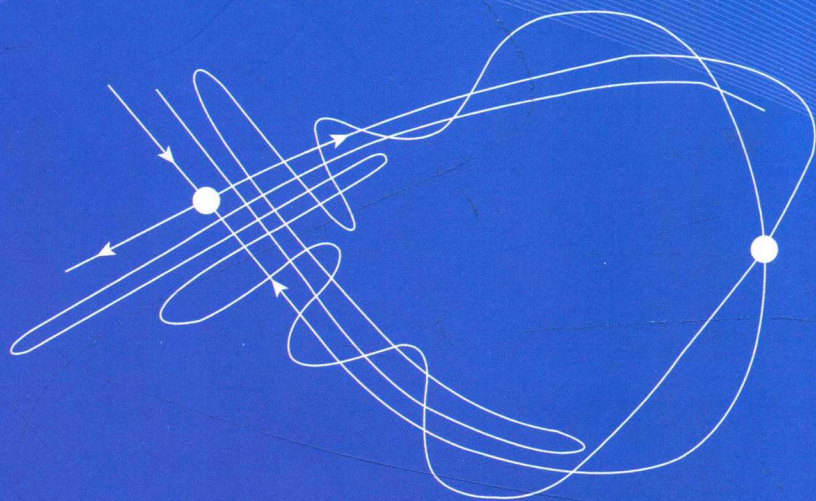


# 非线性动力学

谢建华 乐源 李登辉 编著



科学出版社

# 非线性动力学

谢建华 乐源 李登辉 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是非线性动力学方面的一本基础教材, 主要以基础力学和振动力学中的模型为背景, 介绍了动力系统中的基本概念, 如相空间、流、范式、普适开折和结构稳定性等; 讨论了动力系统的主要简化和降阶工具, 如中心流形与范式理论和 Lyapunov-Schmidt 方法等. 在此基础上, 本书给出了动力系统中周期解与稳定性的确定过程, 以及主要分岔问题的分析和计算方法, 这些分岔包括鞍结分岔、音叉分岔、Hopf 分岔、Hopf-Hopf 分岔和 Neimark-Sacker 分岔等; 介绍了 Smale-Birkhoff 同宿定理、Smale 马蹄和 Melnikov 方法; 给出了非线性动力学在干摩擦和碰撞振动系统中的若干应用.

本书可以作为动力学或振动力学等方面的高年级本科生或研究生教材, 也可供从事这些方面教学和研究的教师以及科研工作者参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学 / 谢建华, 乐源, 李登辉编著. —北京: 科学出版社, 2018.10  
ISBN 978-7-03-058004-7

I. ①非… II. ①谢… ②乐… ③李… III. ①非线性科学-动力系统(数学) IV. ①O194

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 131878 号

责任编辑: 华宗琪 / 责任校对: 杨聪敏  
责任印制: 罗 科 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 10 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 10 月第一次印刷 印张: 21 1/2

字数: 510 000

定价: 129.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

非线性动力学思想的起源可追溯到两千多年以前,那时古希腊人就研究过浮体的平衡与稳定性了,阿基米德曾写过两卷本的“论浮体”;由于生产的实际需要,古代的巴比伦、埃及和中国等地的人们对太阳和月亮等星体的运动规律进行了长期的观察,以此编制了各种日历;人类航海贸易活动需要精确地测量时间,这种需求极大地刺激了对单摆运动规律的研究,伽利略(Galileo)发现了单摆小摆动的等时性,而惠更斯(Huygens)发明了等时摆;工业革命兴起后,机器运动和控制问题促进了振动、稳定性和控制理论的发展.开普勒(Kepler)和牛顿(Newton)等开始系统地研究天体力学,由此产生了非线性动力学中的很多概念和方法;但其严格理论的建立主要归功于 Poincaré 和 Lyapunov,前者在研究三体问题时,建立了一系列的概念,特别是建立了动力系统拓扑方法,开创了定性研究的先河;后者则建立了稳定性基本理论和方法,特别是 Lyapunov 第二方法对非线性动力学的发展影响深远,而且应用极为广泛. Poincaré 在 Hamilton 系统周期解的研究中提出平面扭转映射至少存在两个不动点的猜想, Birkhoff 于 1913 年通过拓扑方法证明了此猜想,并证明凸台球问题至少存在两条  $p$ - $q$  周期轨道. 20 世纪 60 年代关于 Hamilton 系统 KAM 定理的证明和 80 年代关于扭转映射 Aubry-Mather 集的发现是动力系统和非线性动力学中的重要进展. 在非线性和振动方面, van der Pol 等在电子管研究中发现了自激振动现象,其后对 van der Pol 方程和 Duffing 方程中的周期解、拟周期解和结构稳定性的研究极大地丰富了非线性动力学的定性方法(如定性理论和拓扑方法)和定量方法(如摄动法,平均化方法等). 20 世纪 60 年代由于计算机的出现,非线性动力系统复杂性可通过图形的形式直观地展现在人们的面前,吸引了各领域研究者的关注. Lorenz 在模拟大气对流的简化方程中发现了确定系统的内在随机性;在三体问题的研究中 Hénon 提出一个含两参数的平面映射,发现随着参数的变化,系统由周期运动向拟周期运动以及混沌运动的演变; Smale 在 Cartwright 和 Levinson 等关于 van der Pol 方程研究工作的基础上发现了马蹄意义上的混沌; Feigenbaum 用一维映射研究了高维系统自相似过程和普适性等问题,发现了周期倍化分岔序列和奇异吸引子. 特别是近期以来,动力系统理论发展非常迅速,新方法和新理论(如分岔理论、奇异性理论、重整化理论、符号动力学、分形和斑图动力学等)不断涌现,呈现出一种崭新的面貌.

