

经管类教学丛书

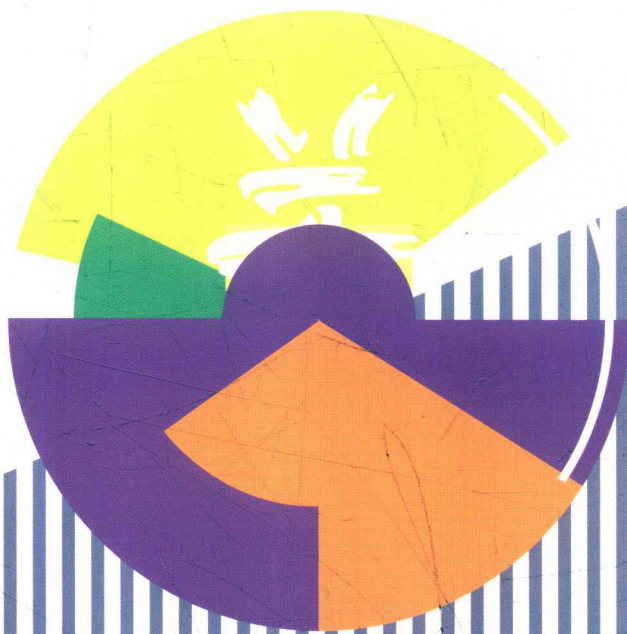
概率论（经管类）

学习辅导与习题全解

Probability Theory (Economics and management)

Learning guidance and exercises solution

高 慧 卫贵武 王文轲 李晓静 主编



经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

本书获得四川师范大学校级规划教材建设项目(编号10636jg201752)资助,获得四川师范大学“工业工程专业综合改革”项目,以及一般教改项目“基于工业工程专业在教学过程中创新能力培养的应用研究”部分资助。

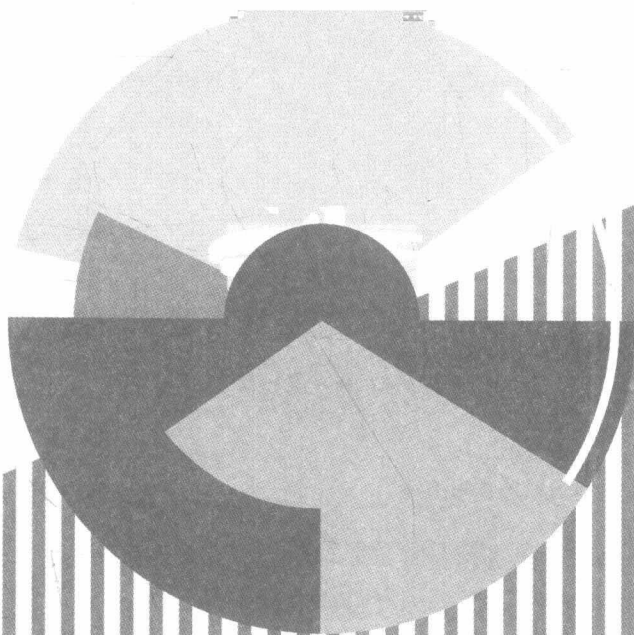
经管类教学丛书

概率论 (经管类)

学习辅导与习题全解

Probability Theory (Economics and management)
Learning guidance and exercises solution

高 慧 卫贵武 王文轲 李晓静 主编



经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论 (经管类) 学习辅导与习题全解/高慧等主编. —北京: 经济管理出版社, 2018. 11
ISBN 978 - 7 - 5096 - 5844 - 4

I. ①概… II. ①高… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料 IV. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 135526 号

组稿编辑: 王光艳

责任编辑: 李红贤 许 兵

责任印制: 黄章平

责任校对: 赵天宇

出版发行: 经济管理出版社

(北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层 100038)

