普通高等教育“十三五”规划教材
卓越工程师培养计划系列教材

机械结构优化设计
（第2版）

An Introduction to Mechanical Structural Optimization (2nd Edition)

姚寿文　崔红伟 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育"十三五"规划教材
卓越工程师培养计划系列教材

机械结构优化设计

（第2版）

An Introduction to Mechanical Structural Optimization
(2nd Edition)

姚寿文　崔红伟 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

机械结构优化设计/姚寿文，崔红伟主编．—2版．—北京：北京理工大学出版社，2018.6

ISBN 978-7-5682-5707-7

Ⅰ．①机…　Ⅱ．①姚…②崔…　Ⅲ．①机械设计-结构设计-最优设计-高等学校-教材　Ⅳ．①TH122

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第119915号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市华骏印务包装有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／11.25
字　　数／270千字
版　　次／2018年6月第2版　2018年6月第1次印刷
定　　价／38.00元

责任编辑／张慧峰
文案编辑／张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／王美丽

PREFACE 前言

机械结构优化设计（本书也简称为结构优化设计）是一种现代设计理论和方法。它是优化理论和方法在机械设计领域的应用。本书主要围绕结构优化设计中的三种基本分类，即尺寸优化、形状优化（形状优化由于涉及结构边界的复杂数学描述，本书不作详细介绍）和拓扑优化，进行问题的描述以及求解，并主要集中在线弹性体的离散结构（桁架）和有限元离散的平面连续体两大方面。

本教材要求学生具有一定高等数学、线性代数、固体力学和结构力学知识，尤其是有限元的基础知识。由于学时较少，为使全书有较好的体系，便于广大学生自学，在教材的内容上安排了 A～C 三个附录，补充教材中涉及的一些基础知识和必备知识。

本教材按两大部分进行组织。第 1 部分包含第 1 章到第 8 章，主要为结构优化的一些理论、方法。第 1 章介绍了结构优化设计的基本思想、三种结构优化的定义以及一些专用概念和专门术语。第 2 章结合几个小型优化问题进行了基本过程的分析，让学生熟悉基本流程。第 3 章以重要的凸问题为对象，介绍了相关的理论和方法。第 4 章从算法的角度，介绍了几种序列显式凸近似方法，并对 CONLIN 和 MMA 给出了较为详细的推导。第 5 章主要以桁架为研究对象，以柔度为优化目标，对尺寸优化进行了详细的讲述。第 6 章主要结合优化分析中常用的灵敏度分析要求，给出了几种灵敏度分析方法。第 7 章介绍了二维形状优化中涉及的边界描述以及灵敏度分析等，第 8 章主要是以连续体为对象，对刚度拓扑优化进行了分析，并将显式凸近似中的优化准则法（OC）进行了推导，讨论了网格依赖性、数值不稳定等问题。第 2 部分为 3 个附录，主要补充第 1 部分中涉及的一些数学、数值优化算法等知识，并以程序的形式将一些经典的优化方法进行简单介绍，完善部分学生的知识结构。

本书适合作为机械类专业高年级本科生、研究生的教材使用，也可供相关研究人员或技术人员参考。

本教材由北京理工大学姚寿文、崔红伟主编并负责统稿。由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2018年2月于北京

目　录
CONTENTS

第 1 章
概　　述

传统机械产品设计主要依赖设计者经验进行结构形式的选择和参数的确定。随着科学技术的发展，尤其是有限元技术及商业软件的发展，为机械结构设计过程中的强度分析提供了重要的方法与手段。但从设计方法而言，机械产品的设计仍未突破传统的经验设计的局限，如结构拓扑形式的确定、形状的选择以及结构尺寸参数的优选等。创新设计是有效提高产品质量的关键。

本章主要介绍结构优化的基本概念及其重要术语，并对设计过程中所需的数学、力学等基本知识做了简要的介绍。同时，对两种优化设计的数学表述形式进行了说明，最后，定义了三种优化方法——拓扑优化、形状优化和尺寸优化，并给出了相关实例。