随着非线性动力学的发展,该领域的论文和教科书以及专著也大量地涌现,而且应用范围也从自然和工程学科拓展至经济和生命等领域,感兴趣的人也越来越多. 文献[1]是一本针对数学专业学生而写的关于微分方程和动力系统方面很好的入门教科书,但遗憾的是力学或物理等方面的例子偏少;文献[2]主要从摄动法角度,研究了动力系统(有限维和无穷维)周期解和拟周期解的稳定性和分岔问题,具有很好的可计算性,但理论基础方面介绍较少;文献[3]和文献[4]对动力系统的全局动力学有全面和深入的论述,但前者的理论

分析过程过于省略，而后者的数学工具对初学者又过于艰深。笔者通过较长时间的教学和研究实践，深切地感觉到基本理论的重要性和综合性，例如，动力系统中的稳定性概念就贯穿了数学和力学中的多门课程；有限维和无限维系统中周期解和拟周期解的研究既横跨多个数学分支，同时也是刚体动力学、弹性体动力学和流体动力学中的重要课题。本书的主要目的是通过具体而简单的力学模型，介绍非线性动力学中的基本理论和方法，理论分析配合以具体可操作的计算，例如，既给出了周期解和拟周期解以及各种主要分岔的理论分析过程，也给出了具体的计算步骤，以避免概念化和空泛化，或过分依赖于数值模拟手段。

本书按系统维数增加的次序分为17章：第1~4章介绍了一维动力系统中的基本概念，如相空间与相轨线、平衡点与周期点、稳定性与结构稳定性、旋转数与魔鬼阶梯等；第5章和第6章主要讨论了平面自治系统，主要内容包括奇点的分类、极限环存在性(Poincaré-Bendixson 定理)和稳定性等，研究了平面奇点的几种主要分岔问题(如鞍结分岔、音叉分岔、Hopf 分岔和 Bogdanov-Takens 分岔等)；第7章和第8章分别讨论了高维线性系统基本性质和运动稳定性的基本问题，重点介绍了 Lyapunov 第二方法；第9章描述了高维动力系统降维和简化的两个主要方法：中心流形与范式理论；在此基础上，第10章研究了高维动力系统的几种主要分岔，如简单零特征值分岔、Hopf 分岔和 Hopf-Hopf 分岔等；周期运动向拟周期运动转变过程一般称为 Neimark-Sacker 分岔(NS 分岔)，第11章给出了平面映射 NS 分岔定理的证明，讨论了所谓 1:3 和 1:4 共振问题，然后通过中心流形与范式理论将 NS 分岔定理推广至高维映射；第12章介绍了周期解及稳定性的概念和确定周期解的若干定性和定量方法；Lyapunov-Schmidt 方法(LS 方法)既适用于高维系统也适用于无穷维系统，第13章介绍了 LS 方法的基本思想；混沌是非线性动力学一个重要的研究方面，第14~16章分别介绍了 Smale-Birkhoff 同宿定理、Smale 马蹄和 Melnikov 方法与混沌；第17章将非线性动力学的基本方法应用于一类碰撞振动系统，分析了该系统的对称性、周期运动的稳定性和分岔过程。

本书最初的底稿是第一作者为研究生课程“分岔理论基础”编写的讲义；2002年，第一作者在美国杜克大学访问期间开始收集和整理与本书相关的资料，回国后又通过数十年的研究生课程的使用和补充，逐步地形成了本书的底稿。在本书编写过程中，我们得到了很多人的帮助。特别要感谢徐慧东、余本嵩、郭勇、郭峰、郝耐和曹振邦等，他们在本书的算例、作图和校对等方面做了很多工作；本书若干章节曾在西南交通大学非线性动力学讨论班上交流，这些讨论丰富了本书的内容；科学出版社的华宗琪女士一直关心着本书的出版工作，并为此付出了大量的时间和精力；本书的出版得到了国家自然科学基金的资助(11732014, 11672249, 11572263)，在此一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作者

2018年3月

于西南交通大学

# 目 录

第 1 章 一维自治系统	1
1.1 基本概念	1
1.2 平衡点的基本分岔	5
第 2 章 奇异性与分岔理论中的基本概念	15
2.1 识别问题	15
2.2 普适开折	19
第 3 章 一维映射的基本概念	22
3.1 基本概念	22
3.2 局部分岔	26
3.3 圆周映射的基本性质	33
第 4 章 一维非自治系统	39
4.1 一维非自治系统的基本性质	39
4.2 一维周期系统	42
第 5 章 平面自治系统	51
5.1 初等奇点的分类	51
5.2 退化奇点的稳定性	59
5.3 平面自治系统的极限环	65
第 6 章 平面自治系统平衡点的分岔	75
6.1 平衡点的鞍结分岔与音叉分岔	75
6.2 摄动法与平衡点的分岔问题	79
6.3 平面自治系统 Hopf 分岔 (I) ——Poincaré 方法	87
6.4 平面自治系统 Hopf 分岔 (II) ——范式方法	93
6.5 双零特征值分岔	101
第 7 章 高维线性系统	109
7.1 高维线性系统解的结构	109
7.2 线性系统的稳定性	113
7.3 线性周期系统	119
第 8 章 运动的稳定性	122
8.1 稳定性基本理论	122
8.2 力学系统的稳定性	130
8.3 限制三体问题	137

<b>第 9 章</b>	<b>中心流形与范式理论</b> .....	143
9.1	中心流形 .....	143
9.2	范式理论 .....	152
<b>第 10 章</b>	<b>高维自治系统的分岔</b> .....	162
10.1	简单零特征值分岔 .....	162
10.2	Hopf 分岔 .....	166
10.3	Hopf-Hopf 分岔 .....	176
<b>第 11 章</b>	<b>Neimark-Sacker 分岔</b> .....	190
11.1	平面映射的 NS 分岔 .....	190
11.2	平面映射的 NS 分岔 (共振) .....	199
11.3	高维映射的 NS 分岔 .....	209
<b>第 12 章</b>	<b>周期解及稳定性</b> .....	216
12.1	周期解的稳定性 .....	216
12.2	自治系统周期解的稳定性 .....	223
12.3	隐函数定理与周期解 .....	228
12.4	不动点定理与周期解 .....	232
12.5	高维拟线性自治系统周期解研究的 Poincaré 方法 .....	243
<b>第 13 章</b>	<b>Lyapunov-Schmidt 方法</b> .....	253
13.1	LS 方法的基本思想 .....	253
13.2	LS 方法的推导过程 .....	256
13.3	LS 方法与周期系统的周期解 .....	261
<b>第 14 章</b>	<b>双曲集和横截同宿点邻域内的动力学</b> .....	268
14.1	双曲集 .....	268
14.2	Smale-Birkhoff 同宿定理 .....	273
<b>第 15 章</b>	<b>Smale 马蹄</b> .....	280
15.1	马蹄映射的双曲不变集 .....	280
15.2	产生马蹄型移位不变集的一般条件 .....	284
15.3	冲击摆的 Smale 马蹄 .....	287
<b>第 16 章</b>	<b>Melnikov 方法与混沌</b> .....	294
16.1	Melnikov 方法 .....	294
16.2	次谐 Melnikov 方法 .....	302
16.3	Melnikov 方法的应用 .....	308
<b>第 17 章</b>	<b>非线性动力学在碰撞振动系统中的应用</b> .....	317
17.1	两自由度对称碰撞振动系统的周期运动与稳定性 .....	317
17.2	两自由度对称碰撞振动系统分岔问题的数值模拟 .....	322
<b>参考文献</b> .....		336

# 第1章 一维自治系统

## 1.1 基本概念

本节介绍了由标量常微分方程表示的一维自治系统,通过具体例子说明动力系统的一些基本概念,如方向场、向量场、轨道、平衡点及其稳定性等.由于相空间的限制,一维自治系统性质相对比较简单,例如,在这类系统中不存在非平凡的周期运动等.

