全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2012 李永乐·王式安考研数学系列

数学全程预测100题

数学三

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUESAN)

主编 李永乐 王式安

编委 "高数"：李正元 武忠祥 刘西垣
"线代"：李永乐 "概率论"：王式安

百道题目，精心设置 重点难点，全面覆盖
解答评注，细致入微 综合能力，高效提升

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国十二大考研辅导机构指定用书

2012 李永乐·王式安考研数学系列

数学全程预测100题

数学三

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUESAN)

主 编 李永乐 王式安

编 委：北京理工大学 王式安
北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
西安交通大学 武忠祥
（按姓氏笔画排序）

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测100题.3/李永乐主编.—西安:西安交通大学出版社,2010.7

ISBN 978-7-5605-3624-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第130209号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

数学全程预测100题(数学三)

主　　编:李永乐　王式安
策　　划:张伟　陈丽
责任编辑:王欣
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:7.75
字　　数:186千字
版　　次:2011年9月第2版
印　　次:2011年9月第1次印刷
书　　号:978-7-5605-3624-8/O·342
定　　价:15.00元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　电话:(010)82570560

前 言

本书是硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段,对考研数学的常见题型、方法已经进行了复习的基础上设计的重要练习题。它是《数学基础过关 660 题》的姊妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练,以期巩固、提高复习成果,帮助考生查漏补缺,进而达到考试要求,增强应试能力,提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题和新大纲的基础上,对考试的重点、难点以及对考生经常出现的错误加以剖析和归纳整理,用抓住基础、突出重点的方法,设计出不同解题思路和层次的试题并整合成书。本书**"解答"**——思路清晰、方法步骤详细、解题过程规范;**"评注"**——有针对性地指出该题所考查的知识点(或命题意图),解题思路归纳总结和延伸,常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算,硕士研究生入学考试也非常重视对计算能力的考查。因此,考生复习时要注意提高运算能力,提高计算的准确性,不仅要动脑而且要动手,不能华而不实,眼高手低,丢三落四,犯"低级"错误。

硕士研究生入学考试科目从 2003 年调整之后,数学科的权重在原有基础上增加了 50%,因此数学成绩对总分将有更大的影响,数学科的地位愈显重要。同时由于数学科本身的特点,考生的数学成绩历年来差别较大,这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此,希望考生要根据考试大纲认真踏实、全面系统地复习,心态要平和,戒浮躁,要循序渐进,不断积累,步步提高。面对激烈的竞争,望有志者抓紧、抓细、抓早。

同学们在使用本书时,最好能先自己想动手算,不要急于看解答。评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习微积分、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

2011 年 9 月

目　录

微积分

1 求下列函数极限：

（Ⅰ）$J=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}})^x$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域有二阶连续导数，且满足 $f'(0)=1, f''(0)=2$. 求 $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)-f(0)}-\frac{1}{xf'(x)}\right]$.

2 求下列数列极限

（Ⅰ）$J=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

（Ⅱ）$J=\lim\limits_{n\to\infty}x_n, x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$.

3 设 a,b,p 为非零常数，求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a+b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{a-b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}\right)$.

4 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\int_0^u f(u-t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^3}.$$

5 求数列极限 $I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+n}$.

6 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=1-\cos\sqrt{(1+x^3)^2-1}, g(x)=\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^3}\mathrm{d}t, h(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}-\cos 2x$ 都是无穷小量，将它们按关于 x 的阶数从低到高的顺序排列.

7 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & (x\neq 1, x\neq -2),\\ 2, & (x=1).\end{cases}$

(Ⅰ)$f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续,求出参数 a,b 的值;

(Ⅱ)对求出的 a,b 值,求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

8 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且 $f'(4)=1$,求

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}.$$

9 求曲线 $x^2+3xy+y^2+1=0$ 在点 $M_0(2,-1)$ 处的切线方程与法线方程.