1.1　结构优化的基本思想

结构本身是一种观念形态，又是物质的一种运动状态。结是结合，构是构造。在不同领域，它有不同的含义。在力学领域，结构是指可以承受一定力的结构形态（本书意指组成结构的材料分布），它可以抵抗能引起形状和大小改变的力。优化意指在某方面更加优秀而放弃其他不太重要的方面，因此优化其实是一个折中的过程。结构优化意指是某种结构最好，表现在不确定结构形状的情况下，结合结构所实现的功能，实现结构原始设计。如图 1.1 所示，为某零件的初始设计域，受载荷和固定约束，所谓的结构优化就是指如何找到一种合适的结构满足“最好”的功能需求。

“最好”是针对目标而言的，根据不同的使用目的有不同含义，如在满足结构功能的情况下，质量最小，或者刚度最大，或对结构屈曲和稳定性不敏感等。显然，若没有任何限制，这种最小或最大也是无意义的。如若对结构无材料限制，则结构可以设计足够大的刚度，但同时我们得不到一个优化解。通常，在结构优化中所使用的约束有应力、位移和几何

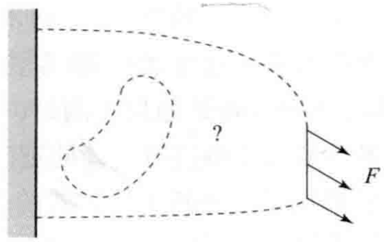

图 1.1　结构优化问题：找到一种结构，
更好地将载荷传递到约束上

形状等。值得注意的是，约束同时也可以作为优化目标。在结构性能的表现上，所能测量的量有质量、刚度、临界载荷、应力、位移和几何形状等。在结构优化中，我们选取可以最大化或最小化的某些量作为目标，而其他量作为约束。

1.2 结构设计基本过程

目前的结构设计过程主要是基于经验和类比，并辅之以有限元分析。基本过程：根据规定的约束条件（设计任务），经过分析计算，确定设计参数，满足某项或几项设计要求，若不满足，更改设计参数，如图 1.2 所示。它是在调查分析的基础上，参照同类产品，通过估算、验算、类比或试验等方法来确定产品的初步设计方案。

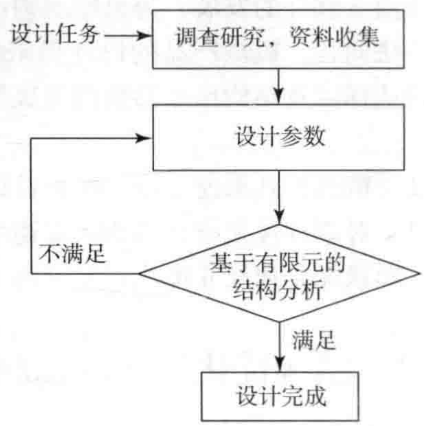

图 1.2　传统结构设计基本过程

上面所列出结构性能的指标纯粹是从力学角度出发的，其中并没有考虑结构的功能、经济性或美学等方面的要求。为了更好地理解这些性能指标在结构优化中的位置，本文利用一个通用的产品设计过程简要描述一些主要步骤。在理想情况下，这些步骤可以归纳为：

（1）明确功能。明确产品的用途，如在设计桥梁时，要确定桥的长度、宽度、单向或双向车道数、日常使用的载荷范围等。

（2）概念设计。需要采用哪种结构设计理念，如桥梁设计成斜拉桥，还是拱桥，抑或桁架桥。

（3）优化设计。确定基本设计理念后，仍须确定在什么功能约束下，使产品尽可能好。如在桥梁设计时，降低造价是很自然的想法，间接表现在使用尽可能少的材料等。

（4）细节设计。这一阶段通常由市场、社会和美学等因素决定。以桥梁为例，如选择一种可以增加视觉享受的颜色。

在第三步中，传统的也是目前主导的方法是迭代-启发式过程，具体过程为：（a）特定设计的提出；（b）检验基于功能的性能；（c）如果不满足，如应力过大，则需提出新的设计，有时即使条件满足，但由于其他原因也得进行设计的更改（如桥梁自重过大）；（d）提出的新设计，然后回到（b）。这就形成了一个基于启发式的迭代过程，得到一系列的设计，目的是期望得到一个可接受的最终设计。