放射性物质衰变或物种增减规律可由下面的方程描述:

$$\dot{x} = \alpha x, \quad (1.1.1)$$

其中,  $x \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  是实数轴),  $\alpha$  是实常量. 如果给出初值条件:  $t = t_0, x(t_0) = x_0$ , 则方程(1.1.1)的解可表示成  $x(t) = x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ , 可用  $(t, x)$  平面上过点  $(t_0, x_0)$  的一条曲线来表示, 如图 1.1.1 所示.

考虑由标量常微分方程

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1.2)$$

表示的一维自治系统, 其中  $f \in C^0(U, \mathbb{R})$  或  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  [ $C^i(U, \mathbb{R}), i = 0, 1, 2, \dots$ , 表示区域  $U \subset \mathbb{R}$  上具有  $i$  阶连续导数的函数全体. 为方便起见以下设  $U = \mathbb{R}$ ].

$x_0 e^{\alpha t}$  是方程(1.1.1)通过  $(0, x_0)$  的解, 而过  $(t_0, x_0)$  的解可通过对其进行一个时间平移而获得, 这是自治系统的一个重要性质, 即如果  $x(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$  是方程(1.1.2)过  $(0, x_0)$  的解, 那么  $x(t-t_0, 0, x_0)$  是过  $(t_0, x_0)$  的解(习题 1.1.1).

对任意一个函数  $f(x)$ , 方程(1.1.2)过点  $(t_0, x_0)$  的解是否唯一呢? 下面就是一个反例.

**例 1.1.1** 考虑初值问题

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = x_0 \quad (x \geq 0), \quad (1.1.3)$$

上方程有解  $x(t, x_0) = (t + 2\sqrt{x_0})^2 / 4$  ( $x_0 \geq 0$ ). 如果  $x_0 = 0$ , 显然  $x = 0$  也为其解, 因此过点  $(0, 0)$  的解是不唯一的.

微分方程解的存在性与唯一性是非常重要的, 下面定理给出了解存在性与唯一性的充分条件.

**定理 1.1.1**<sup>[1]</sup> (1) 如果  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , 那么对任何的  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 存在含  $t = 0$  的开区间(可能是无穷区间)  $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ , 方程(1.1.2)过点  $(0, x_0)$  存在解  $\varphi(t, x_0)$ , 满足  $\varphi(0, x_0) = x_0$ . 另外如果  $\alpha_{x_0}$  是有限的, 则  $\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$ ; 或如果  $\beta_{x_0}$  是有限的, 则  $\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty$ .

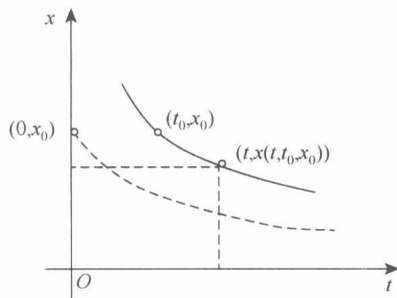


图 1.1.1 放射性物质衰变或物种增减规律



(2) 如果  $f \in C^1(R, R)$ , 那么  $\varphi(t, x_0)$  是  $I_{x_0}$  上的唯一解,  $\varphi(t, x_0)$  是  $C^1$  类函数 [关于  $(t, x_0)$  具有连续的偏导数].

定理 1.1.1 中提到的区间  $I_{x_0}$  称为  $\varphi(t, x_0)$  的最大解区间.

**例 1.1.2** 考虑初值问题

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1.4}$$

通过分离变量法, 可解出

$$x(t, x_0) = x_0 / (1 - x_0 t), \tag{1.1.5}$$

解(1.1.5)的最大解区间为  $I_{x_0} = (-\infty, 1/x_0)(x_0 > 0)$  或  $(1/x_0, +\infty)(x_0 < 0)$ , 如图 1.1.2 所示.

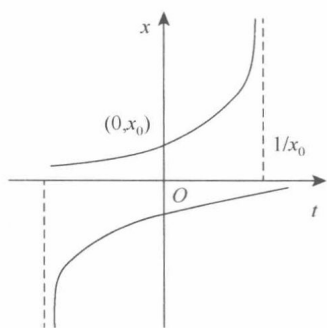


图 1.1.2 最大解区间

如果  $f$  是  $C^1$  类函数, 那么对于给定的  $t$ , 流  $\varphi(t, x_0)$  给出  $R$  上的一个映射:  $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$  (此映射可能仅定义在  $R$  的子区间上), 此映射具有如下性质:

- (1)  $\varphi(0, x_0) = x_0$ ;
- (2)  $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$  (对任何  $t, s$ );
- (3)  $\varphi(t, x_0)$  是  $C^1$  类映射, 并具有  $C^1$  类逆映射  $\varphi(-t, x_0)$ .

如果  $R$  上的一个映射满足条件(1)~(3), 那么称其为一个  $C^1$  动力系统.

对任何  $x \in R$ ,  $f(x)$  有定义, 方程(1.1.2)的右端函数定义了导数  $dx/dt$  的值, 该导数可用过点  $(t, x)$  的斜率为  $dx/dt$  的直线段形象表示 [图 1.1.3(a)、(c)], 所有这些直线段全体称为方程(1.1.2)的方向场 (direction field).

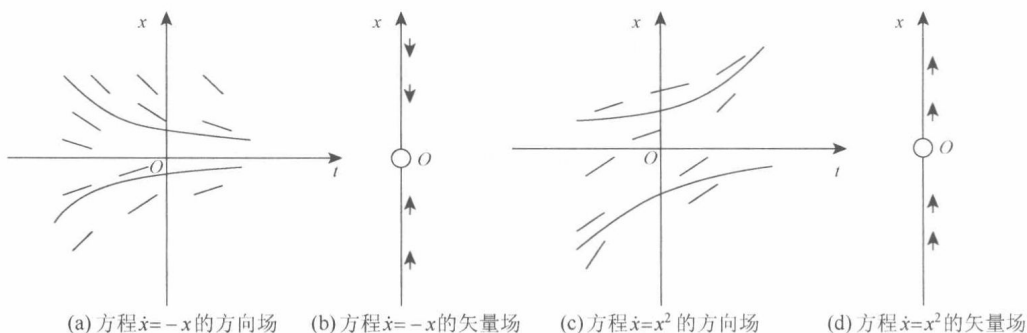


图 1.1.3 方向场、矢量场与相图

方程(1.1.2)一个解的图, 即  $(t, x)$  平面上的集合  $\{(t, \varphi(t, x_0)) | t \in I_{x_0}\}$  称为过点  $(0, x_0)$  的轨线 (trajectory), 轨线在其通过的任一点处与方向场在该点处的直线段相切 [图 1.1.3(a)、(c)].