10 (Ⅰ)设 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^y=x$ 确定,求 $y'(x)$ 与 $y''(x)$;

(Ⅱ)设 $f(x),\varphi(x)$ 均有二阶导数,又 $u=f(\varphi(x)+y^2)$,其中 x,y 满足方程 $y+e^y=x$,求 $\frac{du}{dx},\frac{d^2u}{dx^2}$.

11 设 $F(x)=\int_0^x\left(\int_0^{1+y^2}\frac{\ln(1+y^2+t)}{y^2+t}dt\right)dy$,求 $F''(x)$.

12 (Ⅰ)设 $y=\frac{x}{1-x^2}$,求 $y^{(n)}$.

(Ⅱ)设 $y=x^2\ln(1-x)$,求 $n>2$ 时 $y^{(n)}(0)$.

13 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶导数且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(Ⅰ)试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\cos x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程;

(Ⅱ)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=-\frac{1}{2},y'(0)=2$ 的解;

(Ⅲ)请验证,对所求的 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 存在反函数.

14 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} & x<0,\\ \frac{1}{2} & x=0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}x\sqrt[n]{1+x^n}+\int_0^{\frac{1}{x}}e^{-t^2}dt & x>0,\end{cases}$

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的连续性和可导性，不可导时是否左右可导？

（Ⅱ）判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上是否有界，并说明理由.

15 求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$ 的值.

16 设 $f(x)=\max\{x^3,x^2,1\}$，求 $\int f(x)dx$.

17 求定积分及定积分的极限.

（Ⅰ）$J=\int_0^1\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

（Ⅱ）数列极限 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}x\sin\frac{1}{x}dx$，其中 a 为常数.

18 过坐标原点作曲线 $y=e^{\frac{1}{2}x}$ 的切线 L，该切线与曲线 $y=e^{\frac{1}{2}x}$ 及 y 轴围成平面图形为 D.

（Ⅰ）求切线 L 的方程与该切点处曲线 $y=e^{\frac{1}{2}x}$ 的法线方程.

（Ⅱ）求 D 的面积 A；

（Ⅲ）求 D 绕 y 轴旋转一圈所得旋转体体积 V.

19 设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{x^2-t^2}dt+\int_0^1|x^2-t^2|dt,x>0$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值点；

（Ⅱ）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有无最大值？为什么？

20 （Ⅰ）求曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ 的拐点.

（Ⅱ）求曲线 $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线方程.

21 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x(x-2t)f(t)dt}{x} & (x\neq 0)\\[2ex] 0 & (x=0)\end{cases}$$

求证：

(Ⅰ)$F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$有连续的导数；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$单调递增,则$F(x)$在$(-\infty,0]$单调递增,在$[0,+\infty)$单调递减；

(Ⅲ)若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$是偶函数,则 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$是奇函数.

22 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$有连续的导数,在$(0,+\infty)$二阶可导且 $f''(x)>0$,求证：$F(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(0,+\infty)$是凹函数.

23 设 $x\in(0,1)$,证明不等式$\dfrac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$.

24 设 $a>0$,证明不等式

$$\int_0^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x>\int_0^a \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$$

25 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$二阶可导,$f''(x)>0(x\in(-\infty,+\infty))$,求证：

(Ⅰ)若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=5$,则 $f(x)>5x-2\quad(x\neq1)$.

(Ⅱ)若 $f(0)=0$,对 $\forall a>0$,则$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x>\dfrac{2}{3}a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

26 讨论函数零点存在性与个数.

(Ⅰ)试证方程$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$,有且只有一个根；

(Ⅱ)设 $f(x)=x^4-4x+1$,试讨论方程 $f(x)=0$ 有几个根.

27 设 $0<a<b$,$g(x)$ 在$[a,a+b]$上连续,在$(a,a+b)$内可导,且 $f(a)=b$,$f(b)=a$,$f(a+b)=a+b$,证明存在一点 $\xi\in(a,a+b)$ 使得 $f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-\xi]=1$.

28 设 $f''(0)$ 存在,$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-xf(x)}{x^3}=\dfrac{2}{3}$,求出 $f(0)$,$f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.