对于一个机械结构，步骤（3）中迭代-启发实现中的步骤（b），目前无一例外地利用计算机完成，如有限元（FEM）和多体动力学（MBD）等。这些方法的应用可以确保每个设

计迭代具有足够的可信度，且每次迭代可以达到很高的计算效率。但是，它们不能改变初始设计方案。

从概念上，基于数学优化方法的机械优化设计和迭代-启发式设计还是有本质区别的。在前者中，数学优化问题是通过公式体现的，此时由功能确定的需求作为约束，而且“尽可能好”是通过具体的数学语言描述的。因此，在步骤（3）设计过程中，基于数学的设计优化方法比迭代-启发式更具自动实现功能。

本书主要关心数学优化设计中的一类问题，即机械结构的承载功能问题。该种优化定义为结构优化。

显然，不是所有的因素都可以以数学优化方式看待，基本的要求是所考虑的因素是可以测量的物理量。对力学参数这是很容易实现的，但美学因素则很难用数学进行衡量。

1.3 结构优化问题的通用数学描述

在结构优化问题的通用数学描述中，常用的函数和变量有：

（1）目标函数（Objective function）f：目标函数用于衡量设计的优劣，也称为评价函数。对每一可能的设计，目标函数所返回的值表征设计的好坏。一般地，目标函数的选择原则是函数值较小比较大的好，即最小化问题。通常，目标函数常用于评价结构质量、给定方向的位移、有效应力或产品的费用等。

（2）设计变量（Design variable）x：描述设计的函数或向量，且在优化过程中是变化的。它可以表示几何或材料的选择。当设计变量用于描述几何时，它可以是描述结构形状的复杂插值函数，或仅是杆的横截面积、板的厚度等简单变量。

（3）状态变量（State variable）y：对于一个给定的结构，即一个给定的设计 x，y 一般表示为结构响应的函数或向量。对机械结构而言，响应通常指位移、应力、应变或力等。

结构优化 $\mathbb{SO}$ 通常可以表示成如下形式：

$$(\mathbb{SO})\begin{cases}\min f(x,\ y)\\ \text{s. t.}\begin{cases}\text{关于 } y \text{ 的行为约束}\\ \text{关于 } x \text{ 的设计约束}\\ \text{等式约束}\end{cases}\end{cases}$$

式中，s. t. 表示受限于（Subject to）。

对于多目标的函数，可以描述为

$$\min(f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y),\ \cdots,\ f_l(x,\ y)) \tag{1.1}$$

式中，l 是目标函数的数目，约束同 $\mathbb{SO}$。实际上，这不是一个标准的优化问题，因为对于所有的目标函数而言，通常不可能在相同的 x 和 y 处取得极小值。典型的是，试图找到一个所谓的非劣优化解（Pareto optimality）。非劣解意指再也找不到一个更好地满足所有目标函数的设计。如果没有（x，y）可以比（x^*，y^*）更好地满足所有约束，则（x^*，y^*）为非劣解，即

$$f_i(x,\ y)\geqslant f_i(x^*,\ y^*)，\text{所有的 } i，i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$

$$f_i(x,\ y)> f_i(x^*,\ y^*)，\text{至少一个 } i，i\in(1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

取得式（1.1）的一个非劣解常用的方法是构造一个单目标的目标函数

$$\sum_{i=1}^{l}\omega_i f_i(x, y) \tag{1.2}$$

式中，$\omega_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, l$，称为权重系数，且满足 $\sum_{i=1}^{l}\omega_i = 1$。

在优化模型（$\mathbb{SO}$）的约束下，优化问题式（1.2）表示的最小化问题是一个标准的单目标优化问题。该问题的解是式（1.1）的非劣解（Pareto optimum）。权重系数不同，非劣解也不同。需要说明的是，采用这种简单的处理方法，一般不能得到优化模型所有的非劣解。