由于方程(1.1.2)的右端函数  $f(x)$  与  $t$  无关, 故在  $(t, x)$  平面上与  $t$  轴平行的同一直线

上, 方向场有相同的斜率. 据此性质, 可以在  $x$  轴上定义一个矢量场(vector field): 在  $x$  轴上画一个矢量, 其始点与终点分别是  $x$  和  $x+f(x)$ , 这些定位矢量的全体称为方程(1.1.2)的矢量场 [图 1.1.3 (b)、(d)].

方程(1.1.2)过  $x_0$  的正半轨道  $\gamma^+(x_0)$ 、负半轨道  $\gamma^-(x_0)$  与轨道  $\gamma(x_0)$  分别定义为

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in (0, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0), \quad \gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \varphi(t, x_0), \quad \gamma(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0),$$

**例 1.1.3** 对方程  $\dot{x} = x^2$  而言,  $\gamma^+(1) = [1, +\infty)$ ,  $\gamma^-(1) = (0, 1]$ ,  $\gamma(1) = (0, +\infty)$ .

显然过点  $(t_0, x_0)$  的轨线向  $x$  轴投影就获得过  $x_0$  的轨道, 方程(1.1.2)轨道的全体及运动方向给出其相图(phase portrait),  $x$  轴称为相空间, 其上的点称为相点.

如果  $\bar{x} \in R$  满足  $f(\bar{x}) = 0$ , 则称  $\bar{x}$  为方程(1.1.2)的平衡点(又称驻定解、平衡位置、零点或奇点等), 它是方程(1.1.2)的一种特殊解, 其轨线是过点  $\bar{x}$ , 并与  $t$  轴平行的直线, 而其轨道是平衡点自身. 例如, 方程  $\dot{x} = x - x^3$  有三个平衡点  $\bar{x} = 0, \pm 1$ , 如图 1.1.4 所示.

方程(1.1.2)的相图给出了其所有解的结构(如类型与性态等). 对于标量方程(1.1.2), 其相图可通过如下方法获得: 以  $x$  轴为横轴, 作函数  $f(x)$  的图像, 如果  $f(x) > 0$ , 则点  $x$  处的矢量场方向指向  $x$  轴的正方向, 当  $t$  增加时, 通过点  $x$  的轨道或趋于某个平衡点, 或趋于  $+\infty$ ; 如果  $f(x) < 0$ , 则点  $x$  处的矢量场方向指向  $x$  轴的负方向, 当  $t$  减小时, 通过点  $x$  的轨道或趋于某个平衡点, 或趋于  $-\infty$ .

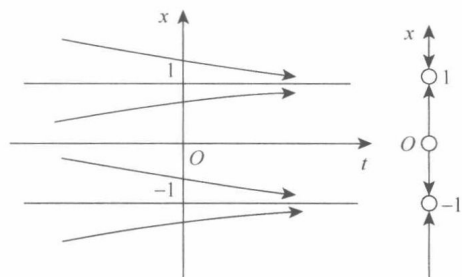


图 1.1.4 方程  $\dot{x} = x - x^3$  的轨线与相图

图 1.1.5(a)、(b)和(c)分别给出了方程  $\dot{x} = -x$ ,  $\dot{x} = x^2$  和  $\dot{x} = x - x^3$  的相图.

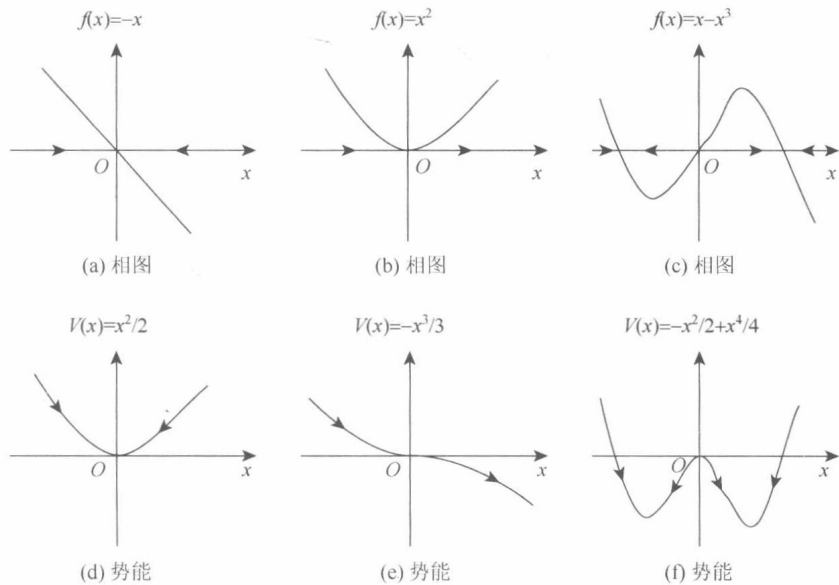


图 1.1.5 相图与势能

定义方程(1.1.2)的势能函数  $V(x) = -\int_0^x f(x)dx$ ，则有  $\frac{d}{dt}V(x) = -f^2(x) \leq 0$ 。因此轨道运动方向总是沿势能减小的方向。根据  $\frac{d}{dx}V(x) = -f(x)$ ，可利用  $f(x)$  的正负号判定  $V(x)$  的增减性，另外  $f(x)$  的零点  $\bar{x}$  是  $V(x)$  的临界点。根据这些性质，可作出  $V(x)$  的图像。图 1.1.5(d)、(e)和(f)分别表示系统  $\dot{x} = -x$ ， $\dot{x} = x^2$  和  $\dot{x} = x - x^3$  的势能。设想势能曲线由光滑的金属丝构成，而其上放一个小球，小球总是沿势能减小的方向运动，而相点的运动方向与小球的运动方向一致。

如果方程(1.1.2)的解满足唯一性，则在平面上两条不同的轨线是不会相交的，因此有：

**命题 1.1.1** 如果方程(1.1.2)的解满足唯一性，则

- (1)  $\varphi(t, x_0)$  是  $t$  的单调函数；
- (2) 如果  $x_0 < y_0$ ，那么  $\varphi(t, x_0) < \varphi(t, y_0)$ ；
- (3) 如果  $\gamma^+(x_0) [\gamma^-(x_0)]$  是有界的，那么  $\beta_{x_0} = +\infty [\alpha_{x_0} = -\infty]$ ，且当  $t \rightarrow +\infty [t \rightarrow -\infty]$  时， $\varphi(t, x_0) \rightarrow \bar{x}$ ， $\bar{x}$  是平衡点。