网 址: www.E-mp.com.cn

电 话: (010) 51915602

印 刷: 三河市延风印装有限公司

经 销: 新华书店

开 本: 787mm × 1092mm/16

印 张: 10.5

字 数: 203 千字

版 次: 2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978 - 7 - 5096 - 5844 - 4

定 价: 48.00 元

· 版权所有 翻印必究 ·

凡购本社图书, 如有印装错误, 由本社读者服务部负责调换。

联系地址: 北京阜外月坛北小街 2 号

电话: (010) 68022974 邮编: 100836

前 言

本书是为学习王文轲、高慧等主编的《概率论（经管类）》的读者而编写的辅助教材。全书共分为五章，各章的顺序和内容与《概率论（经管类）》保持一致。各章的内容基本分为四个部分：

（一）教学基本要求

为了让读者对本章的学习要点有清楚的认识，每章的第一部分简单说明本章需要掌握的知识要点。

（二）内容精讲

为了帮助读者更好地掌握相关内容，完善本书的可读性和实用性，在各章第二部分介绍了本章的主要内容，使读者不必翻看教材回顾相关知识要点。

（三）习题解析

概率论的学习中，尤其是对于初学者，仅仅看懂相关知识要点是不够的，必须通过完成一定的习题，才能对相关理论有更深入的理解和认识。因此为了更好地帮助读者自检课后练习题的正确性，本书对王文轲、高慧等主编的《概率论（经管类）》中各章节后面的习题都做了详尽的解答，有些习题还给出了多种解法，供读者参阅，希望读者能从中获得启发和帮助。

（四）近年硕士研究生入学考试试题解析

本书收集了自 2011 年到 2018 年全国高等学校硕士研究生入学统一考试数学试题中有关概率论部分的试题，并给出了详细解答，这些试题就安排在相关章节习题解析后面，这

些试题可以作为《概率论（经管类）》习题的补充，不仅对于准备报考研究生的读者有所帮助，而且对于所有学习本课程的读者复习和巩固所学内容也是有益的。

本书由高慧主编，各章节习题由高慧、王文轲编写，历年硕士研究生入学考试试题解析由高慧、李晓静、卫贵武完成。

本书编写过程中，得到四川师范大学商学院领导和同仁的支持，编者谨致以衷心的感谢。

另外本书的录入工作得到王泰鑫、彭贺、李莎、郭远萱、郝紫涵同学的帮助，在此一并表示感谢。

限于时间和水平，书中难免存在缺点或错误，欢迎专家和读者的批评指正。

编者

2018年5月

目 录

第一章 随机事件的概率.....	1
教学基本要求.....	1
内容精讲.....	1
习题解析.....	9
习题 1-1	9
习题 1-2	10
习题 1-3	13
习题 1-4	18
习题 1-5	22
习题 1-6	27
第一章 总习题	30
近年硕士研究生试题解析	43
第二章 一维随机变量及其分布	45
教学基本要求	45
内容精讲	45
习题解析	52
习题 2-1	52
习题 2-2	52
习题 2-3	57
习题 2-4	60
习题 2-5	66
第二章 总习题	69
近年硕士研究生试题解析	79

第三章 多维随机变量及其分布	83
教学基本要求	83
内容精讲	83
习题解析	90
习题 3-1	90
习题 3-2	95
习题 3-3	98
习题 3-4	101
习题 3-5	104
第三章 总习题	106
近年硕士研究生试题解析	116
第四章 随机变量的数字特征	127
教学基本要求	127
内容精讲	127
习题解析	131
习题 4-1	131
习题 4-2	133
习题 4-3	136
习题 4-4	139
第四章 总习题	140
近年硕士研究生试题解析	145
第五章 大数定理和中心极限定理	153
教学基本要求	153
内容精讲	153
第五章 总习题	156

第一章 随机事件的概率

教学基本要求

1. 了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算。
2. 了解事件频率的概念，了解概率的统计定义，了解概率的古典定义，会计算简单的古典概率。
3. 了解概率的公理化定义，理解概率的基本性质，理解概率加法公式。
4. 了解条件概率的概念，理解概率的乘法定理，理解全概率公式和贝叶斯公式，并会应用它们解决较简单的问题。
5. 理解事件的独立性概念。

内容精讲

一、随机试验与样本空间

1. 随机试验

概率论所要讨论的是具有以下三个性质的随机试验：

- (1) 试验在相同的条件下能够重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地, 我们把具有上述三个特点的试验称为随机试验, 或简称试验, 用英文大写字母 E 表示.