本教材仅考虑形如（$\mathbb{SO}$）的结构优化问题，即单目标优化问题。对于多目标优化问题可参考其他教材。

在优化模型（$\mathbb{SO}$）中，列出了三种类型的约束：

（1）行为约束（Behavioral constraint）：行为约束是针对状态变量 y 的约束，如指定方向的位移等。一般用函数 g 表示，写成 $g(y) \leqslant 0$。

（2）设计约束（Design constraint）：设计约束和行为约束类似，只不过该约束针对的是设计变量 x。实际上，这两种约束可以进行合并处理。

（3）平衡约束（Equilibrium constraint）：对于一个自然离散或线性离散问题（见 1.5 节），平衡约束为：

$$\boldsymbol{K}(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(x) \tag{1.3}$$

式中，$\boldsymbol{K}(x)$ 是结构的刚度矩阵，通常是设计变量 x 的函数，$\boldsymbol{u}$ 是位移向量，$\boldsymbol{F}(x)$ 是载荷向量，可能和设计变量有关。此时，位移向量 $\boldsymbol{u}$ 取代了常用的状态变量 y。在连续体问题中，平衡约束以偏微分方程描述。而且，在动力结构优化（Dynamic structural optimization）问题中，平衡约束应看作是动力平衡方程。广义上，一般用状态问题（state problem）表示平衡约束。

在方程（$\mathbb{SO}$）中，y 和 x 一般按独立变量处理。一般称方程（$\mathbb{SO}$）为方程组（simultaneous formulation），因为平衡约束（状态问题）的解和优化问题的解是同时得到的。然而，通常的情况是，状态方程定义了状态变量 y 和设计变量 x 之间的关系。例如，如果 $\boldsymbol{K}(x)$ 对任意 x 可逆，则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{K}(x)^{-1}\boldsymbol{F}(x)$。通过将 $\boldsymbol{u}(x)$ 看作是一个确定的函数，则在优化模型（$\mathbb{SO}$）中可以不用考虑平衡约束，因为平衡约束可以用状态变量代替，即

$$(\mathbb{SO})_{\mathrm{nf}}\begin{cases}\min\limits_{x} f(x, \boldsymbol{u}(x)) \\ \text{s. t. } g(x, \boldsymbol{u}(x)) \leqslant 0\end{cases}$$

这里已假设所有状态约束和设计约束可以写成 $g(x, \boldsymbol{u}(x)) \leqslant 0$ 的形式。这个方程称为嵌套方程（nested formulation），也是本书中数值方法所常用的一种表达形式。

当对优化模型 $(\mathbb{SO})_{\mathrm{nf}}$ 进行数值求解时，通常需要求目标函数 f 和约束函数 g 关于设计变量 x 的导数。求导数的过程称为灵敏度分析。函数 $\boldsymbol{u}(x)$ 是一个隐式函数，这给方程求解带来极大的不便。

1.4　三种类型的结构优化问题

本教材中，x 无一例外地表示结构的某种几何特征。根据几何特征的不同，将结构优化模型进行如下三种形式的分类：

(1) 尺寸优化 (Sizing optimization): 此时 x 一般表示为结构某种类型的厚度，如桁架中各杆的横截面积，或者板的厚度分布等。图 1.3 表示的是桁架结构的尺寸优化。

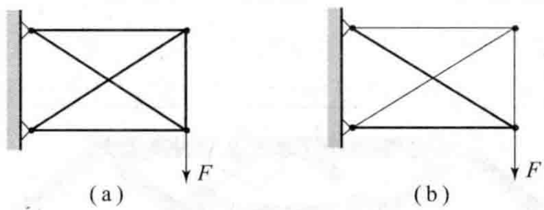

图 1.3 由桁架杆截面积优化获得的尺寸优化问题
(a) 初始设计；(b) 优化后的设计

(2) 形状优化 (Shape optimization): 此时，x 代表结构设计域的形状或轮廓。考虑一个固体，采用一组偏微分方程描述它的状态。优化过程包括采用一种最优的方法选择微分方程的积分域。注意，形状优化不会改变结构的连通性，即不会产生新的边界。二维形状优化问题如图 1.4 所示。

