DAXUESHENG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG
—GAODENG SHUXUE (TIGAOPIAN)

大学生数学竞赛教程

——高等数学

（提高篇）

罗来珍　班立群　张　旭　主编

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

$\int_{x} d\omega=\int_{\partial x}\omega$

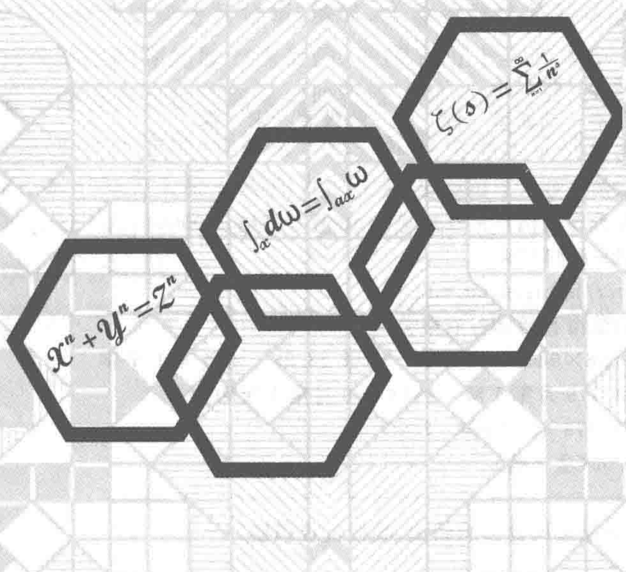
$x^n+y^n=z^n$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

DAXUESHENG SHUXUE JINGSAI JIAOCHENG
—GAODENG SHUXUE (TIGAOPIAN)

大学生数学竞赛教程
——高等数学
（提高篇）

● 罗来珍　班立群　张　旭　主编



HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书分高等数学基础篇和高等数学提高篇两册，基础篇主要包括高等数学基础知识点的讲解和相应的练习题，起到温故知新的作用；提高篇主要包括对高等数学综合性试题的分析和解答，注重数学抽象思维的呈现，以提高学生综合分析和解决问题的能力为目的.

本书可供准备参加全国大学生数学竞赛的非数学专业的学生和老师作为应试教程，也适合理工科大学生在学习和复习高等数学课程时使用以及考研时参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.提高篇/罗来珍，班立群，张旭主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.9

大学生数学竞赛教程

ISBN 978-7-5603-7656-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①罗… ②班… ③张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 204910 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘立娟 刘家琳 穆 青 陈雅君 宋 淼
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 22.25 字数 431 千字
版　　次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7656-1
定　　价 128.00(全 2 册)

前　言

本书是哈尔滨理工大学全国大学生数学竞赛(非数学类)辅导用书,为配合我校的大学生参加数学竞赛而编写.书中紧密配合大学生数学竞赛的要求,内容上覆盖了数学竞赛的大纲,重点突出、难点适当,同时便于学生自学自测;选材上突出了题目的典型性、代表性,解法的启发性、灵活性,题材广泛,题型多样,讲题示法,以题明理,注重解题思路和规律的分析,解题的方法和技巧的提炼,以及有关注意事项的阐释;写作上编者力求做到逻辑严谨,文字简洁,语言流畅,深入浅出,便于学生掌握.

本书分高等数学基础篇和高等数学提高篇两册.基础篇按高等数学章节排序,侧重基础知识点的讲解和相应练习,起到温故知新的作用.王树忠编写1～4章,于禄编写5～8章,孟桂芝编写9～11章.提高篇则是以专题形式展开,对高等数学综合性试题进行分析、解答,注重数学抽象思维的呈现,以提高学生综合分析和解决问题的能力为目的.并配有近十年的大学生数学竞赛预赛试题和决赛试题以及自编竞赛模拟题供学习者参考练习.罗来珍编写1～3专题,班立群编写4～7专题,张旭负责编写模拟试题及整理历届全国大学生数学竞赛试题.本书能有效提升参加大学生数学竞赛学生的综合水平,也适合理工科大学生在学习和复习高等数学课程时使用,更是理工科大学生考研时复习高等数学的有效用书.