2. 样本空间

对于任一个随机试验 E , 由于它必须满足条件(2), 因此, 试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 Ω . Ω 中的元素, 即 E 的每个结果, 称为样本点. 样本点一般用 ω 表示, 于是可记 $\Omega = \{\omega\}$. 有时候, 同样的试验, 因为试验的目的不一样, 所以样本空间截然不同, 这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间.

3. 随机事件

一般地, 我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集 A 为 E 的随机事件, 简称事件. 随机事件是概率论中最基本的概念, 常用英文大写字母 A 、 B 、 C 等来表示. 随机事件 A 总是由若干个基本事件组成的, 即 A 是 Ω 的子集, 事件 A 发生等价于构成 A 的基本事件有 1 个发生.

特别地, 由一个样本点组成的单点集称为基本事件; 样本空间 Ω 有两个特殊子集, 一个是 Ω 本身, 由于它包含了试验的所有可能结果, 所以在每次试验中它总是发生, 称为必然事件; 另一个子集是空集 ϕ , 它不包含任何样本点, 因此在每次试验中都不发生, 称为不可能事件.

二、事件间的关系与运算

1. 关系

(1) 包含关系. 若 $A \subset B$, 则称事件 B 包含事件 A , 或称事件 A 是事件 B 的子事件. 包含关系指 “事件 A 发生必有事件 B 发生”.

(2) 相等关系. 如果 $A \subset B$, $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 可以记为 $A = B$, 事实上也就是说 A 与 B 是由完全同样的一些试验结果构成, 只不过表面上看是不同的两个说法而已.

(3) 积事件. 事件 $A \cap B = \{\omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 事件 $A \cap B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生. 积事件 $A \cap B$ 可简记为 AB .

称 $\bigcap_{k=1}^n A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件, 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生; 同理称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件.

(4) 差事件. 事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件, 事件 $A - B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生而事件 B 不发生.

若 $A \cap B = \phi$, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的, 或互斥的.

显然 $A \cap B = \phi \Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 不能同时发生.

(5) 对立事件(逆事件). 事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件, 记作 $\bar{A}$, 即 $\bar{A} = \Omega - A$. 事件 $\bar{A}$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 不发生. 由于 $A \cap \bar{A} = \phi$, $A \cup \bar{A} = \Omega$, 因此在每次试验中, 事件 A 、 $\bar{A}$ 中必有一个且仅有一个发生. 又 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件, 所以称事件 A 与 $\bar{A}$ 互逆.

按差事件和对立事件的定义, 显然有 $A - B = A \bar{B}$.

2. 运算

与集合论中集合的运算一样, 事件之间的运算满足下述运算规律:

(1) 交换律. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

(3) 分配律. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(4) 对偶律. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

这些运算规律可以推广到任意多个事件上去.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

可推广为: $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \bar{A}_k$, $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \bar{A}_k$.

事件的运算约定为: “逆运算”优先, 然后是“交运算”, 最后进行“并、或、差”; 事件的关系与运算和集合的关系运算对应, 所以我们可以对比着记忆, 并使用集合关系思考事件关系.

三、概率的概念和基本性质

1. 概率的定义

(1) 概率的统计性定义. 在相同的条件下重复进行了 n 次试验, 如果事件 A 在 n 次试验中出现了 n_A 次, 则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率, 记为 $f_n(A)$, 即:

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

大量试验证实, 随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)$, 当重复试验的次数 n 增大时, 总呈现出稳定性, 稳定在一个常数的附近. 这就是随机现象固有的性质. “频率的稳定性”就是我们通常所说的统计规律性. 概率为频率的稳定值.