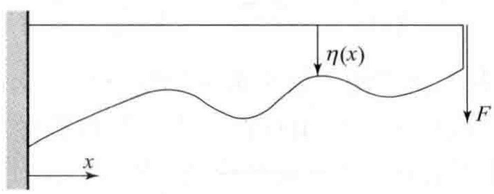

图 1.4 形状优化问题：找到类似梁的最优形状函数 $\eta(x)$

(3) 拓扑优化 (Topology optimization): 拓扑优化是最常见的结构优化形式。对于离散结构，如桁架，一般是利用杆的截面积作为设计变量，并允许杆的截面积为零，即该杆从桁架中消失了，如图 1.5 所示。此时，改变了结点的连接情况，因此我们说桁架的拓扑发生了改变。对于连续体结构，如二维平面薄板，可以通过允许板的厚度为零，实现拓扑形式的改变。如果纯粹是结构拓扑特征的优化，优化后的厚度应仅存在两种值：0 和给定的最大厚度值。在三维结构中，可以假设 x 为某种类似密度的变量，且仅能取 0 和 1，也可以达到同样的效果。图 1.6 为某拓扑优化实例。

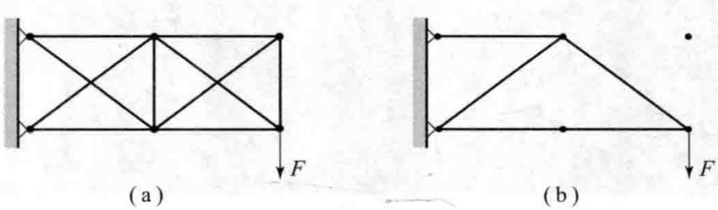

图 1.5 桁架拓扑优化：允许杆的截面积为零达到删除杆的目的
(a) 初始设计；(b) 优化后的设计

理论上，形状优化是拓扑优化的子类，但在实际实现中又采用了完全不同的方法，因此无论是本教材还是其他参考书，一般将这两种优化方法单独处理。再看拓扑优化和尺寸优化的关系，情况是相反的：在基本理念上，它们采用了完全不同的方法，但在实际应用中又非常相近。

当由微分方程描述状态问题时，形状优化包含方程积分域的改变，而尺寸和拓扑优化主要涉及的是结构参数的控制。

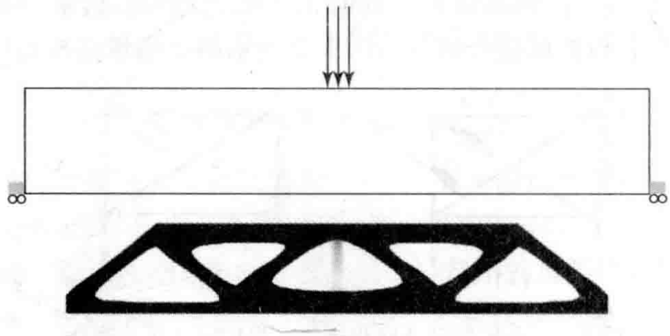

图 1.6　二维拓扑优化：在载荷和边界条件下，要求上图中框内的材料填充 50％且结构的性能最好，下图为优化后的材料分布

针对上述不同的结构优化问题，对 1.2 节中描述的设计过程，存在两种不同的要求：首先，步骤（2）和步骤（3）之间的边界是不同的，如结构优化中应用最广泛的拓扑优化对设计概念的描述要求不高，而形状优化需要详细的设计描述。其次，在结构优化过程中，仅部分采用了启发-迭代方法，启发较少，因为在完成步骤（3）之前，就必须求解不同类型的结构优化问题。

