高等数学例题选讲

主　编　王志平
副主编　谢海燕　秦　琼
主　审　赵连昌

大连海事大学出版社

高等数学例题选讲

主　编　王志平
副主编　谢海燕　秦　琼
主　审　赵连昌

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学例题选讲 / 王志平主编. —大连 : 大连海事大学出版社, 2018.8
ISBN 978-7-5632-3690-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 193808 号

大连海事大学出版社出版

地址:大连市凌海路1号 邮编:116026 电话:0411-84728394 传真:0411-84727996
http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com

大连住友彩色印刷有限公司印装 大连海事大学出版社发行

2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷
幅面尺寸:170 mm×230 mm 印张:9.75
字数:182 千 印数:1~1000 册

出版人:徐华东

责任编辑:苏炳魁 责任校对:张 华
封面设计:张爱妮 版式设计:张爱妮

ISBN 978-7-5632-3690-9 定价:22.00 元

内容提要

本书是依据高等数学教学基本要求为数学专业本科生编写的一本教材,也可作为非数学专业本科生学完高等数学课程后参加数学竞赛的教材或主要参考书。全书共十章,内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、一元函数积分学及应用、多元函数微分法及应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程、真题剖析。每章均有主要题型及重要结论、解题思路。各章例题丰富,题型多样,每种题型都有相应的解题方法、有详尽的分析及小结,有助于培养学生分析问题、解决问题的能力。

前　言

解题训练是高等数学课堂教学中的一个重要环节。然而,依据学校高等数学课程的教学计划,由于安排的课时少、内容多,往往在课堂上没有时间讲更多的习题,而且每种题的题型、思路、技巧很少涉及,这势必影响课堂教学的效果。为了解决这一矛盾,使学生对每章的主要概念有深刻的理解,对每章内容有充分的了解,对每章的题型的范围、难易程度、解决方法有较熟练的掌握,我们编写了这本《高等数学例题选讲》。

本书有如下特点:

第一,全书注重以解题方法为主,列举了大量的典型例题。

第二,将每章的例题分类归纳,总结出解各种类型试题的方法和途径。

第三,对许多典型例题进行详尽的分析,以帮助学生学会如何解题。

第四,前九章列举了许多综合性的例题,最后一章主要是真题剖析。

本书在编写过程中,始终得到数学系其他教师的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。由于作者的见识和水平有限,书中难免会有疏漏和错误,恳请广大读者批评指正。

编者

2018 年 7 月

目　录

第一章 极限与连续

重要结论

1 无穷小的运算

设 m,n 是正整数,其中 $m > n$,则

(1) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^n)$;

(2) $o(x^m) \times o(x^n) = o(x^{m+n})$;

(3) $o(x^m) \div o(x^n) = o(x^{m-n})$.

2 洛必达法则

法则 1 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$设 $f(x)$、$g(x)$ 满足条件:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

(2) $f(x)$、$g(x)$ 在 x_0 的空心邻域内可导且 $g'(x) \neq 0$;

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$(或 ∞),则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则 2 $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$设 $f(x)$、$g(x)$ 满足条件:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;

(2)存在一个 $X > 0$,当 $|x| > X$ 时,$f(x)$、$g(x)$ 可导,且 $g'(x) \neq 0$;

(3)若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$(或 ∞),则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,有类似的洛必达法则.

3 泰勒公式应用

(1) $\frac{0}{0}$ 型;

(2) $\frac{f_1(x)-g_1(x)}{f_2(x)-g_2(x)}$ 或 $\frac{x^k}{f_2(x)-g_2(x)}$ 或 $\frac{f_1(x)-g_1(x)}{x^k}$;

(3)用洛必达法则求极限较复杂.

4 两边夹法则

(1)若 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \ (n \geqslant N)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$;

(2) $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \ [x \in \mathring{U}(x_0,\delta)]$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

5 施笃兹定理

设数列 $\{b_n\}$ 单调增加,而且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 存在或为 $\pm\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$.

6 定积分定义

数列之和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)$(或可转化为数列之和的极限).一般项为 $a_i = f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$ 或用两边夹法则后可转化为 $f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$,即

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

例题解析

例 1 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\frac{1}{x})^{x^2}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{-1}(1+\frac{1}{x})^x\right]^x$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x[x\ln(1+\frac{1}{x})-1]}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\{x[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]-1\}}$$

$= e^{-\frac{1}{2}}.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$.