(2) 概率的公理化定义. 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, 对 E 的每一个事件 A , 将其对应于一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

- 1) 非负性: 对任一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- 2) 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
- 3) 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 即对于 $i \neq j, A_i A_j = \phi, i, j = 1, 2, \dots$, 则有:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

在第五章的伯努利大数定律将会阐明, 当试验次数 n 充分大时, 事件 A 的频率 $f_n(A)$ 接近事件 A 的概率 $P(A)$.

2. 概率的基本性质

由概率的定义, 不难推出概率的一些性质:

性质 1 $p(\phi) = 0$.

性质 2 (有限可加性) $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若事件两两互不相容, 则:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

性质 3 若事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则有:

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geq P(A)$$

推论 对任意两个事件 A, B , 有减法公式:

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

性质 4 对任一事件 $A, P(A) \leq 1$.

性质 5 对任一事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 6 (加法公式) 对任意两个事件 A, B , 有:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

四、古典概型

1. 古典概型定义

有一些随机试验具有如下两个特征:

- (1) 试验的样本空间只含有有限个元素, 即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同, 即:

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\})$$

具有以上两个特点的随机试验称为等可能概型, 由于它是概率论发展初期的主要研究对象, 所以也称之为古典概型(请读者列出一些古典概型的例子).

设试验 E 是古典概型, 由于基本事件两两互不相容, 因此:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = nP(\{\omega_i\})$$

$$\text{从而 } P\{\omega_i\} = \frac{1}{n} (i=1, 2, \cdots, n).$$

若事件 A 含有 k 个基本事件, 即 $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\}$, 这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中某 k 个不同的数, 则有:

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{\omega_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 中的基本事件总数}} \quad (1-1)$$

式(1-1)给出了等可能概型中事件 A 的概率计算公式. 不难验证, 由式(1-1)所确定的概率满足概率的公理化定义中所要求的三个条件.

求事件的古典概型应注意几点:

其一, 选择适合解决该问题的试验与样本空间, 正确计算样本空间的基本事件数与所求事件所含的基本事件数, 避免重复计算或漏算.

其二, 利用事件间的关系与运算, 把所求概率的事件表示为容易求得其概率的一些事件的运算, 再利用概率的性质计算出所要求的概率, 是常用的方法.

不同的随机事件发生的概率可能不一样, 概率大的事件在一次试验中发生的可能性较大, 概率小的事件在一次试验中发生的可能性较小. 人们在长期实践中总结出来的所谓“实际推断原理”, 即“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”. 这一原理在实际中非常有用.

2. 几何概型定义

在一个面积为 $S(\Omega)$ 的区域 Ω 中等可能的任意投点, 这里的“等可能”是指点落入 Ω 的任何区域 A 的可能性大小与区域 A 的面积 $S(A)$ 成正比, 而与其位置和形状无关, 记事件 $A = \{\text{点落入区域 } A\}$, 则有事件 A 落入区域中的概率为:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

由上式所确定的概率通常称为几何概率, 不难验证, 几何概率满足概率的公理化定义.

需要指出的是, 若在直线上的某一线段或空间上的投点, 则几何概率计算公式中的面积分别改为长度或体积.

五、条件概率及其有关三个概率公式

1. 条件概率定义

一般地, 设 A, B 是 Ω 中的两个事件, 则在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率为:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

可以验证, 条件概率 $P(\cdot|A)$ 满足概率公理化定义中的三条公理, 即:

(1) 对每个事件 B , 有 $P(B|A) \geq 0$;

(2) $P(\Omega|A) = 1$;

(3) 设 $B_1, B_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 则有:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

从而概率所具有的性质和满足的关系式对条件概率仍适用. 例如,

$$P(\phi|A) = 0$$

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$$

$$P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$$

根据具体情况, 可以选用下列两种方法之一来计算条件概率 $P(B|A)$: 其一, 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算; 其二, 在原来的样本空间 Ω 中, 直接由定义计算.