如果  $\gamma^+(x_0)$  有界，那么称极限  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0)$  为轨道  $\gamma(x_0)$  的  $\omega$  极限点(正向极限点)，如果  $\gamma^-(x_0)$  有界，那么称极限  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x_0)$  为轨道  $\gamma(x_0)$  的  $\alpha$  极限点(负向极限点)。对标量方程(1.1.2)而言，如果轨道  $\gamma(x_0)$  的  $\omega$  或  $\alpha$  极限点存在，则其必为一个平衡点。

由图 1.1.4 可知平衡点  $\bar{x} = \pm 1$  附近的轨线(轨道)随着  $t \rightarrow \infty$ ，趋于相应的平衡点，而  $\bar{x} = 0$  附近的轨线(轨道)则远离它。为刻画平衡点这种渐近性质，引用平衡稳定性的相关定义(Lyapunov 稳定性)。

**定义 1.1.1** 设  $\bar{x}$  是方程(1.1.2)的平衡点，如果对任何  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $|x_0 - \bar{x}| < \delta$  时，对任何  $t > 0$ ，有  $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$ ，则称平衡点  $\bar{x}$  是稳定的(stable)；如果  $\bar{x}$  不是稳定的，则称其是不稳定的(unstable)。

**定义 1.1.2** 如果平衡点  $\bar{x}$  是稳定的，且存在  $r > 0$ ，当  $|x_0 - \bar{x}| < r$  及  $t \rightarrow +\infty$  时， $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0$  (即  $\bar{x}$  是吸引的)，则称  $\bar{x}$  是渐近稳定的(asymptotically stable)。

**命题 1.1.2** 设  $\bar{x}$  是方程(1.1.2)的平衡点，如果存在  $\delta > 0$ ，当  $|x - \bar{x}| < \delta$  时， $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$ ，则平衡点  $\bar{x}$  是稳定的；如果存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < x - \bar{x} < \delta$  或  $-\delta < x - \bar{x} < 0$  时，有  $(x - \bar{x})f(x) > 0$ ，则平衡点  $\bar{x}$  是不稳定的。

下面的例子表明存在稳定但非渐近稳定的平衡点。反之，很容易证明对一维自治系统而言，吸引性包含稳定性。但此结论对高维系统不成立，即存在平衡点是吸引的但非稳定的例子<sup>[5]</sup>。

**例 1.1.4** 考虑方程

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -x^3 \sin(1/x), & x \neq 0. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

函数  $f(x)$  具有一阶连续导数，其图像如图 1.1.6 所示。此方程有平衡点  $\bar{x} = 0, (k\pi)^{-1} (k \neq 0)$ 。平衡点  $\bar{x} = 0$  是稳定的，但非渐近稳定。

如果  $f(x)$  是  $C^1$  类函数,  $\bar{x}$  是方程 (1.1.2) 非退化的 (双曲的) 平衡点, 即  $f'(\bar{x}) \neq 0$ , 则  $\bar{x}$  的稳定性可由  $f'(\bar{x})$  的正负确定.

**定理 1.1.2** 设  $f(x)$  是  $C^1$  类函数. 如果  $f'(\bar{x}) < 0$ , 则方程 (1.1.2) 的平衡点  $\bar{x}$  是渐近稳定的; 如果  $f'(\bar{x}) > 0$ , 则平衡点  $\bar{x}$  是不稳定的.

**证** 引入新变量  $y = x - \bar{x}$ , 则方程 (1.1.2) 的平衡点  $\bar{x}$  对应方程

$$\dot{y} = f(\bar{x} + y) = f'(\bar{x})y + g(y) \quad (1.1.7)$$

的平衡点  $\bar{y} = 0$ . 其中,  $g(0) = g'(0) = 0$ . 由  $g'(y)$  的连续性, 对  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $|y| < \delta$  时, 有  $|g'(y)| < \varepsilon$ , 利用表达式  $g(y) = \int_0^y g'(\xi) d\xi$ , 可推出  $|g(y)| < \varepsilon|y|$  ( $|y| < \delta$ ). 不妨设  $|f'(\bar{x})| > \varepsilon$ , 那么, 当  $|y| < \delta$  时, 函数  $f'(\bar{x})y + g(y)$  的正负由  $f'(\bar{x})y$  确定, 利用命题 1.1.2, 即可证得定理的第一个结论.

本定理第二个结论的证明留作习题 (习题 1.1.3).

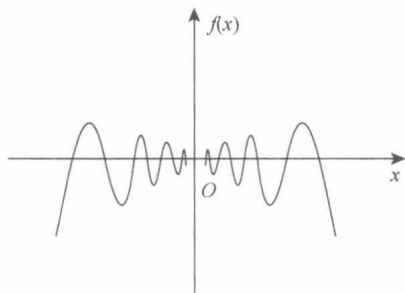


图 1.1.6 非吸引的稳定平衡点

## 习 题

**题 1.1.1** 如果  $x(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$  是方程 (1.1.2) 过  $(0, x_0)$  的解, 证明  $x(t - t_0, 0, x_0)$  是过  $(t_0, x_0)$  的解.

**题 1.1.2** 证明命题 1.1.2.

**题 1.1.3** 证明定理 1.1.2 的第二个结论.

**题 1.1.4** 讨论方程  $\dot{x} = ax^2 + bx + c$  的平衡点的存在性和稳定性, 其中  $a, b, c$  是常数.

**题 1.1.5** 讨论分段光滑系统  $\dot{x} = -|x|$  的平衡点的存在性和稳定性.

## 1.2 平衡点的基本分岔

本节通过一维自治系统中的具体例子<sup>[1]</sup>, 说明几种基本分岔的特点, 这些基本分岔是: 鞍结分岔 (saddle-node bifurcation), 跨临界分岔 (transcritical bifurcation), 滞后分岔 (hysteresis bifurcation), 音叉分岔 (pitchfork bifurcation) 和尖点分岔 (cusp bifurcation). 通过降阶方法 (如中心流形与范式理论、LS 方法等) 可将高维系统的分岔问题简化成低维系统的分岔问题, 并可将复杂分岔问题分解成基本分岔问题. 本节还给出了单自由度保守系统中出现这几类基本分岔的实例<sup>[6]</sup>.

**例 1.2.1** 考虑标量方程

$$\dot{x} = c - x \equiv F(x, c), \quad (1.2.1)$$

方程 (1.2.1) 是由方程  $\dot{x} = -x$  加常数项  $c$  扰动而构成的.  $F(x, c)$  的图像 ( $c$  取定值) 可由  $F(x, 0)$  的图像沿纵轴方向移动  $c$  而获得, 为方便起见, 将  $x$  轴平行地沿纵轴方向移动  $-c$ .