解 由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$

$\sqrt{1-x}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-1)x^2+o(x^2)$

$\cos\sqrt{x}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x^2}{4!}+o(x^2)$

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{8}x^2-\frac{x^2}{4!}+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2!}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{8}-\frac{1}{4!}+\frac{o(x^2)}{x^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}}=-3.$$

例3 设 $\{x_n\}$ 定义为：$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,\cdots)$.
求证：$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

证明 若 $0<x_1<1$，假设 $0<x_n<1$，则由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,\cdots)$，知 $0<x_{n+1}<1$，所以由数学归纳法知 $0<x_n<1$.

又 $x_{n+1}-x_n=-x_n^2<0(n=1,2,\cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 单调递减，由单调有界原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以 $a=a(1-a)$，$a=0$.

又 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 单调递增，所以由施笃兹公式得：

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}}=1.$$

例4 设 $x_1=2,x_2=2+\dfrac{1}{x_1},x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在，则 $A=2+\dfrac{1}{A}$，$A=1+\sqrt{2}$.

以下证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

$\forall\varepsilon>0$，$|x_n-A|=\left|\dfrac{1}{x_{n-1}}-A\right|=\dfrac{|x_{n-1}-A|}{x_{n-1}A}<\dfrac{|x_{n-1}-A|}{4}\left(x_{n-1}=2+\dfrac{1}{x_{n-2}}>\right.$ $\left.2,A>2\right)<\dfrac{|x_{n-2}-A|}{4}<\cdots<\dfrac{|x_1-A|}{4^{n-1}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1+\sqrt{2}$.

例 5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\ (c\neq0)$，求 a,b,c.

解 因为 $x\to0$ 时，分子 $ax-\sin x\to0$，所以分母 $\to0$，

即 $\int_b^0\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$，故 $b=0$.

由洛必达法则，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=c$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(a-\cos x)}{x^3}=c$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c$，

所以 $a=1,c=\dfrac{1}{2}$.

习题一

一、计算题

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^d-\dfrac{1}{d+1}n^{d+1}}{n^d}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+j^2}$.

二、证明题

1. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$ ($n=1,2,\cdots$).

(1)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求该极限;

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

2. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots).$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

习题一部分参考答案

一、计算题

1. $\dfrac{1}{6}$.

2. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

3. $\dfrac{1}{2}$.

4. 2π.

5. $\dfrac{1}{6}$.

6. $\dfrac{\pi}{2}$.

二、证明题

省略.

第二章　导数与微分

重要结论

1 函数在 x_0 处的导数的定义

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f[x_0+\varphi(x)]-f(x_0)}{\varphi(x)}$$

$[\varphi(x)\to 0,\ x\to x_0]$.

2 函数可导的充分必要条件

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

3 导数 $f'(x_0)$ 的几何意义

曲线 $y=f(x)$ 在点 $[x_0,f(x_0)]$ 处切线的斜率,且

切线方程:$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程:$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0)$.

4 函数可导、可微与连续的关系

$$\begin{tikzcd} \text{可导} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{可微} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\ & \text{连续} \arrow[ul, shift left, "\times"] \arrow[ur, shift left, "\times"] & \end{tikzcd}$$

5 高阶导数的定义

若 $f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ 存在 $\Leftrightarrow f_+^{(n)}(x_0)=f_-^{(n)}(x_0)$.

6 **求导公式及法则**

(1) 函数的求导公式及 $\sin^{(n)}(x)$、$\cos^{(n)}(x)$、$\ln^{(n)}(1+x)$、$(a^x)^{(n)}$、$(x^\mu)^{(n)}$、$\left(\frac{1}{1\pm x}\right)^{(n)}$、$(u\cdot v)^{(n)}$ 公式;

(2) 函数的和、差、积、商,反函数、复合函数、隐函数、参数式方程的求导法则及微分法则.

7 **导函数的周期性**

可导的周期函数的导函数是周期函数.

8 **导函数的奇偶性**

可导的偶函数的导函数是奇函数,可导的奇函数的导函数是偶函数.

例题解析

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$.

求证:$f'(0)$ 存在且 $f'(0)=A$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$,知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A$,即对任意给定 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<x<\delta$ 时,

$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-A\right|<\varepsilon$,即 $x(A-\varepsilon)<f(2x)-f(x)<x(A+\varepsilon)$.