2. 乘法公式

设 $P(A) > 0$, 则有:

$$P(AB) = P(B|A)P(A) \quad (1-2)$$

一般地, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n(n \geq 2)$ 个事件, 且 $P(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) > 0$, 则由归纳法可得:

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_n | A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) (P(A_{n-1} | A_1, A_2, \dots, A_{n-2})) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1) \quad (1-3)$$

注意, 这里的条件 $P(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) > 0$ 保证了式 (1-3) 中所有的条件概率均有意义.

另外, 由于 A, B 的位置具有对称性, 因此, 若 $P(B) > 0$, 则由:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可得

$$P(AB) = P(A|B)P(B) \quad (1-4)$$

乘法公式可用于求一些积事件的概率.

3. 全概率公式

设 $A_1, \dots, A_n$ 是 Ω 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, \dots, n)$, 则对任何事件 $B \in \Omega$ 有:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

上式就称为全概率公式.

全概率公式可以通过综合分析一个较为复杂的事件发生的各种不同的原因、情况或途径及其可能性求得该事件发生的概率.

4. 贝叶斯公式

设 $A_1, \dots, A_n$ 是 Ω 的一个划分, 且 $P(B) > 0, P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则对任何事件 $B \in \Omega$, 有:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, (j = 1, \dots, n)$$

也称为逆概率公式.

逆概率问题可以从另外一个角度加以解释. 一般 $P(A_i)$ 是根据以往的经验或数据分析得到的, 叫先验概率, 而在得到信息 (即已知购买的是次品) 之后, 计算出的 $P(A_i|B) (i = 1, 2)$ 叫作后验概率. 它是有了试验结果后, 对先验概率的一种校正.

与全概率公式刚好相反, 贝叶斯公式主要用于当观察到一个事件已经发生时, 去求导致该事件发生的各种原因、情况或途径的可能性大小. 它在经营管理、投资决策、医学卫生统计、人工智能等方面有重要的应用价值.

六、事件的独立性

1. 两个事件独立定义

设 A, B 两个事件, 如果满足等式:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立.

(1) 事件 A 与事件 B 相互独立的充要条件为:

$$P(B|A) = P(B)$$

若 $P(A) = 0$, 则事件 A 与任一事件相互独立.

(2) 若 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则 A 、 B 相互独立与 A 、 B 互不相容不能同时成立.

(3) 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则下列各对事件:

A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$

也相互独立.

2. 多个事件独立定义

设 A_1, A_2, A_3 是三个事件, 如果满足等式:

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 A_2) &= P(A_1) P(A_2) \\ P(A_2 A_3) &= P(A_2) P(A_3) \\ P(A_1 A_3) &= P(A_1) P(A_3) \\ P(A_1 A_2 A_3) &= P(A_1) P(A_2) P(A_3) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

(1) 一般, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n ($n \geq 2$) 个事件, 如果对其中任意 2 个, 任意 3 个, $\dots$, 任意 n 个事件的积事件的概率, 都等于各事件的概率之积, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立.

(2) 无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 是指其中任意有限多个事件都相互独立.

与两个事件的情形类似, 在实际应用时, 往往根据问题的实际意义来判断多个事件的独立性. 如果各个事件是相互独立的, 则许多概率问题的计算可以大为简化.

(3) 如果 n ($n \geq 2$) 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则将其中任何 m ($1 \leq m \leq n$) 个事件换成相应的对立事件, 形成的 n 个新事件仍相互独立.