如图 1.2.1 所示, 可见方程  $\dot{x} = c - x$  与方程  $\dot{x} = -x$  的相图有相同结构. 这说明双曲平衡点具有结构稳定性: 因为在双曲平衡点  $\bar{x}$  处, 有  $f'(\bar{x}) \neq 0$ ,  $f(x)$  的图像在  $\bar{x}$  处横截  $x$  轴, 即  $f(x)$  在  $\bar{x}$  处的切线与  $x$  轴不重合,  $F(x, c)$  的平衡点位置可能改变, 但是上述横截性仍然保持, 小扰动后原双曲平衡点不会发生分岔, 而且稳定性也不会改变.

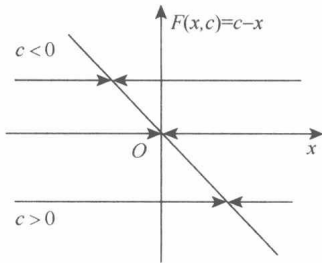


图 1.2.1 方程  $\dot{x} = c - x$  的相图

**例 1.2.2** 考虑标量方程

$$\dot{x} = c + x^2 \equiv F(x, c). \tag{1.2.2}$$

如图 1.2.2(a) 所示, 当  $c > 0$  时, 方程 (1.2.2) 无平衡点, 而当  $c < 0$  时, 有两个平衡点, 其中  $\bar{x} = -\sqrt{-c}$  是稳定的, 而  $\bar{x} = \sqrt{-c}$  是不稳定的. 如果以  $c$  为横坐标,  $\bar{x}$  为纵坐标, 给出平衡点随参数的变化关系曲线 [图 1.2.2(b)], 此图称为分岔图, 其中虚线表示不稳定的平衡点, 而实线表示稳定的平衡点.

如果在  $(\bar{x}, \bar{c})$  处, 有  $F(\bar{x}, \bar{c}) = 0$  (表示  $\bar{x}$  是平衡点) 及  $F_x(\bar{x}, \bar{c}) = 0$  (表示  $\bar{x}$  是退化的), 那么称  $c = \bar{c}$  为分岔值. 如果  $c$  在  $\bar{c}$  附近变化, 平衡点集合具有图 1.2.2(b) 的结构, 那么称方程  $\dot{x} = F(x, c)$  在  $\bar{c}$  点处产生鞍结分岔.

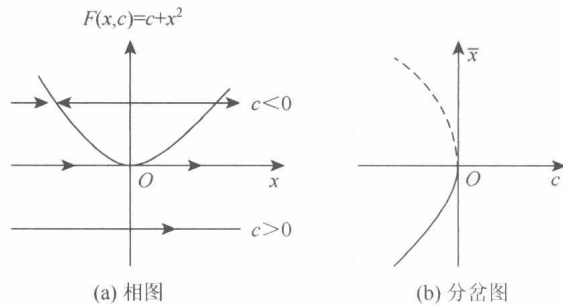


图 1.2.2 鞍结分岔

**例 1.2.3** 考虑标量方程

$$\dot{x} = cx + x^2 \equiv F(x, c). \tag{1.2.3}$$

方程 (1.2.3) 是方程  $\dot{x} = x^2$  加扰动项  $cx$  构成的. 图 1.2.3(a)、(b)、(c) 给出对应不同  $c$  值时方程 (1.2.3) 的相图, 图 1.2.3(d) 给出分岔图, 其中分岔图是由两相交直线组成的, 在通

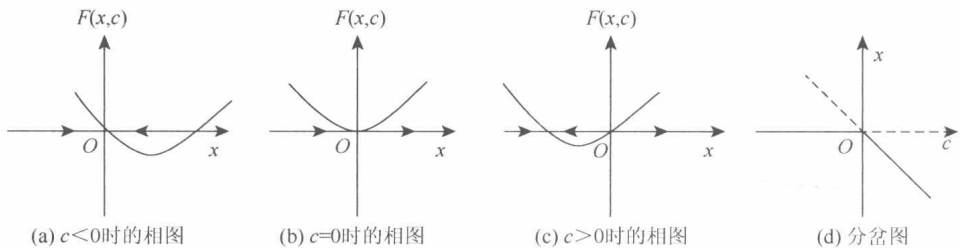


图 1.2.3 跨临界分岔

过分岔值时, 虽然平衡点的数目未变, 但两个解分支的稳定性发生了互换, 此类分岔一般称为跨临界分岔.

### 例 1.2.4 考虑标量方程

$$\dot{x} = c + x - x^3 \equiv F(x, c). \quad (1.2.4)$$

方程(1.2.4)的右端函数  $F(x, c) = c + x - x^3$  的图像可由  $f(x) = x - x^3$  的图像沿铅直方向平移而得到, 由此获得对应于不同  $c$  值  $F(x, c)$  的图像 [图 1.2.4(a)]. 由此图可知, 当  $-c_1 < c < c_1$  [ $c_1 = 2/(3\sqrt{3})$ ] 时, 方程(1.2.4)的相图与方程  $\dot{x} = x - x^3$  的相图有相同的结构,  $c = c_1$ ,  $-c_1$  是分岔值, 对其他的  $c$  值, 方程是结构稳定的 (structural stable). 现假设  $c$  从绝对值较大的负值开始增加, 系统的平衡点将沿分岔图 1.2.4(b) 中的下半稳定分支移动, 直至  $c_1$ , 然后发生跳跃 (jump), 然后沿上半稳定分支变化. 如果  $c$  从较大的正值减小, 平衡点沿上半稳定分支移动, 跳跃发生在  $c = -c_1$  处. 图中类似于一个平行四边形  $ABDE$  的图形称为滞后环 (hysteresis loop). 滞后和跳跃现象是非线性系统的典型特征.

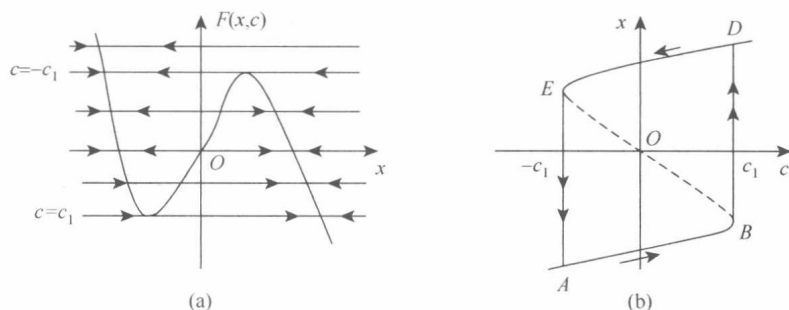


图 1.2.4 滞后分岔

### 例 1.2.5 考虑标量方程

$$\dot{x} = dx - x^3. \quad (1.2.5)$$

方程(1.2.5)是由方程  $\dot{x} = -x^3$  加扰动项  $dx$  构成的. 对于不同的  $d$  值,  $F(x, d)$  的图像及方程(1.2.5)的相图如图 1.2.5(a)、(b)、(c) 所示. 由此图可知, 当  $d < 0$  时, 方程有唯一的双曲平衡点  $\bar{x} = 0$ ; 而当  $d = 0$  时,  $\bar{x} = 0$  是稳定的, 但非双曲的; 当  $d > 0$  时, 有两个稳定的平衡点  $\bar{x} = \pm\sqrt{d}$  和一个不稳定的平衡点  $\bar{x} = 0$ . 如图 1.2.5(d) 所示, 方程(1.2.5)的分岔图形如一个物理教学示范用的音叉, 故称它为音叉分岔.