由上式可得 $\frac{x}{2}(A-\varepsilon)<f(x)-f(\frac{x}{2})<\frac{x}{2}(A+\varepsilon)$,

$\frac{x}{2^2}(A-\varepsilon)<f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})<\frac{x}{2^2}(A+\varepsilon)$,

$\frac{x}{2^3}(A-\varepsilon)<f(\frac{x}{2^2})-f(\frac{x}{2^3})<\frac{x}{2^3}(A+\varepsilon)$,

…

$\frac{x}{2^n}(A-\varepsilon)<f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})<\frac{x}{2^n}(A+\varepsilon)$.

将以上不等式相加得

$$\frac{x}{2}(A-\varepsilon)\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<\frac{x}{2}(A+\varepsilon)\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

令 $n\to\infty$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,得

$x(A-\varepsilon)<f(x)-f(0)<x(A+\varepsilon)$.

任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<x<\delta$ 时,

$$-\varepsilon<\frac{f(x)-f(0)}{x}-A<\varepsilon.$$

即 $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-A\right|<\varepsilon$,所以,$f'_+(0)=A$.

同理可证 $f'_-(0)=A$.

因此 $f'(0)=A$.

例 2 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在 $(0,0)$ 处的切线相同,写出此切线方程并求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由已知条件,得

$$f(0)=0,\ f'(0)=y'(0)=\left.\frac{e^{-(\arctan x)2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1.$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\text{则}\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\times\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2\times f'(0)=2.$$

例 3 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$、$f(x)$ 连续知 $f(0)=0,\varphi(0)=0$. 令 $xt=u,x\neq0$,则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}.$$

$$x\neq0\text{ 时},\ \varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

故

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf(x) - \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x) - \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}$$ [化简(分解),因 $f(x)$ 连续,

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}$$ 所以不能用洛必达法则]

$$= A - \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = A - \frac{A}{2}$$

$$= \frac{A}{2} = \varphi'(0).$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 4 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0) = f'(0) = 0$,记

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \mathrm{d}u \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t, & x \leqslant 0, \\ \int_{-x}^0 \ln[1 + f(x+t)]\,\mathrm{d}t, & x > 0. \end{cases}$$

求 $F'(x)$ 及 $F''(0)$.

解 当 $x < 0$ 时, $F'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$;当 $x > 0$ 时,令 $u = x + t$,则 $F(x) = \int_0^x \ln[1 + f(u)]\,\mathrm{d}u$,得

$$F'(x) = \ln[1 + f(x)].$$

由于 $F'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\int_0^x \mathrm{d}u \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\ln[1+f(u)]\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln[1+f(u)]=$ $\ln[1+f(0)]=0$. 所以 $F'(0)=0$,从而

$$F'(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\ x<0\\0,\ x=0\\\ln[1+f(x)],x>0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}F''_-(0)&=\lim_{x\to0^-}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}==\lim_{x\to0^-}f(x)=0.\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}F''_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{F'(x)-F'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[1+f(x)]}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=f'(0)\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $F''(0)=0$.

例 5 设 $\begin{cases}x=\cos(t^2)\\y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u.\end{cases}$

求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

解 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{2t\sin(t^2)}$.

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

例 6 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ ________.

解　利用直接法,方程两边对 x 求导

$$e^y \cdot y' + 6y + 6xy' + 2x = 0 \quad ①$$

再求导,得

$$e^y \cdot y'' + e^y \cdot (y')^2 + 6y' + 6y' + 6xy'' + 2 = 0 \quad ②$$

在式①中令 $x = 0$,得

$$y'(0) = -y(0) = 0$$

在式②中令 $x = 0$,得

$$y''(0) = -2$$

例 7　设 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$.

解　由 $y' = \dfrac{x}{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - \dfrac{1}{1-x^2}$,则

$(1-x^2)y' - xy - 1 = 0$

$(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$

…

$(1-x^2)y^{(2n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0$

当 $x = 0$ 时,

$y' = -1$, $y'' = 0$, $y''' = -4\cdots$, $y^{(2n)}(0) = 0$, $y^{(2n+1)}(0) = -4^n \cdot (n!)^2$.

习题二

一、填空题

1. 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt =$ ________.

2. $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定,则 $\dfrac{dy}{dx} =$ ________.

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有连续的导数,而且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{f(x)}{x}\right] = 2$,求 $f(0)$、$f'(0)$.

4. 设 $f(x)$ 可导,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)}{f(x)}\right]^n = e^{\cot x}$,求 $f(x)$.