念讲解”、“教学课件”、“题库练习”和“试题讲解”。其中，题库练习有上万道各类型题目，经过作者和开发团队十多年开发和优化，覆盖课程全部知识点。部分题目还配有讲解视频。

本书由马锐担任主编，成蓉华、罗兆富、陈斌、梅莹担任副主编。由于本书信息量大且网络功能丰富，所以参编学校、参编人员多。其中纸质教材部分：第一篇微积分（第 1~7 章）主要由云南财经大学的老师完成。第 1 章、第 2 章由成蓉华完成初稿，第 3 章由罗秋瑾完成初稿，第 4 章由罗秋瑾、成蓉华完成初稿，第 5 章由马锐完成初稿，第 6 章由罗兆富完成初稿，第 7 章由昆明学院杨朝丽完成初稿。第二篇线性代数（第 8~10 章）主要由云南大学滇池学院的贾丽丽及云南财经大学的王云秋、宗琮、罗兆富等完成初稿。第三篇概率论与数理统计（第 11~14 章）主要由楚雄师院的梅莹、杨胜及云南财经大学的王云秋、昆明学院的杨春晓等完成初稿。网络（含手机）部分则是由云南财经大学的马锐主持，云南财经大学的赵子雪、罗兆富、成蓉华等负责主要工作，参与资源建设的学校及师生有：云南财经大学的陈龙伟、吕军亮、王彬、葛兴会、张雪琳、李小刚、罗秋瑾、纳静、洪晓春、王海燕、吴迪、赵文静、王云秋、




宗琮、杜荣川等，云南大学滇池学院的贾丽丽等，楚雄师院的杨胜、梅莹等，云南财经职业学院的陈斌、李树伟、蒋辉等。

全书由马锐定稿，由马锐、罗兆富、成蓉华统稿。

尽管在编写本书的过程中各位老师都做出了积极的努力，力求使本书适应学生随时随地自主学习的特点，但因参与编写的人数较多，加之时间仓促，书中难免出现疏漏，欠妥之处也在所难免，恳请各位读者批评和指正。

所有编者

 数学文化扩展阅读 1

数学是什么

目 录

第1章 预备知识与函数	2
1.1 预备知识	2
1.1.1 实数与数轴	2
1.1.2 实数的绝对值	2
1.1.3 区间	3
1.2 函数	3
1.2.1 函数的定义	3
1.2.2 函数的性质	5
1.2.3 反函数	7
1.2.4 基本初等函数	8
1.2.5 复合函数	10
第1章习题	12
第2章 极限与连续	17
2.1 极限的概念	17
2.1.1 数列极限的定义	17
2.1.2 函数极限的定义	18
2.2 无穷大量与无穷小量	20
2.2.1 无穷大量	20
2.2.2 无穷小量	20
2.2.3 无穷大量与无穷小量的关系	21
2.2.4 无穷小量阶的比较	21
2.3 极限计算	21
2.3.1 利用极限的四则运算法则	21
2.3.2 直接代入法	22
2.3.3 利用有界变量与无穷小量的乘积	22
2.3.4 倒数法	22
2.3.5 约去零因式法	23
2.3.6 无穷小量分出法	23
2.3.7 通分法	24
2.3.8 有理化法	24
2.3.9 变量代换法	25
第3章 导数与微分	40
3.1 导数概念	40
3.1.1 实例	40
3.1.2 导数的定义	41
3.1.3 导数的几何意义	42
3.1.4 左导数与右导数	43
3.1.5 可导与连续的关系	44
3.2 求导数的方法	44
3.2.1 基本初等函数求导公式	45
3.2.2 导数运算法则	45
3.2.3 反函数求导法则	46
3.2.4 复合函数求导法则(链式求导法则)	47
3.2.5 隐函数求导法	49
3.2.6 对数求导法	50
3.2.7 高阶导数	51
第2章习题	35
2.5.2 自然增长模型	34
2.5.1 存贷款利息计算	33
2.5 应用实例	33
2.4.6 闭区间上连续函数的性质	31
2.4.5 分段函数的连续性	30
2.4.4 初等函数的连续性	30
2.4.3 连续函数与连续区间	30
2.4.2 函数在一点连续的定义	28
2.4.1 函数的改变量	28
2.4 函数的连续性	28
2.3.12 利用等价无穷小替换求极限	27
2.3.11 利用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 计算相关	25
2.3.10 利用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 计算相关	25