图 1.7 是我国历史上著名的赵州桥。赵州桥又称安济桥，坐落在河北省赵县的洨河上，横跨在 37 米多宽的河面上，因桥体全部用石料建成，当地称做“大石桥”。赵州桥建于隋朝，公元 595—605 年间，由著名匠师李春设计建造，距今已有 1400 多年的历史，是当今世界上保存最完整的古代单孔敞肩石拱桥。赵州桥凝聚了古代劳动人民的智慧与结晶，开创了中国桥梁建造的崭新局面。图 1.8 为利用结构优化方法设计的赵州桥，具有和现有赵州桥相同的拓扑结构，体现了结构优化在结构设计上的应用。

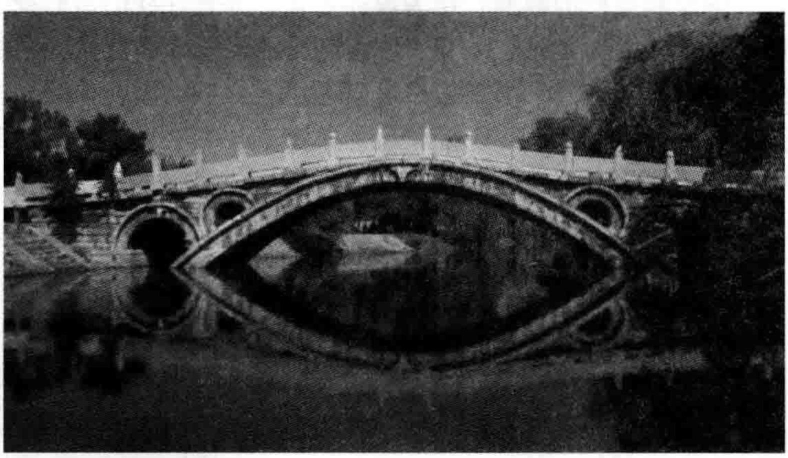

图 1.7　赵州桥

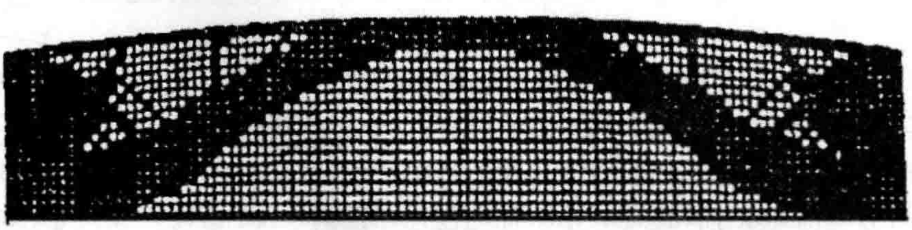

图 1.8　结构优化方法设计的赵州桥

1.5 离散和分布参数系统

根据情况的不同，设计变量 x 或状态变量 u 可以是有限维（如 n 元实数组的 R^n 空间），也可以是函数（或场），即无限自由度。如果变量是有限维的，称之为离散参数系统，如桁架就是一个非常典型的例子，如图 1.3 和图 1.5 所示，此时状态变量 $\boldsymbol{u}$ 为结点位移向量，设计变量 x 表示的是有限杆的截面积。另一方面，若设计变量或状态变量是一个场，一般称为分布参数系统，如图 1.4 所示的形状优化问题和图 1.6 的拓扑优化问题。本教材中，用名词连续问题（continuum problem）表示分布参数系统。

分布参数系统一般不适合计算机求解：结构问题的计算机实现都基于有限维的代数方程。这就意味着在求解一个分布参数系统时，必须对原系统进行离散，这样就产生了一个离散参数系统。为了区别这种派生的离散系统和桁架结构系统，一般称桁架结构为自然离散系统。理想情况下，连续体的离散越精细，采用离散问题进行求解，才和实际连续问题的解越一致。然而，这种情况对数学要求很高，而且并不总能得到收敛解。此时，离散问题的解是否接近连续问题的解，必须依赖于结构工程师的经验进行判断。

第 2 章

离散结构优化建模与分析

优化设计方法实质上是利用数学规划方法处理设计问题的一种实用方法。在设计过程中，首先要把设计问题转化为数学模型，即把实际问题按照一定的形式转换成数学表达式。数学模型建立的合适、正确与否，直接影响优化设计的最终结果。