限于编者的水平,书中难免出现疏漏,恳请读者及同行指正.

编者

2018年7月

目　录

第一部分　专题训练

第二部分　模拟试题

第三部分　历届预赛和决赛试题及参考答案

第一部分
专题训练

专题一　极限与连续

一、内容提要

微积分是建立在极限理论的基础上，其主要任务是研究函数的性态及变化规律.

1. 极限的四则运算法则.

2. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. 等价无穷小.

(1) 等价无穷小的代换.

给定因变量 γ 及两对等价无穷小 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则：

分式型代换：$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$；

乘积型代换：$\lim\alpha\gamma=\lim\alpha'\gamma$；

幂指型代换：$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\lim(1+\alpha')^{\frac{1}{\beta'}}$.

注：以上各等式两端的极限同时存在或不存在.

(2) 常用的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，有

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x$$

$$\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

4. 夹逼准则：设 α,β,γ 是自变量相同的三个因变量，在自变量的同一变化趋势中满足 $\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$，且 $\lim\alpha=\lim\beta=A$，则 $\lim\gamma=A$.

5. 单调有界原理：单调有界数列一定存在极限.

6. 洛必达法则：

$\dfrac{0}{0}\left(或\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型不定式：设函数 $f(x)$，$g(x)$ 可导，其中 $g'(x)\neq0$，且

$\lim f(x)=\lim g(x)=0$(或 ∞),若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞),则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的推广:设函数 $f(x)$,$g(x)$ 可导,其中 $g'(x)\neq 0$,且 $\lim g(x)=\infty$,若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞),则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

$0\cdot\infty$,$\infty\pm\infty$,0^0,∞^0 都可转化为 $\frac{0}{0}\left(\text{或}\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型.

设 α,β 都是自变量 x 的函数,则:

①$0\cdot\infty$ 型的转化:若 $\alpha\to 0$,$\beta\to\infty$,则 $\alpha\cdot\beta=\frac{\beta}{\frac{1}{\alpha}}$ 转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型;

②$\infty\pm\infty$ 型的转化:若 $\alpha\to\infty$,$\beta\to\infty$,则 $\alpha\pm\beta=\frac{\frac{1}{\beta}\pm\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha\beta}}$ 转化为 $\frac{0}{0}$ 型;

③$0^0$,∞^0 型的转化:都可通过公式 $\alpha^\beta=e^{\beta\ln\alpha}$ 转化为 $\frac{0}{0}\left(\text{或}\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型.

7. 泰勒公式.

泰勒中值定理(拉格朗日型余项):如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数,则对任一 $x\in(a,b)$,有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日型余项,这里 ξ 是介于 x 与 x_0 之间的某个数.

8. 利用定积分的定义计算极限.

设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上,在区间 $[a,b]$ 上任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

将区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$,$i=1,2,\cdots,n$,第 i 个小区间 $[x_{i-1}$,

$x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n$，任意选取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i, i=1,2,\cdots,n$，并作和 $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则定积分定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

9. 柯西收敛准则：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m,n > N$ 时，有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

注：(1) 柯西收敛准则证明数列收敛，不需要知道数列的极限值；

(2) 柯西收敛准则给出了证明数列收敛的方法，但没有给出求极限值的方法；

(3) 否定说法：数列 $\{x_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_1, n_2 > N$，使得 $|x_{n_1} - x_{n_2}| \geqslant \varepsilon_0$.

10. 施笃兹(Stolz) 定理.

(1) 若数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：

① 对充分大的 $n, y_n < y_{n+1}$（当 n 充分大时，y_n 单调递增）；

② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在或为 ∞，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$.

(2) 若数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：

① 对充分大的 $n, y_n > y_{n+1}$（当 n 充分大时，y_n 单调递减）；

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$；

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在或为 ∞，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$.

11. 利用级数性质求极限.

若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

12. 压缩原理：若数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1} - x_n| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|$，其中 $0 < r < 1$ 为常数，则数列 $\{x_n\}$ 一定收敛.