3.3 微分	52	5.4 换元积分法	98
3.3.1 微分的定义	52	5.4.1 第一类换元法(复合函数凑微分法)	98
3.3.2 导数与微分的关系	53	5.4.2 第二类换元法	102
3.3.3 微分的几何意义	54	5.5 分部积分法	107
3.3.4 微分计算	54	第5章习题	109
3.3.5 微分的应用——近似计算	55	第6章 定积分	112
第3章习题	56	6.1 定积分的概念和性质	112
第4章 导数应用	59	6.1.1 从阿基米德的穷竭法谈起	112
4.1 导数应用——洛必达法则	59	6.1.2 曲边梯形的面积计算	112
4.1.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式	59	6.1.3 定积分的概念	113
4.1.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	60	* 6.1.4 定积分的存在定理	115
4.1.3 其他类型的未定式	61	6.1.5 定积分的性质	115
4.2 函数的单调性和极值	63	6.2 微积分基本定理	117
4.2.1 函数单调性	63	6.2.1 积分上限函数及其导数	118
4.2.2 函数的极值	65	6.2.2 微积分基本定理及其应用	119
4.3 最值及其应用	68	6.3 定积分的计算方法	120
4.3.1 闭区间上函数的最值	68	6.3.1 定积分的凑微分法	120
4.3.2 最值的应用	69	6.3.2 定积分的换元法	121
* 4.4 函数图形的描绘	74	6.3.3 定积分的分部积分法	123
4.4.1 曲线的凹向和拐点	74	* 6.4 广义积分	124
4.4.2 曲线的渐近线	76	6.4.1 无穷区间的广义积分	124
4.4.3 函数图形的描绘	78	6.4.2 无界函数的广义积分	126
4.5 导数在经济学中的应用	79	6.5 积分的应用	128
4.5.1 边际分析	79	6.5.1 求原函数	128
4.5.2 弹性分析	81	6.5.2 求平面图形的面积	129
* 4.5.3 相关变化率	84	6.5.3 求旋转体的体积	130
* 4.5.4 最小二乘法	84	6.5.4 求总量	131
第4章习题	88	* 6.5.5 求资产的未来价值与现行价值	132
第5章 不定积分	93	第6章习题	135
5.1 不定积分的概念	93	第7章 微分方程初步	142
5.1.1 原函数	93	7.1 微分方程的基本概念	142
5.1.2 不定积分的概念	94	7.2 可分离变量的一阶微分方程	144
5.1.3 不定积分的几何意义	94	7.3 一阶线性微分方程	146
5.2 不定积分的性质	95	7.3.1 一阶线性微分方程的概念	146
5.3 基本积分公式	96	7.3.2 一阶线性齐次方程的解法	146
		7.3.3 一阶线性非齐次微分方程的解法	147

11.2.2 概率的古典定义	211
11.2.1 概率的统计定义	210
11.2 随机事件的概率	210
11.1.7 事件的运算律	208
11.1.6 事件的关系及其运算	206
11.1.5 事件的集合表示	206
11.1.4 随机事件	205
11.1.3 样本空间	205
11.1.2 随机试验	204
11.1.1 随机现象	204
11.1 随机事件	204
11.2.3 概率的公理化定义	212
11.3 条件概率	213
11.3.1 条件概率	213
11.3.2 乘法公式	214
11.4 事件的独立性	215
第11章习题	216
第12章 随机变量及其分布	218
12.1 随机变量	218
12.2 离散型随机变量及其分布	219
12.3 随机变量的分布函数	221
12.3.1 随机变量的分布函数	221
12.3.2 离散型随机变量的分布函数	222

第三篇 概率论与数理统计

9.1.3 几种特殊矩阵	175
9.1.2 矩阵的概念	175
9.1.1 引例	174
9.1 矩阵的定义	174
第9章 矩阵	174
第8章习题	171
8.2.3 行列式的计算	168
8.2.2 行列式按行(列)展开定理	166
8.2.1 行列式的基本性质	164
8.2 行列式的性质及计算	164
8.1.3 n 阶行列式	163
8.1.2 三阶行列式	161
8.1.1 二阶行列式	160
8.1 行列式的定义	160
第8章 行列式	160
9.2 矩阵的运算	176
9.2.1 矩阵的加法运算	176
9.2.2 矩阵的数乘运算	177
9.2.3 矩阵的乘法运算	177
9.2.4 矩阵的逆	180
9.3 矩阵的初等变换	181
9.3.1 矩阵的初等行变换	181
9.3.2 求逆矩阵的初等变换法	183
9.4 案例	184
第9章习题	188
第10章 线性方程组	191
10.1 克拉默法则解线性方程组	191
10.2 消元法解线性方程组	193
10.3 案例	198
第10章习题	201