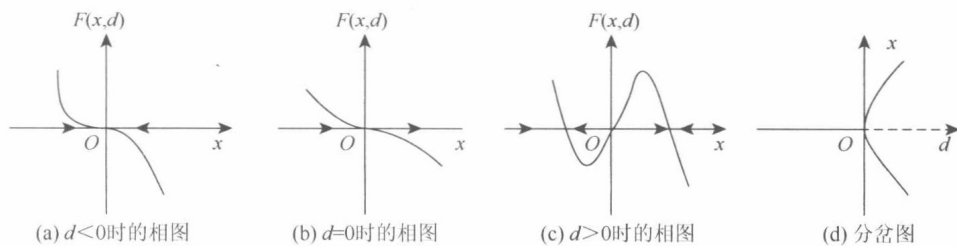


图 1.2.5 音叉分岔

例 1.2.6 考虑标量方程

$$\dot{x} = c + dx - x^3 = F(x, c, d). \tag{1.2.6}$$

方程(1.2.6)是由方程 $\dot{x} = -x^3$ 加含两参数扰动项 $c$ 和 $dx$ 而构成的,也可视为方程(1.2.5)增加一个附加参数 $c$ 而构成. 方程(1.2.6)的退化平衡点由方程

$$F(x, c, d) = 0, \quad \frac{\partial F(x, c, d)}{\partial x} = 0, \tag{1.2.7}$$

即由方程

$$c + dx - x^3 = 0, \quad d - 3x^2 = 0 \tag{1.2.8}$$

确定, 由以上两个方程解出 $d = 3x^2$ ,  $c = -2x^3$ , 再消去 $x$ 后得

$$4d^3 = 27c^2. \tag{1.2.9}$$

方程(1.2.9)表示 $(c, d)$ 平面上的一个尖点 $\Gamma'$  [图 1.2.6(b)]. 还可以从另一个角度考察方程组(1.2.7)解的几何意义: 其解是两个曲面( $F = 0, F_x = 0$ )的交线, 在交线的每个点上曲面 $F(x, c, d) = 0$ 具有铅直的切平面, 因此交线是此曲面发生折叠的地方. 交线的参数化方程是

$$\Gamma: d = 3x^2, \quad c = -2x^3, \quad x = x. \tag{1.2.10}$$

空间曲线(1.2.10)在 $(c, d)$ 平面上的投影形成一个尖点. 如果点 $(c, d)$ 落在 $\Gamma'$ 的内部 [图 1.2.6(b)阴影部分], 那么方程(1.2.6)有三个平衡点; 落在 $\Gamma'$ 上时, 有两个平衡点; 落在 $\Gamma'$ 的外部, 只有一个平衡点. 图 1.2.6(c)给出对应不同参数 $(c, d)$ 时的相图.

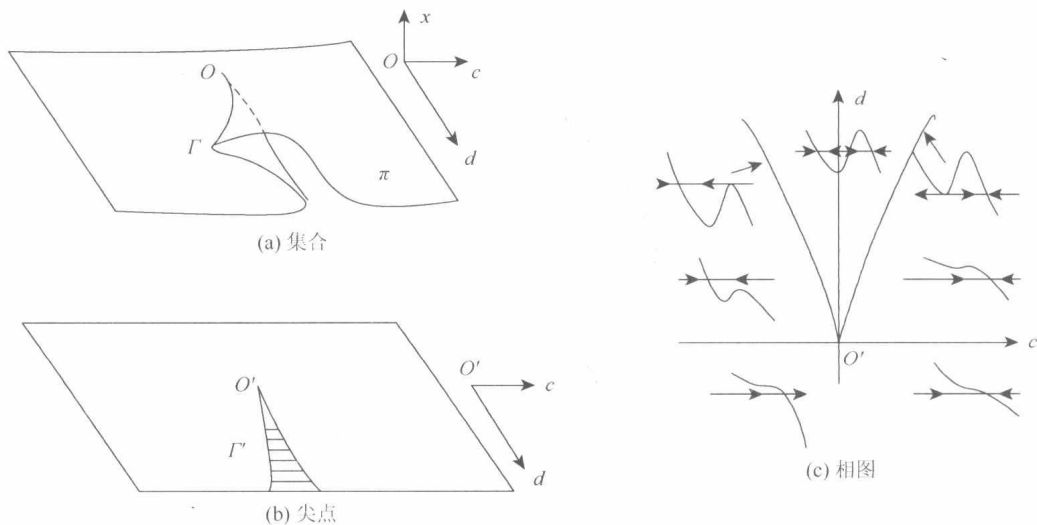


图 1.2.6 尖点分岔

两参数方程(1.2.6)包含方程(1.2.4)和方程(1.2.5): 如果在方程(1.2.6)中令 $d = 1$ , 可得方程(1.2.4), 那么用 $d = 1$ 的平面截图 1.2.6(a), 截痕即图 1.2.4(b); 如果在方程(1.2.6)中, 令 $c = 0$ , 得到方程(1.2.5), 那么用 $c = 0$ 的平面截图 1.2.6(a), 截痕即图 1.2.5(d). 另外用 $c$ 为常值( $|c|$ 较小)的平面截图 1.2.6(a), 截痕如图 1.2.7 所示, 此图可视为音叉分岔加扰动后, 对称性发生破缺而形成的分岔图.