13. 一元函数连续的概念.

(1) 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 左连续($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$)且右连续($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$).

14. 间断点:若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续,则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点:左、右极限都存在.

第二类间断点:左、右极限至少有一个不存在.

注:可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点.

15. 闭区间上连续函数的性质.

(1) 有界性:有界闭区间上的连续函数一定有界.

(2) 最值定理:有界闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值.

(3) 介值定理:介于 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上最大值 M 和最小值 m 之间的一切数值 c,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=c$.

(4) 零点定理:若 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$.

二、例题精讲

例 1 设$\{a_n\}$为实数列,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$,故$|a_n-a|\leqslant M$. 任给$\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\frac{|a_1-a+a_2-a+\cdots+a_n-a|}{n}\leqslant\\ \frac{|a_1-a+a_2-a+\cdots+a_N-a|}{n}+\\ \frac{|a_{N+1}-a+a_{N+2}-a+\cdots+a_n-a|}{n}<\end{aligned}$$

$$\frac{MN}{n}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

例 2 设$\{a_n\}$为实数列,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$($a$有限),求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

证明 由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$,故$|a_n-a|\leqslant M$. 任给$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|=\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n-\frac{n(n+1)a}{2}+\frac{n}{2}a}{n^2}\right|\leqslant$$

$$\frac{|a_1-a|+2|a_2-a|+\cdots+n|a_n-a|}{n^2}+\frac{1}{2n}a=$$

$$\frac{|a_1-a|+2|a_2-a|+\cdots+N|a_N-a|}{n^2}+$$

$$\frac{(N+1)|a_{N+1}-a|+\cdots+n|a_n-a|}{n^2}+\frac{1}{2n}a<$$

$$\frac{(1+2+\cdots+N)}{n^2}M+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2n}a<$$

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2M+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2n}a<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

例 3 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 若$\theta=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. 若$\theta\neq0$,当$n$足够大时,$\sin\frac{\theta}{2^n}\neq0$,于是

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\cdots=$$

$$\frac{1}{2^n}\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$$

$$0\leqslant\frac{1}{n^2}\ln(n!)=\frac{1}{n^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)\leqslant\frac{\ln n}{n}$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$,故$\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

解 当 $1<x\leqslant t\leqslant x+1$ 时,$0\leqslant\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$,则

$$0\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-1}}\to 0\quad(x\to\infty)$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$.

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}+\frac{e^2\ln(1+x)}{x}\right]$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$ 及

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}=$$

$$2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}=0.$

例 7 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$$

则有

$$\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha$$

其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，即

$$1+x+\frac{f(x)}{x}=e^{3x+\alpha x},\ \frac{f(x)}{x}=e^{3x+\alpha x}-x-1,\ \frac{f(x)}{x^2}=\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\alpha x}{x}-1=2$$

例 8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

解 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\pi(\sqrt{1+4n^2}-2n)=$

$$\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\cdot n}=$$

$$e^{\frac{\pi}{4}}$$

例 9 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}$.

解 由泰勒公式可知,当 $x\to 0$ 时,有

$$e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2),\ln(1-x^2)=-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3),\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

代入原极限式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{2x}+\ln(1-x^2)}{x\cos x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2[1+2x+2x^2+o(x^2)]-x^2-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{x\left[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right]-x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+\dfrac{3}{2}x^4+o(x^4)}{-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)}=-6$$

例 10 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{k}{x_n}\right),k>0,x_1>0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求之.

证明 (1) 先证有界性. $x_n>0,n=1,2,\cdots,x_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{k}{x_n}}=\sqrt{k}$ $(n=1,2,\cdots)$.

(2) 再证单调性. 又

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{k}{x_n}\right)\leqslant\frac{1}{2}(x_n+\sqrt{k})\leqslant\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n$$

即$\{x_n\}$单调递减,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{k}{A}\right)(A\geqslant 0)$,解得 $A=\sqrt{k}$.

例 11 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)\right\}$存在.

证明 令 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$,易知 $f(x)$ 在$[2,+\infty)$上非负、单调递减,则

$$\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)$$