第二篇 线性代数

7.4 可降阶的二阶微分方程	149
7.4.1 $y''=f(x)$ 型的二阶微分方程	149
7.4.2 $y''=f(x,y')$ (不显含未知函数 y)	150
型的二阶微分方程	150
7.4.3 $y''=f(y,y')$ (不显含自变量 x)	150
7.5 微分方程的应用	151
第7章习题	155






12.4 连续型随机变量及其分布	223	第 14 章 数理统计初步	243
第 12 章习题	230	14.1 总体与样本	243
第 13 章 随机变量的数字特征	232	14.2 统计量及其分布	244
13.1 随机变量的数学期望	232	14.2.1 统计量	244
13.1.1 数学期望的定义	232	14.2.2 几种常用统计量的分布	245
13.1.2 随机变量函数的数学期望	235	14.2.3 几个重要的抽样分布定理	246
13.1.3 随机变量的数学期望的性质	236	14.3 统计推断	246
13.2 方差	237	14.3.1 点估计方法	247
13.2.1 方差的概念	237	14.3.2 区间估计	249
13.2.2 随机变量的方差的性质	239	14.4 假设检验	252
13.2.3 常见分布的期望和方差	239	第 14 章习题	259
第 13 章习题	241	习题参考答案	261



第一篇

微积分

 数学文化扩展阅读 2

里程碑事件：微积分
的创立



1

第 1 章

预备知识与函数

微积分的主要研究对象是函数. 本章先介绍学习微积分常用的一些预备知识, 然后再介绍函数的相关知识.

1.1 预备知识

1.1.1 实数与数轴

由于微积分中的函数是在实数范围内来讨论的, 因此我们先简单介绍实数集的有关知识.

有理数和无理数统称为实数, 实数的全体所构成的集合称为实数集, 记为 \mathbf{R} .

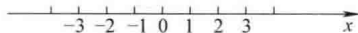


图 1-1

数轴是一条有原点、正方向和单位长度的直线, 如图 1-1 所示.

实数与数轴上的点是一一对应的, 即每一个实数 x 对应于数轴上唯一一个点 P , 反过来, 数轴上的任意一点 P 都对应一个实数 x . 数轴上点 P 按上述对应规则所对应的实数 x 称为点 P 的坐标. 为方便起见, 把点 P 与其坐标视为等同, 有时二者用同一个字母来表示, 比如数 a 也称为点 a , 而点 a 就表示坐标为 a 的点.

1.1.2 实数的绝对值

1. 绝对值的定义

定义 1.1 设 x 是一个实数, 则 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值的几何意义: $|x|$ 表示点 x 到原点的距离, 而 $|x-y|$ 则表示点 x 到点 y 的距离.

2. 基本性质

设 x, y 为任意实数, 则

- (1) $|x| \geq 0$;
- (2) $|-x| = |x|$;
- (3) $-|x| \leq x \leq |x|$;



$$(4) \quad ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|;$$

$$(5) \quad |xy| = |x| \cdot |y|;$$

$$(6) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0).$$

3. 解绝对值不等式

设 x 为任意实数, 则:

$$(1) \quad |x| < a (a > 0) \text{ 的充要条件是 } -a < x < a.$$

$$(2) \quad |x| > b (b > 0) \text{ 的充要条件是 } x > b \text{ 或者 } x < -b.$$

1.1.3 区间

实数集或实数集的一个部分称为区间. 由此, 区间包括四种有限区间和五种无限区间.

定义 1.2 设 a, b 为两个实数, 且 $a < b$, 有限区间和无限区间的定义分别如下:

1. 有限区间

$$\text{开区间 } (a, b) = \{x | a < x < b\};$$

$$\text{闭区间 } [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\};$$

$$\text{半开、半闭区间 } (a, b] = \{x | a < x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\};$$

2. 无限区间

$$\text{无限区间 } \mathbf{R} = (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\},$$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}, (-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\}, (a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}.$$

例 1 用区间表示满足不等式 $|x+3| \geq 2$ 的所有 x 的集合.

解 $|x+3| \geq 2 \Rightarrow x+3 \geq 2$ 或者 $x+3 \leq -2$, 即 $x \geq -1$ 或者 $x \leq -5$.

用区间表示为 $(-\infty, -5] \cup [-1, +\infty)$, 用数轴表示为图 1-2.