本章围绕第 1 章中结构优化的广义数学模型，通过一些优化问题进行优化建模与基本求解，熟悉建模方法和优化求解的关键。本章所有问题都是寻找杆的最优横截面积，即尺寸优化问题。本章针对的优化问题仅为两个或三个设计变量的建模，求解方法主要是高等数学的方法和图形求解，比较简单，后续章节将研究适合大型优化问题的求解方法。

2.1 应力约束两杆桁架质量最小

如图 2.1 所示两杆桁架，杆的长度和杨氏模量均为 L 和 E，所受的力 F 与水平方向夹角为 α，$0\leqslant\alpha\leqslant 90°$。设计变量为杆的截面积 A_1 和 A_2，目标函数为桁架的总质量，即

$$f(A_1, A_2)=(A_1+A_2)\rho L \tag{2.1}$$

其中，ρ 是材料的密度。杆的横截面积必须是非负的，即：

$$A_1\geqslant 0, \quad A_2\geqslant 0 \tag{2.2}$$

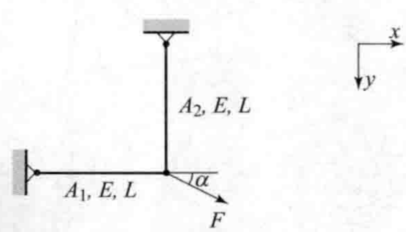

图 2.1　应力约束下，两杆桁架的质量最小

在力学上，求解这类桁架问题的一般方法是取自由结点的位移向量 $\boldsymbol{u}$ 作为状态变量，然后利用小变形弹性力学中的平衡方程（描述力与应力关系的方程）、几何方程（位移和变形方程）和线性本构方程（应力和变形关系）建立一个状态方程 $\boldsymbol{K}(A_1, A_2)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}$ 作为约束。对于本题，杆的数量等于自由结点的自由度数，即桁架是静定结构，因此可以直接利用平衡方程计算得到杆所受的力或应力。此外，目标函数和约束条件都不包含位移。因此，由图 2.2所示的自由结点的受力示意图，可写出 x 和 y 方向的平衡方程为

$$F\cos\alpha-\sigma_1 A_1=0, \quad F\sin\alpha-\sigma_2 A_2=0 \tag{2.3}$$

包含应力的约束方程为

$$|\sigma_i| \leqslant \sigma_0, \ i=1, \ 2 \tag{2.4}$$

其中，σ_0 为杆的最大许用应力，杆件受拉和受压时相同。

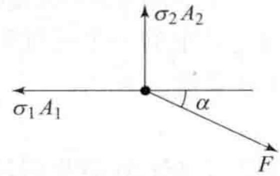

图 2.2　自由结点受力分析

综上所述，本题实际上是找到合适的 A_1，A_2，σ_1 和 σ_2，使式（2.1）在约束式（2.2），式（2.3）和式（2.4）下取得最小值。这个问题也可以利用（$|\sigma_i| \leqslant \sigma_0$，$i=1$，2）消除 σ_1 和 σ_2：

$$-\sigma_0 A_1 \leqslant F\cos\alpha \leqslant \sigma_0 A_1$$

$$-\sigma_0 A_2 \leqslant F\sin\alpha \leqslant \sigma_0 A_2$$

由于 F，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$，A_1，A_2 均为正数，不等式的左边显然总是满足的，也就是说，它们是不起作用约束，可以不予考虑。此外，不等式右边可表示为 $A_1 \geqslant \dfrac{F\cos\alpha}{\sigma_0}$，$A_2 \geqslant \dfrac{F\sin\alpha}{\sigma_0}$，因此约束条件式（2.2）也为不起作用约束。

由此得到：

$$(\mathbb{SO})^1_{\mathrm{nf}} \begin{cases} \min\limits_{A_1, A_2} (A_1 + A_2) \\ \text{s. t.} \begin{cases} A_1 \geqslant \dfrac{F\cos\alpha}{\sigma_0} \\ A_2 \geqslant \dfrac{F\sin\alpha}{\sigma_0} \end{cases} \end{cases}$$