29 设需求函数和总成本函数分别为 $P=a-bQ$,$C=\dfrac{1}{2}Q^2+53Q+20$,当需求 Q

对价格 P 的弹性 $\eta = -\dfrac{73}{11}$，收益 R 对产量 Q 的边际 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q} = 62$ 时，其利润最大.

（Ⅰ）求利润最大时的产量；

（Ⅱ）确定 a,b 的值.

30 设某产品总产量 $Q(t)$ 的变化率为

$$\frac{30}{t^2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{t}} + 2(\text{万吨 / 年})$$

（Ⅰ）投产后多少年可使平均产量达到最大值?并求此最大值；

（Ⅱ）在达到平均年产量最大值后，求再生产 3 年的平均年产量.

31 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续，在$(0,+\infty)$有连续导数. 求解下列方程：

（Ⅰ）若 $f(x)$ 满足方程 $x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t + 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xf(x) + x^3\ (x \geqslant 0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

（Ⅱ）若 $f(x)$ 满足方程 $f(x) - 1 = \int_1^x \left[\dfrac{f^2(t)}{t^2} - \dfrac{f(t)}{t}\right]\mathrm{d}t,(x > 0)$，求 $f(x)$.

32 求以 $y = (C_1 + C_2x + x^2)\mathrm{e}^{-2x}$（其中 C_1,C_2 为任意常数）为通解的二阶线性常系数微分方程.

33 一曲线通过$(2,3)$，它在两坐标轴间的任意切线段均被切点平分，求此曲线方程 $y = y(x)$.

34 设 $f(x,y) = \int_{\frac{y}{x}}^{x^2+y^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，求 $\mathrm{d}f(x,y)$.

35 已知$(y^2 + ay^2\sin x)\mathrm{d}x + (bxy - 2y\cos x)\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，则常数 a,b 的值为多少.

36 设 $f(x,y)$ 在$(0,0)$连续，给定

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

讨论 $F(x,y)$ 在$(0,0)$点的可微性，若可微请求出 $F(x,y)$ 在点$(0,0)$的全微分.

37 设 $u=u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$ 确定,其中 f,g,h 有连续偏导数且 $g_z'h_t'-g_t'h_z'\neq 0$,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

38 设 $u=f(xy)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(2x^2y^2+1)e^{x^2y^2},$$

求 $u=f(xy)$,其中 $f(t)$ 当 $t\neq 0$ 时有二阶连续导数.

39 设某产品的产量 Q 与两种原料的投入量 x,y 的函数关系为 $Q=20[\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{4}}]^{-4}$,该产品的成本函数为 $C=4x+3y$.

(Ⅰ)若限定成本预算为80,计算使产量达到最高的原料投入量 x 和 y;

(Ⅱ)若限定产量为120,计算使成本最低的原料投入量 x 和 y.

40 设有二重积分

$$I_1=\iint_{D_1}x^2y\,dxdy,$$

$$I_2=\iint_{D_2}\sqrt[3]{3-x^2-y^2}\,dxdy,$$

$$I_3=\iint_{D_3}\ln(x^2+y^2+\frac{1}{2})dxdy$$

其中

$$D_1=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\},$$

$$D_3=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant \frac{1}{2}\},$$

请将这三个二重积分按大小排序.

41 求二重积分:

(Ⅰ)$J=\iint_D(|x|+|y|)d\sigma$,其中 D 由曲线 $xy=2,y=x+1,y=x-1$ 围成.

（Ⅱ）$J=\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $x=a,x=0,y=a,y=-a$ 及曲线 $x^2+y^2=ax,(a>0)$ 所围成.

42 设 D 由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=\pi$ 所围成的平面区域，计算 $\iint\limits_{D}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

43 求累次积分：

（Ⅰ）$J=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$；

（Ⅱ）$J=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

44 设 $f(x,y)$ 为连续函数，二重积分 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 在极坐标系下的二次积分为 $I=\int_{\arctan\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$，请将它化为直角坐标系下的二次积分.