例 2 用区间表示满足不等式 $1 < |x-2| < 3$ 的所有 x 的集合.

$$\text{解 } 1 < |x-2| < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-2| > 1, \\ |x-2| < 3, \end{cases}$$

$$|x-2| > 1 \Rightarrow x-2 > 1 \text{ 或者 } x-2 < -1, \text{ 即 } x > 3 \text{ 或者 } x < 1.$$

$$|x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3, \text{ 即 } -1 < x < 5.$$

所以原不等式的解集用区间表示为 $(-1, 1) \cup (3, 5)$, 如图 1-3 所示.



图 1-2

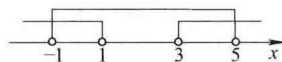


图 1-3

数学文化扩展阅读 3

函数概念的起源、
演变与发展

核心内容讲解 1

函数

1.2 函数

1.2.1 函数的定义

定义 1.3 设 D 是一个非空实数集, 如果按照某一确定的对



应法则 f , 对于每一个 $x \in D$, 都有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 称为自变量; y 称为因变量; D 称为函数的定义域, 也记作 D_f ; $f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的函数值. 全体函数值的集合, 称为函数的值域, 记作 R_f 或者 $f(D)$, 即 $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$.

注: 由定义 1.3 知, 确定一个函数需要两个要素, 即定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同, 我们称这两个函数相同.

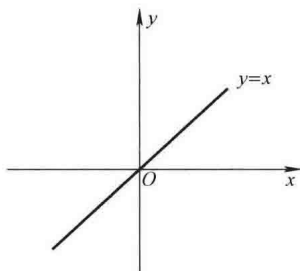


图 1-4

例 3 判断 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是否为相同的函数.

解 $y = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 因此 $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是定义域不同的两个不同的函数. 如图 1-4 与图 1-5 所示.

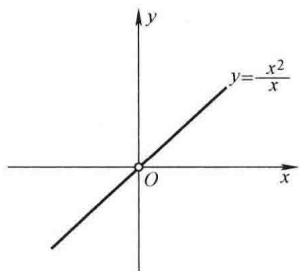


图 1-5

例 4 判断 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数.

解 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$, 但其对应规则不同: 函数 $y = x$, 当 $x > 0$ 时, $y > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y < 0$. 而对 $y = \sqrt{x^2}$, 当 $x > 0$ 时, $y > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y > 0$. 因此二者是定义域相同而对应法则与值域不同的两个不同的函数. 如图 1-4 与图 1-6 所示.

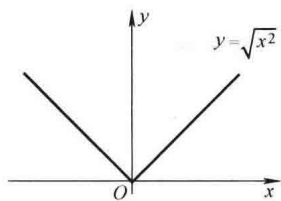


图 1-6

常用的函数表示法有三种: 表格法、图像法和解析法. 下面举例来说明.

例 5 据统计, 2002~2010 年中国人口增长情况如表 1-1 所示.

表 1-1

年份 t	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
人口数 n (百万)	1285	1292	1300	1308	1314	1321	1328	1335	1341

从表 1-1 可以看出 2002~2010 年中国人口随年份的变化而变化的规律: 随着年份 t 的变化, 中国人口数 n 在不断增长. 这种用表格表示函数关系的方法就称为表格法.

例 6 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况, 设某天 24 小时的气温变化曲线如图 1-7 所示.

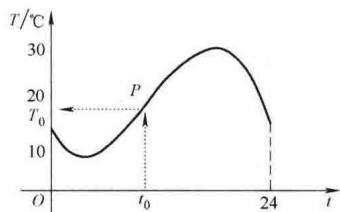


图 1-7

图 1-7 中的曲线描述了一天中温度 T 随时间 t 变化的规律. T 是 t 的函数, t 与 T 之间的相互对应关系由曲线上点的位置确定. 例如, 在图 1-7 中, 曲线上点 P 的横坐标为 t_0 , 纵坐标 T_0 就是



曲线所描述的函数在点 t_0 的函数值. 其定义域为 $[0, 24]$, 值域为 $[10, 35]$. 这种用图形表示函数的方法称为图像法.

例 7 $y = \frac{1}{x(x-1)} + \sqrt{9-x^2}$ 这是用解析式表示的 y 是 x 的函数, 其定义域为 $D = [-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3]$.

根据函数的解析表达式的形式不同, 函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种:

(1) 显函数: 函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如, $y = x^2 + 3$, $y = \log_2(3x+1)$.

(2) 隐函数: 函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x, y) = 0$ 来确定, 例如, $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, $\ln(x+y) = \sin x$.