(4) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个相互独立的事件, 则这 n 个事件中至少有一个发生的概率为:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] \quad (1-6)$$

独立性可以简化概率的计算:

I. 计算 n 个相互独立的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件的概率可简化为:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n) \quad (1-7)$$

II. 计算 n 个相互独立的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件的概率可简化为:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$$

习题解析

习题 1-1

1. 说明随机试验具有的三个特点的内容.

解:

随机试验具有以下三个特点:

- (1) 试验在相同的条件下能够重复进行;
- (2) 试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

2. 写出下列随机试验的样本空间 S :

(1) 生产产品直到有 10 件正品为止, 记录生产产品的总件数.

(2) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的记上“正品”, 不合格的记上“次品”, 如连续查出 2 件次品就停止检查, 或检查了 4 件产品就停止检查, 记录检查的结果.

解:

(1) 设在生产第 10 件正品前共生产了 k 件不合格品, 样本空间为 $S = \{10 + k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ 或写成 $S = \{10, 11, 12, \dots\}$, 或写成 $S = \{t \mid t \geq 10\}$.

(2) 用 0 表示检查到一件次品, 用 1 表示检查到一件正品. 例如 0110 表示第一次与第四次检查到的是次品, 而第二次与第三次检查到的是正品, 样本空间可表示为 $S = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111\}$.

3. 设 A 、 B 、 C 是随机事件, 则下列事件如何表达?

- (1) A 与 B 发生, C 不发生.
- (2) A , B , C 至少有两个发生.
- (3) A , B , C 恰好发生两个.
- (4) A , B , C 中不多于一个事件发生.
- (5) A , B , C 都不发生.
- (6) A , B , C 不全发生.

解:

(1) “ A 与 B 发生, C 不发生”可以表示为: $AB\bar{C}$.

(2) “ A, B, C 至少有两个发生”可以表示为: $AB \cup AC \cup BC$.

(3) A, B, C 恰好发生两个可以表示为: $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

(4) “ A, B, C 中有不多于一个事件发生”可以表示为: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$.

(5) A, B, C 都不发生可以表示为: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(6) A, B, C 不全发生可以表示为: $\Omega - ABC$.

4. 对于任意两个事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是_____.

A. $A \subset B$

B. $\bar{B} \subset \bar{A}$

C. $A\bar{B} = \phi$

D. $\bar{A}\bar{B} = \phi$

解:

特殊值法. 取 $A = \phi, B = \Omega$, 则 $\bar{A} = \Omega, \bar{B} = \phi$. 且 $A \cup B = \phi \cup \Omega = \Omega = B$

对于 A, $\phi \subset \Omega$, 即 $A \subset B$ 显然成立;

对于 B, $\bar{B} \subset \bar{A}$, 即 $\phi \subset \Omega$ 也成立;

对于 C, $A\bar{B} = \phi$, 即 $\phi\Omega = \phi$ 也成立;

对于 D, $\bar{A}\bar{B} = \Omega \cdot \Omega = \Omega \neq \phi$, 不成立.

即由 $A \cup B = B$ 能推出 A、B、C, 但不能推出 D, 故选 D.

5. 以 A 表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 $\bar{A}$ 为_____.

A. “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”.

B. “甲、乙两种产品均畅销”.

C. “甲种产品滞销”.

D. “甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

解:

应选 D.

设 A_1 表示甲产品畅销, A_2 表示乙产品滞销, 则 $A = A_1A_2$, 由德·摩根律知, $\bar{A} = \overline{A_1A_2} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$, 即 $\bar{A}$ 表示甲产品滞销或乙产品畅销.

6. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别, 举例说明.

解:

由于两事件相互对立与互斥之间没有必然联系, 互斥不能推出相互对立, 但是, 对立能推出互斥. 比如, 设 X 是连续型随机变量, $A = \{X \leq 1\}$, $B = \{X \geq 50\}$, 则有 $AB = \phi$, 即 A, B 互斥, 但 $A \cup B \neq \Omega$, 这时 A, B 互斥但 A, B 不对立.

习题 1-2

1. 设 A, B, C 是三个事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$,