由于 ρL 为常数，不影响 A_1 和 A_2 最优值的求解，因此未在目标函数中体现。

问题 $(\mathbb{SO})^1_{\mathrm{nf}}$ 是两变量的线性规划（Linear Program，LP）问题，极易用图解法求解。如图 2.3 所示。首先，在 A_1-A_2 平面上画出设计域的边界，然后再画表示目标函数 $A_1+A_2=f(A_1, A_2)=$常数的直线。显然，在设计域内使函数 $f(A_1, A_2)$ 最小的可能值为：

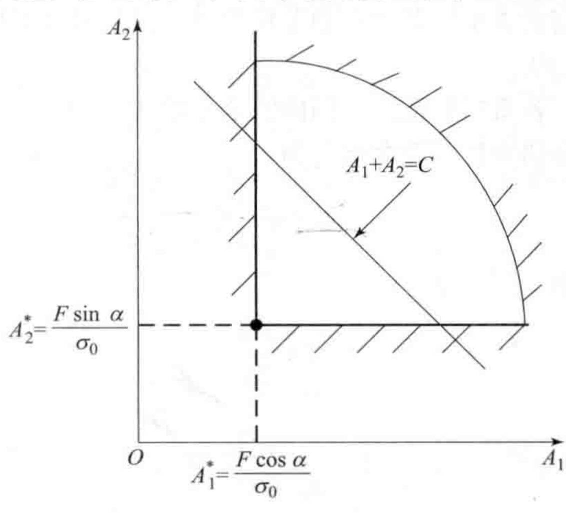

图 2.3　2.1 节问题的图解法

$$A_1^* = \frac{F\cos\alpha}{\sigma_0}，A_2^* = \frac{F\sin\alpha}{\sigma_0}$$

此时，两杆都受最大的拉应力，若仅从用料最少的角度看，这是一个“好”的结构。

需要注意的是，当 $\alpha=0°$或 $90°$时，其中的一个最优解就“消失”了，此时两杆桁架的拓扑结构就发生了改变，变成了一个单杆系统。

2.2 应力和稳定约束两杆桁架质量最小

如图 2.4 所示的直角放置的两杆桁架，杆的长度为 L，杨氏模量为 E，在自由结点处受与水平成 $\alpha=45°$的力 F，$F>0$。本问题是要找到最优的截面尺寸 A_1 及 A_2，使得两杆桁架在应力和欧拉屈曲约束下质量最小。桁架的质量为

$$f(A_1, A_2)=\rho L(A_1+A_2)$$

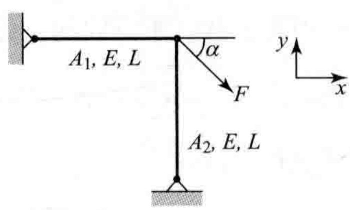

图 2.4　不稳定约束下两杆桁架的优化

其中，ρ 是材料的密度。应力约束如前述

$$|\sigma_i| \leqslant \sigma_0，i=1, 2 \tag{2.5}$$

其中，$\sigma_0>0$ 为应力上限。两杆所受应力为

$$\sigma_1 = \frac{F}{\sqrt{2}A_1}，\sigma_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}A_2}$$

因此，在优化模型中，应力约束可表示为

$$A_1 \geqslant \frac{F}{\sqrt{2}\sigma_0}，A_2 \geqslant \frac{F}{\sqrt{2}\sigma_0} \tag{2.6}$$

显然，该约束已能完全表示杆截面积的非负要求，因此可以不用再显式地表示杆的截面积约束，即 $A_1\geqslant 0$，$A_2\geqslant 0$。

考虑杆的不稳定性，若希望杆的欧拉屈曲安全系数为 4。由于杆 2 受压，因此屈曲只能出现在杆 2 上。受铰支座约束杆的屈曲载荷为：

$$P_c = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

若杆的横截面为圆形，则

$$I = \frac{A_2^2}{4\pi}$$

因此，屈曲约束条件

$$\frac{P_c}{4} \geqslant \sigma_2 A_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

可化简为