(3) 分段函数: 函数在定义域的不同部分具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

例 8 $y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$

定义域为 $D = [0, +\infty)$, 其中 $x = 1$ 为分段点, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 其图形如图 1-8 所示.

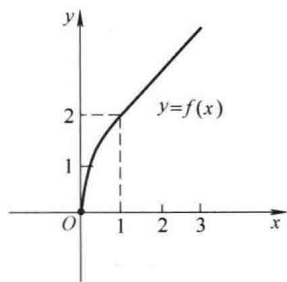


图 1-8

例 9 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

定义域 $D = [-\infty, +\infty)$, 其中 $x = 0$ 为分段点, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-9 所示.

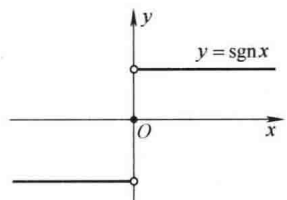


图 1-9

例 10 函数 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1, \\ x^2-1, & 1 < |x| \leq 2, \end{cases}$ (1) 求

$f(x)$ 的定义域; (2) 求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$; (3) 画出 $f(x)$ 的图形.

解 (1) 由于函数 $f(x)$ 在 $|x| = 1$, 即 $x = \pm 1$ 处无定义, 因此其定义域为 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$, 其中 $x = -1$, $x = 1$ 为分段点.

(2) $f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$, $f(-1)$ 不存在, $f(2) = 2^2 - 1 = 3$.

(3) 其图形如图 1-10 所示.

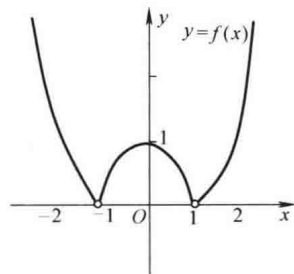


图 1-10

1.2.2 函数的性质

1. 有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 M , 当 $x \in I$ 时, 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数; 如果不存在这样的正

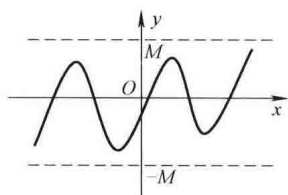


图 1-11

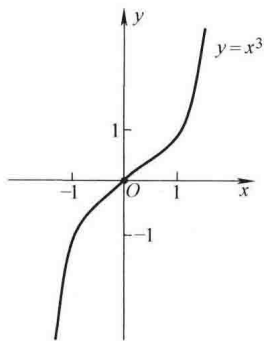


图 1-12

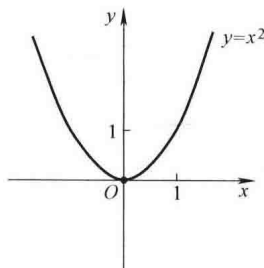


图 1-13

数 M , 则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的无界函数, 如图 1-11 所示.

例如, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 恒有 $|\cos x| \leq 1$, 所以 $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数. 而 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数, 有的函数可能在定义域内的某一部分有界, 而在另一部分无界. 例如, $y = \ln(x-1)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内无界, 而在 $(2, 3)$ 内有界. 因此, 我们说一个函数是有界的还是无界的, 应同时指出其自变量的相应范围.

2. 单调性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$,

(1) $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加 (单调减少);

(2) $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 I 内严格单调增加 (严格单调减少).

例如, $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调增加, 如图 1-12 所示.

$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内严格单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加, 但在整个定义域 \mathbf{R} 内不是单调函数, 如图 1-13 所示.

3. 奇偶性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在集合 D 内有定义, 且 D 关于原点对称, 对于任意的 $x \in D$,

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

由定义 1.6 易知, 奇函数的图像关于原点对称, 而偶函数的图像关于 y 轴对称, 例如, $y = x^3$ 为奇函数 (见图 1-12), $y = x^2$ 为偶函数 (见图 1-13). $y = x^2 + x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 11 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$;

(2) $g(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ 1+x, & x \geq 0. \end{cases}$

解 (1) 因为 $f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1} + x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$= -f(x),$$

所以 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 是奇函数.

(2) 因为 $g(-x) = \begin{cases} 1-(-x), & -x < 0, \\ 1+(-x), & -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1+x, & x > 0, \\ 1-x, & x \leq 0 \end{cases} = g(x),$

所以 $g(x)$ 为偶函数.



4. 周期性

定义 1.7 设函数 $f(x)$ 在集合 D 内有定义, 如果存在常数 $T (\neq 0)$, 使得对任意的 $x \in D$ 都有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常周期函数的周期是指其最小正周期.