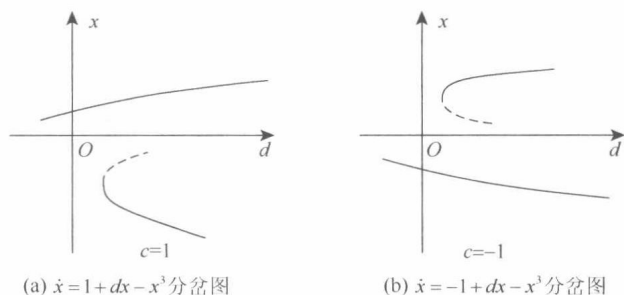


图 1.2.7 对称破缺

为给出上述几种分岔的具体实例，考虑单自由度保守系统：

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = f(x). \quad (1.2.11)$$

方程(1.2.11)的平衡点对应于势能的极值点  $\partial V(\bar{x})/\partial x = 0$  或  $f(\bar{x}) = 0$ ，而平衡点的稳定性可由势能在  $\bar{x}$  处的极大、极小性确定：若  $\partial^2 V(\bar{x})/\partial x^2 > 0$  (或  $f'(\bar{x}) < 0$ )，则势能在  $\bar{x}$  处取严格极小值，平衡是稳定的；若  $\partial^2 V(\bar{x})/\partial x^2 < 0$  (或  $f'(\bar{x}) > 0$ )，则势能在  $\bar{x}$  处取严格极大值，平衡是不稳定的。这就是所谓的 Lagrange-Dirichlet 定理(证明见本书第 8 章)。由此定理可知，方程(1.2.11)与方程(1.1.2)平衡点稳定性的判定方法是基本相同的。以下的几个例子引自文献[6]。

**例 1.2.7** 考虑浅拱的简化模型图 1.2.8(a)。浅拱简化成两根线性弹簧  $k$ ，在  $C$  点铰接，并在  $C$  点作用一铅直方向的力  $P$ ，设支座之间长度为  $2l$ ，设当弹簧与水平线夹角为  $\alpha$  时，弹簧处于自然状态。我们仅考虑对称的变形情况。取  $x$  为广义坐标，弹簧的形变为

$$\Delta = (l/\cos\alpha - l/\cos x).$$

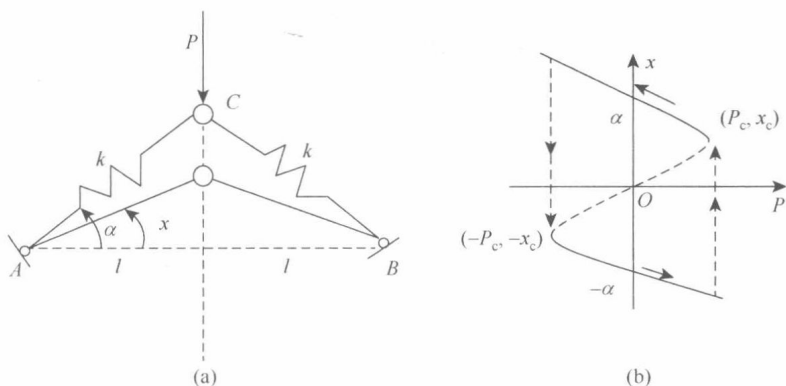


图 1.2.8 浅拱的力学模型与分岔图

如果取弹簧自然状态为势能零点，那么弹性势能与力  $P$  的势能分别为

$$V_k(x) = k(l/\cos\alpha - l/\cos x)^2, \quad V_p(x) = -Pl(\tan\alpha - \tan x),$$

系统总势能



$$V(x, P) = k(l / \cos \alpha - l / \cos x)^2 - Pl(\tan \alpha - \tan x). \quad (1.2.12)$$

由浅拱假设

$$\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2 / 2, \quad \cos x \approx 1 - x^2 / 2, \quad \tan \alpha \approx \alpha, \quad \tan x \approx x,$$

上式代入式(1.2.12)后,

$$V(x, P) = \frac{1}{4}kl^2(\alpha^4 - 2\alpha^2x^2 + x^4) - Pl(\alpha - x), \quad (1.2.13)$$

而

$$\frac{\partial V(x, P)}{\partial x} = kl^2(-\alpha^2x + x^3) + Pl, \quad (1.2.14)$$

由  $\partial V(x, P) / \partial x = 0$ , 得

$$P(x) = klx(\alpha^2 - x^2). \quad (1.2.15)$$

由式(1.2.14)得

$$\frac{\partial^2 V(x, P)}{\partial x^2} = kl^2(-\alpha^2 + 3x^2). \quad (1.2.16)$$

因此平衡位置  $|x| < \alpha / \sqrt{3}$  是不稳定的, 如图 1.2.8(b) 所示, 系统发生滞后分岔.

**讨论题 1.2.1** 如果不作浅拱假设, 则系统的分岔如何? <sup>[7]</sup>

**例 1.2.8** 图 1.2.9 是压杆的简化模型, 其中  $k$  为扭转弹簧,  $P$  为恒力. 先考虑图 1.2.9(a) 中的完备系统, 其势能为

$$V(x, P) = kx^2 / 2 - Pl(1 - \cos x), \quad (1.2.17)$$

$$\partial V(x, P) / \partial x = kx - Pl \sin x, \quad (1.2.18)$$

$$\partial^2 V(x, P) / \partial x^2 = k - Pl \cos x, \quad (1.2.19)$$

沿基本解  $x=0$ , 有  $\partial^2 V(0, P) / \partial x^2 = k - Pl$ , 故当  $P < P_c = k / l$  时, 基本解是稳定的, 而当  $P > P_c$  时, 其为不稳定的, 此时有非平凡解  $P = P(x) = kx / (l \sin x)$ . 由图 1.2.9(c) 可知, 当  $0 < x < \pi / 2$  时, 有关系  $\sin x < x < \tan x$ , 故

$$\partial^2 V(x, P(x)) / \partial x^2 = k - (kx / l \sin x) l \cos x = k(1 - x / \tan x) > 0,$$

故分岔解  $P = P(x)$  是稳定的, 完备系统在  $P = P_c$  处发生音叉分岔, 如图 1.2.10(a) 所示.

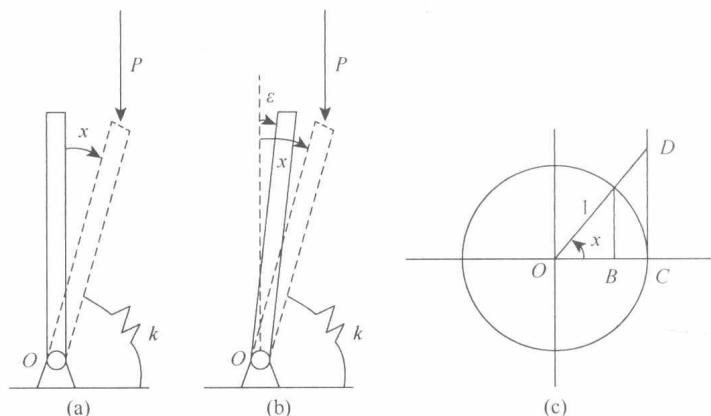


图 1.2.9 压杆的简化模型