45 讨论级数的敛散性：

（Ⅰ）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 是它的部分和，求证：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_na_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 收敛；

（Ⅱ）设常数 $a>0$，求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{1+\frac{a}{n}}}$ 条件收敛；

（Ⅲ）求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 收敛.

46 求下列幂级数的收敛区间及收敛域：

（Ⅰ）$x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$；

（Ⅱ）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}4^{n^2}x^{n^2}$.

47 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,

(Ⅰ)求证:$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}\quad(|x|<+\infty)$;

(Ⅱ)求 $f^{(n)}(0)$.

48 级数求和:

(Ⅰ)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数 $S(x)$;

(Ⅱ)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数 $S(x)$.

49 设曲线 $y=\frac{1}{x^3}$ 与直线 $y=\frac{x}{n^4}$,$y=\frac{x}{(n+1)^4}$ 在第一象限围成图形的面积为 $I(n)$,其中 n 为自然数.

(Ⅰ)求证:$I(n)=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(Ⅱ)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I(n)$ 的和.

50 求解下列差分方程.

(Ⅰ)设 $y_0=6$,求差分方程 $2y_{t+1}-y_t=5\sin\frac{\pi}{2}t$ 的解 y_t.

(Ⅱ)求差分方程 $y_{t+1}-y_t=2^t-1$ 的通解 y_t.

线性代数

51 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$

（Ⅰ）证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵；

（Ⅱ）证明：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（Ⅲ）已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

52 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶反对称矩阵

（Ⅰ）证明：对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，恒有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$；

（Ⅱ）证明：对任何非零实数 k，恒有 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵；

（Ⅲ）证明：若 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵，n 必是偶数.

53 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等价.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

54 已知两个向量组

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,6,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,0,b,2)^{\mathrm{T}}$

等价，求 a,b 的值，并写出等价时的线性表达式.

55 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a,7)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,3,a+11)^T$ 线性相关，而且向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,2,b)^T$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）试将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出；

（Ⅲ）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，并将向量组中其余向量用该

极大线性无关组线性表出.

56 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$,使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出,又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 时,求出所有的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

57 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,试讨论向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 的线性相关性.

58 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\beta}$ 是任意一个 n 维向量.

(Ⅰ)证明存在不全为0的 k_1,k_2,k_3 使得向量组 $k_1\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性相关;

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,1,-1,7)^{\mathrm{T}}$ 时,求出所需要的 k_1,k_2,k_3.

59 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三阶矩阵,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{O}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数)且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

60 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=3\\x_2+x_3-x_4=-1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+3x_4=b+5\\4x_1+4x_3+(a+6)x_4=16\end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时,方程组无解、有解;当方程组有解时求出其所有的解.

61 已知方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_3=1\\2x_1+ax_2+5x_3=0\\4x_1+(a+3)x_3=b+8\end{cases}$$

有两个不同的解

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

（Ⅱ）求 a,b 的值，并求方程组的通解.

62 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维列向量，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$，又 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$，求方程组 $\boldsymbol{Bx}=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的通解.

63 已知齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2+ax_4=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\text{和}(\mathrm{II})\begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值并求满足 $x_1=x_2$ 的解.

64 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量.

证明：（Ⅰ）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解；

（Ⅱ）秩 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})$.

65 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征向量；

（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

66 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是3维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

（Ⅲ）求行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$ 的值.

67 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\a&2&a\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅲ)判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化,并说明理由.

68 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ a & 2 & a\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆,向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

69 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & b & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ 相似,求 a 与 b 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

70 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,有 3 个线性无关的特征向量,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量,且有

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$$

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和所有的特征向量.

71 设 $\boldsymbol{A}$ 是各行元素之和均为 0 的三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的三维列向量,并满足 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

(Ⅰ)证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角矩阵相似;

(Ⅱ)如 $\boldsymbol{\alpha}=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅲ)用配方法化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为标准形,并写出所用坐标变换.

72 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,又 $(\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{\alpha}$ 和二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 表达式.

(Ⅱ)用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为标准形并写出所用坐标变换.

(Ⅲ)求 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^6$.