例如, $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $\tan x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

1.2.3 反函数

1. 反函数的定义

定义 1.8 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 R_f , 如果对每个 $y \in R_f$, 都有唯一的对应值 x 满足 $y = f(x)$, 则称 x 是定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为

$$x = f^{-1}(y), y \in R_f,$$

并称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

显然, $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数, 且 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域.

习惯上, 常用 x 作为自变量, y 作为因变量, 因此, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 常记为 $x = f^{-1}(x)$, $x \in R_f$.

在平面直角坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

由定义 1.8 知, 函数 $y = f(x)$ 具有反函数的充要条件是自变量与因变量是一一对应的, 因为严格单调函数具有这种性质, 所以严格单调函数必有反函数.

2. 求反函数的步骤

- (1) 把 x 作为未知数, 从方程 $y = f(x)$ 中解出, 得 $x = f^{-1}(y)$;
- (2) 在所得的表达式中, 将 x 与 y 互换, 即得 $y = f^{-1}(x)$.

例 12 求 $y = x^2$ 的反函数, 并在同一直角坐标系下画出它们的图形.

解 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无反函数, 因为 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是一一对应的, 而在 $(0, +\infty)$ 内, 其反函数为 $y = \sqrt{x}$, 在 $(-\infty, 0)$ 内, 其反函数为 $y = -\sqrt{x}$, 图像如图 1-14 所示.

例 13 求 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解 由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 得 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, 解之得 $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$.

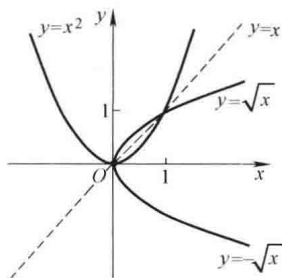


图 1-14



因 $e^x > 0$, 故 $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$ 应舍去, 从而有 $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, 求得

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

所以, $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in (-\infty, +\infty)$.

1.2.4 基本初等函数

我们把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数称为基本初等函数. 这些函数, 我们在中学数学中都已学过, 对微积分的学习很重要.

1. 常数函数

$y = c$ (c 为常数), 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{c\}$. 图像如图 1-15 所示, 它是一条平行于 x 轴的直线.

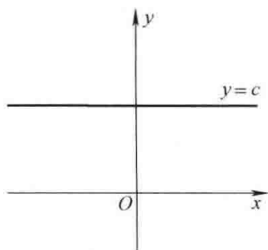


图 1-15

2. 幂函数

$y = x^\mu$ (μ 为实数, 且 $\mu \neq 0$), 其定义域随 μ 的不同而相异, 但不论 μ 取何值, $y = x^\mu$ 总在 $(0, +\infty)$ 内有定义, 并且图像均经过点 $(1, 1)$. 当 $x > 0$ 时, 若 $\mu > 0$, 则 $y = x^\mu$ 为严格单调增加函数 (见图 1-16a); 若 $\mu < 0$, 则 $y = x^\mu$ 为严格单调减少函数 (见图 1-16b).

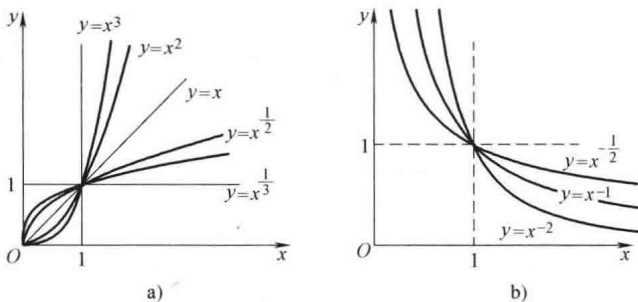


图 1-16

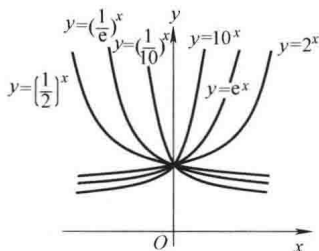


图 1-17

3. 指数函数

$y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.

当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 为严格单调减少函数; 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 为严格单调增加函数. 无论 a 为何值, $y = a^x$ 的图像均经过点 $(0, 1)$ (见图 1-17).

在实际问题中, 常见以 e 为底的指数函数 $y = e^x$ ($e = 2.718\ 281\ 8\cdots$ 为无理数).

4. 对数函数

$y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 它是指数函数 $y = a^x$ 的反函数.